

АВТОКОЛЕБАНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СТАБИЛИЗАТОРОВ

Я. Н. Ройтенберг

(Москва)

Гироскопический стабилизатор, предназначенный для стабилизации какого-либо объекта вокруг одной оси, представляет собой гироскоп с тремя степенями свободы, с внешним кольцом которого жестко соединен стабилизируемый объект [1], [2].

Ось внешнего кольца гироскопа располагается в опорах, укрепленных на палубе корабля. С этой осью при помощи зубчатой передачи соединен вал электрического мотора постоянного тока, который должен преодолевать воздействие внешних сил на стабилизируемый объект и поэтому может быть назван стабилизирующим мотором.

Последний имеет независимое возбуждение. Ток в якоре мотора регулируется при помощи усилителя. Напряжение на вход усилителя поступает от потенциометра, укрепленного на оси кожуха гироскопа. Благодаря этому вращающий момент, развиваемый стабилизирующим мотором, зависит от угла поворота гироскопа вокруг оси его кожуха.

Работа гироскопического стабилизатора происходит следующим образом. При воздействии на стабилизируемый объект внешних сил, создающих вращающий момент относительно оси внешнего кольца гиростабилизатора, гироскоп прецессирует вокруг оси своего кожуха; от установленного на кожухе гироскопа потенциометра подается напряжение на вход усилителя.

Полученное после усиления напряжение подводится к цепи якоря стабилизирующего мотора, и последний развивает вращающий момент, противоположный моменту внешних сил. Таким образом, внешние силы, действующие на стабилизируемый объект, уравниваются мотором.

Однако гироскоп помимо управления стабилизирующим мотором выполняет временами еще и задачи непосредственной стабилизации объекта. В промежутки времени, когда токи в усилителе и в якоре мотора не достигли еще нужной величины и развиваемый стабилизирующим мотором вращающий момент не уравнивает полностью момент внешних сил, гироскоп прецессирует вокруг оси своего кожуха и, создавая этим гироскопический момент, дополнительно уравнивающий момент внешних сил, не допускает поворота внешнего кольца гиростабилизатора вокруг его оси.

При определенных видах характеристики напряжения, подаваемого на вход усилителя, гироскопические стабилизаторы совершают автоколебания.

В настоящей работе вопрос об автоколебаниях гиростабилизатора изучается для одного из частных видов характеристики напряжения, подавае-

мого на вход усилителя, в котором можно аналогично точным решениям задач теории регулирования, полученным Б. В. Булгаковым [3], А. А. Андроновым и Н. Н. Баутиным [4] и А. И. Лурье (в неопубликованной работе о движении гироскопа, снабженного корректирующим устройством), построить точное периодическое решение уравнений движения системы.

1. Периодическое решение уравнений движения гироскопического стабилизатора. В случае, когда напряжение, подаваемое на вход усилителя, изменяется по закону

$$f(\beta) = S \operatorname{sign} \beta \quad (1)$$

где β — угол поворота гироскопа вокруг оси его кожуха, а S — некоторая постоянная величина, уравнения движения системы можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} A\Omega' - H\beta' - Ki &= 0, & \tau i' + i + n_1\Omega - pI &= 0 \\ B\beta'' + H\Omega &= 0, & \sigma I' + I &= S \operatorname{sign} \beta \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь A — момент инерции внешнего кольца гиростабилизатора вместе со стабилизируемым объектом, гироскопом и приведенным моментом инерции якоря мотора относительно оси внешнего кольца, Ω — угловая скорость поворота внешнего кольца гиростабилизатора, B — экваториальный момент инерции гироскопа, H — кинетический момент гироскопа, I и i — токи в цепи усилителя и цепи якоря стабилизирующего мотора соответственно, σ и τ — постоянные времени этих цепей, $n_1\Omega$ — противоэлектродвижущая сила, развиваемая якорем мотора при его вращении, pI — напряжение, подводимое к цепи якоря стабилизирующего мотора, Ki — момент на оси рамы гиростабилизатора, накладываемый стабилизирующим мотором. (Напряжения $S \operatorname{sign} \beta$, pI и $n_1\Omega$ отнесены к сопротивлению, равному 1 ому.)

Все коэффициенты в уравнениях (2) являются постоянными.

Уравнения (2) можно проинтегрировать по интервалам времени, определяемым значением β . Для интервала времени, в течение которого $\beta > 0$:

$$f(\beta) = S \quad (3)$$

и мы получаем из (2) систему линейных уравнений с правой частью.

Система однородных дифференциальных уравнений, образуемая в этом случае при отбрасывании правой части, имеет характеристическое уравнение:

$$\left[\lambda^3 + \frac{1}{\tau} \lambda^2 + \left(q^2 + \frac{n}{\tau A} \right) \lambda + \frac{1}{\tau} q^2 \right] \left(\lambda + \frac{1}{\sigma} \right) \lambda = 0 \quad (4)$$

где

$$n = Kn_1, \quad q^2 = \frac{H^2}{AB} \quad (5)$$

Когда $n = 0$, кубический многочлен, заключенный в скобки в выражении (4), имеет один действительный и два чисто мнимых корня. Обычно на практике соотношение параметров таково, что $q^2 \gg n / (\tau A)$ и упомянутый кубический многочлен имеет один действительный и пару комплексных корней. Таким образом, корни уравнения (4) имеют следующий вид:

$$\lambda_1 = -\mu_1 + \omega i, \quad \lambda_2 = -\mu_1 - \omega i, \quad \lambda_3 = -\mu_2, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = -\frac{1}{\sigma} \quad (6)$$

Общее решение уравнений (2) для интервала времени, в течение кото-

рого угол поворота кожуха гироскопа $\beta > 0$, можно представить так:

$$\begin{aligned} \beta &= D_1 e^{-\mu_1 t} \sin \omega t + D_2 e^{-\mu_1 t} \cos \omega t + D_3 e^{-\mu_2 t} + D_4 + \\ &\quad + a_{16} D_5 e^{-t/\sigma} + a_{17} S \\ \beta' &= (a_{21} D_1 + a_{22} D_2) e^{-\mu_1 t} \sin \omega t + (a_{23} D_1 + a_{24} D_2) e^{-\mu_1 t} \cos \omega t + \\ &\quad + a_{25} D_3 e^{-\mu_2 t} + a_{26} D_5 e^{-t/\sigma} + a_{17} S \\ \Omega &= (a_{31} D_1 + a_{32} D_2) e^{-\mu_1 t} \sin \omega t + (a_{33} D_1 + a_{34} D_2) e^{-\mu_1 t} \cos \omega t + \\ &\quad + a_{35} D_3 e^{-\mu_2 t} + a_{36} D_5 e^{-t/\sigma} \\ i &= (a_{41} D_1 + a_{42} D_2) e^{-\mu_1 t} \sin \omega t + (a_{43} D_1 + a_{44} D_2) e^{-\mu_1 t} \cos \omega t + \\ &\quad + a_{45} D_3 e^{-\mu_2 t} + a_{46} D_5 e^{-t/\sigma} + a_{47} S \\ I &= D_5 e^{-t/\sigma} + S \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь D_1, \dots, D_5 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий, а a_{ij} — некоторые постоянные коэффициенты.

Будем искать периодическое решение системы уравнений (2). Нетрудно показать, что решение будет симметричным.

Обозначая через ϑ^* половину периода искомого периодического решения, можно условия периодичности представить в виде

$$\begin{aligned} \beta(0) &= 0, & \beta(\vartheta^*) &= 0, & \beta'(\vartheta^*) &= -\beta'(0), \\ \Omega(\vartheta^*) &= -\Omega(0), & i(\vartheta^*) &= -i(0), & I(\vartheta^*) &= -I(0) \end{aligned} \tag{8}$$

Используя соотношения (7), найдем условия периодичности (8) в виде

$$\begin{aligned} D_2 + D_3 + D_4 + a_{16} D_5 &= 0 \\ \varepsilon_1 D_1 + \varepsilon_2 D_2 + \varepsilon_3 D_3 + D_4 + a_{16} \varepsilon_4 D_5 + a_{17} \vartheta^* S &= 0 \\ r_{21} D_1 + r_{22} D_2 + r_{25} D_3 + r_{26} D_5 + 2a_{17} S &= 0 \\ r_{31} D_1 + r_{32} D_2 + r_{35} D_3 + r_{36} D_5 &= 0 \\ r_{41} D_1 + r_{42} D_2 + r_{45} D_3 + r_{46} D_5 + 2a_{47} S &= 0 \\ (\varepsilon_4 + 1) D_5 + 2S &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь введены обозначения

$$\varepsilon_1 = e^{-\mu_1 \vartheta^*} \sin \omega \vartheta^*, \quad \varepsilon_2 = e^{-\mu_1 \vartheta^*} \cos \omega \vartheta^*, \quad \varepsilon_3 = e^{-\mu_2 \vartheta^*}, \quad \varepsilon_4 = e^{-\vartheta^*/\sigma} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} r_{\nu 1} &= a_{\nu 1} \varepsilon_1 + a_{\nu 3} (\varepsilon_2 + 1), & r_{\nu 5} &= a_{\nu 5} (\varepsilon_3 + 1) \\ r_{\nu 2} &= a_{\nu 2} \varepsilon_1 + a_{\nu 4} (\varepsilon_2 + 1), & r_{\nu 6} &= a_{\nu 6} (\varepsilon_4 + 1) \end{aligned} \quad (\nu = 2, 3, 4) \tag{11}$$

Система (9) может рассматриваться как система из шести линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 и S . Для того чтобы эта система имела решения, отличные от нуля, ее определитель должен быть равен нулю. Определитель системы (9) имеет вид:

$$g = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & a_{16} & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & 1 & a_{16} \varepsilon_4 & a_{17} \vartheta^* \\ r_{21} & r_{22} & r_{25} & 0 & r_{26} & 2a_{17} \\ r_{31} & r_{32} & r_{35} & 0 & r_{36} & 0 \\ r_{41} & r_{42} & r_{45} & 0 & r_{46} & 2a_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 + 1 & 2 \end{vmatrix} \tag{12}$$

Величина ϑ^* входит в выражение (12) явно, а также через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и ε_4 , заданные соотношениями (10). Заменяя ϑ^* некоторым текущим аргументом x , можно выражение (12) рассматривать как функцию этого аргумента: $g = g(x)$. Очевидно, что $x = \vartheta^*$ есть корень уравнения

$$g(x) = 0 \quad (13)$$

Каждому из корней уравнения (13) при фиксированном значении S соответствует единственная система значений величин D_1, D_2, D_3, D_4 и D_5 , определить которые можно из соотношений (9). Найденные значения D_1, \dots, D_5 подставляем в выражения (7). Соотношения (7) представляют собой интегралы уравнений (2) для интервала $0 \leq t \leq \vartheta^*$, в течение которого $\beta > 0$.

Умножая правые части этих соотношений на $\xi = -1$ и начиная счет времени вновь от нуля, получим интегралы уравнений (2) для интервала $0 \leq t \leq \vartheta^*$, в течение которого $\beta < 0$. Составленные выражения и представляют собой искомого периодическое решение, с периодом $T = 2\vartheta^*$.

Угол α поворота рамы можно найти квадратурой:

$$\alpha = \int \Omega dt + C \quad (14)$$

Постоянная интегрирования C определяется из условия периодичности

$$\alpha(0) = -\alpha(\vartheta^*) \quad (15)$$

2. Исследование устойчивости периодического движения. Определяя произвольные постоянные D_1, \dots, D_5 из начальных условий, можно интегралы (7) уравнений движения (2) на интервале времени, в течение которого $\beta > 0$, представить в виде

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0 + (b_{11}\beta'_0 + b_{12}\Omega_0 + b_{13}i_0 + b_{14}I_0 + b_{15})e^{-\mu_1 t} \sin \omega t + \\ &\quad + (b_{16}\beta'_0 + b_{17}\Omega_0 + b_{18}i_0 + b_{19}I_0 + b_{110})e^{-\mu_1 t} \cos \omega t + \\ &\quad + (b_{111}\beta'_0 + b_{112}\Omega_0 + b_{113}i_0 + b_{114}I_0 + b_{115})e^{-\mu_2 t} + \\ &\quad + (b_{116}I_0 + b_{117})e^{-t/\tau} + b_{118} + b_{119}t + b_{120}\beta'_0 + b_{121}\Omega_0 + b_{122}i_0 + b_{123}I_0 \\ \beta' &= (b_{21}\beta'_0 + b_{22}\Omega_0 + b_{23}i_0 + b_{24}I_0 + b_{25})e^{-\mu_1 t} \sin \omega t + \\ &\quad + (b_{26}\beta'_0 + b_{27}\Omega_0 + b_{28}i_0 + b_{29}I_0 + b_{210})e^{-\mu_1 t} \cos \omega t + \\ &\quad + (b_{211}\beta'_0 + b_{212}\Omega_0 + b_{213}i_0 + b_{214}I_0 + b_{215})e^{-\mu_2 t} + \\ &\quad + (b_{216}I_0 + b_{217})e^{-t/\tau} + b_{218} \\ \Omega &= (b_{31}\beta'_0 + b_{32}\Omega_0 + b_{33}i_0 + b_{34}I_0 + b_{35})e^{-\mu_1 t} \sin \omega t + \\ &\quad + (b_{36}\beta'_0 + b_{37}\Omega_0 + b_{38}i_0 + b_{39}I_0 + b_{310})e^{-\mu_1 t} \cos \omega t + \\ &\quad + (b_{311}\beta'_0 + b_{312}\Omega_0 + b_{313}i_0 + b_{314}I_0 + b_{315})e^{-\mu_2 t} + \\ &\quad + (b_{316}I_0 + b_{317})e^{-t/\tau} \\ i &= (b_{41}\beta'_0 + b_{42}\Omega_0 + b_{43}i_0 + b_{44}I_0 + b_{45})e^{-\mu_1 t} \sin \omega t + \\ &\quad + (b_{46}\beta'_0 + b_{47}\Omega_0 + b_{48}i_0 + b_{49}I_0 + b_{410})e^{-\mu_1 t} \cos \omega t + \\ &\quad + (b_{411}\beta'_0 + b_{412}\Omega_0 + b_{413}i_0 + b_{414}I_0 + b_{415})e^{-\mu_2 t} + \\ &\quad + (b_{416}I_0 + b_{417})e^{-t/\tau} + b_{418} \\ I &= (I_0 + b_{51})e^{-t/\tau} + b_{52} \end{aligned} \quad (16)$$

Выражения (16) определяют собой некоторую интегральную кривую (точнее, дугу этой кривой) уравнений (2).

Пусть β', Ω, i, I — координаты какой-либо точки пересечения интегральной кривой с гиперповерхностью $\beta=0$, а $T\beta', T\Omega, Ti, TI$ (где T — символ преобразования) — координаты следующей точки пересечения этой кривой с гиперповерхностью $\beta=0$, взятые с обратным знаком, что отвечает принятию для следующей точки пересечения обратного направления отсчета координат.

Обозначая через f_1, \dots, f_5 правые части уравнений (16) (в которых положено $\beta=0$), будем иметь уравнения точечного преобразования:

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(\beta', \Omega, i, I, \vartheta) \\ T\beta' &= -f_2(\beta', \Omega, i, I, \vartheta), & Ti &= -f_4(\beta', \Omega, i, I, \vartheta) \\ T\Omega &= -f_3(\beta', \Omega, i, I, \vartheta), & TI &= -f_5(\beta', \Omega, i, I, \vartheta) \end{aligned} \quad (17)$$

где ϑ — время прохождения от одной точки пересечения интегральной кривой с гиперповерхностью $\beta=0$ до следующей точки пересечения.

Соотношения (17), полученные при принятии условия об обращении направления отсчета координат, для каждой последующей точки пересечения позволяют учитывать точки пересечения интегральной кривой с гиперповерхностью $\beta=0$ через каждые ползавитка интегральной кривой, а не только через целый завиток, что значительно упрощает вычисления.

Обозначая через $\beta^*, \Omega^*, i^*, I^*$ — координаты точки пересечения замкнутой интегральной кривой, отвечающей периодическому движению, с гиперповерхностью $\beta=0$, а через ϑ^* — половину периода, будем иметь

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(\beta^*, \Omega^*, i^*, I^*, \vartheta^*) \\ \beta^* &= -f_2(\beta^*, \Omega^*, i^*, I^*, \vartheta^*), & i^* &= -f_4(\beta^*, \Omega^*, i^*, I^*, \vartheta^*) \\ \Omega^* &= -f_3(\beta^*, \Omega^*, i^*, I^*, \vartheta^*), & I^* &= -f_5(\beta^*, \Omega^*, i^*, I^*, \vartheta^*) \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим интегральную кривую, близкую к замкнутой. Координаты первой точки пересечения кривой с гиперповерхностью $\beta=0$ обозначим

$$\beta' = \beta^* + x_1, \quad \Omega = \Omega^* + x_2, \quad i = i^* + x_3, \quad I = I^* + x_4 \quad (19)$$

Время, в течение которого изображающая точка перемещается по интегральной кривой до новой встречи с гиперповерхностью $\beta=0$, обозначим

$$\vartheta = \vartheta^* + x_5 \quad (20)$$

Так как $T\beta^* = \beta^*$, $T\Omega^* = \Omega^*$ и т. д., то, раскладывая правые части уравнений (17) в ряды Тейлора и удерживая в них лишь члены первого порядка относительно x_j , а также учитывая соотношения (18), получим следующую систему уравнений в конечных разностях:

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 + c_{15}x_5 &= 0 \\ Tx_1 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 + c_{25}x_5 &= 0 \\ Tx_2 + c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4 + c_{35}x_5 &= 0 \\ Tx_3 + c_{41}x_1 + c_{42}x_2 + c_{43}x_3 + c_{44}x_4 + c_{45}x_5 &= 0 \\ Tx_4 + c_{51}x_1 + c_{52}x_2 + c_{53}x_3 + c_{54}x_4 + c_{55}x_5 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

где $(i=1, \dots, 5)$

$$c_{i1} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \beta'} \right)_0, \quad c_{i2} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \Omega} \right)_0, \quad c_{i3} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial i} \right)_0, \quad c_{i4} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial I} \right)_0, \quad c_{i5} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \vartheta} \right)_0 \quad (22)$$

Найденные из соотношений (22), (16) и (11) выражения для величин c_{ij} приводятся в табл. 1. Некоторые из c_{ij} выражены через вспомогательные величины h_{ij} , значения которых приведены в той же таблице.

Таблица 1

c_{11}	$\varepsilon_1 b_{11} + \varepsilon_2 b_{16} + \varepsilon_3 b_{111} + b_{120}$	c_{51}	0
c_{12}	$\varepsilon_1 b_{12} + \varepsilon_2 b_{17} + \varepsilon_3 b_{112} + b_{121}$	c_{52}	0
c_{13}	$\varepsilon_1 b_{13} + \varepsilon_2 b_{18} + \varepsilon_3 b_{113} + b_{122}$	c_{53}	0
c_{14}	$\varepsilon_1 b_{14} + \varepsilon_2 b_{19} + \varepsilon_3 b_{114} + \varepsilon_4 b_{116} + b_{123}$	c_{54}	ε_4
c_{15}	$(-\mu_1 \varepsilon_1 + \omega \varepsilon_2) h_{11} - (\mu_1 \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1) h_{12} -$ $-\mu_2 \varepsilon_3 h_{13} - \varepsilon_4 h_{14} / \sigma + b_{119}$	c_{55}	$-\varepsilon_4 h_{54} / \sigma$
c_{21}	$\varepsilon_1 b_{21} + \varepsilon_2 b_{26} + \varepsilon_3 b_{211}$	h_{11}	$b_{11} \beta'^* + b_{12} \Omega^* + b_{13} i^* + b_{14} l^* + b_{15}$
c_{22}	$\varepsilon_1 b_{22} + \varepsilon_2 b_{27} + \varepsilon_3 b_{212}$	h_{12}	$b_{16} \beta'^* + b_{17} \Omega^* + b_{18} i^* + b_{19} l^* + b_{110}$
c_{23}	$\varepsilon_1 b_{23} + \varepsilon_2 b_{28} + \varepsilon_3 b_{213}$	h_{13}	$b_{111} \beta'^* + b_{112} \Omega^* + b_{113} i^* + b_{114} l^* + b_{115}$
c_{24}	$\varepsilon_1 b_{24} + \varepsilon_2 b_{29} + \varepsilon_3 b_{214} + \varepsilon_4 b_{216}$	h_{14}	$b_{116} l^* + b_{117}$
c_{25}	$(-\mu_1 \varepsilon_1 + \omega \varepsilon_2) h_{21} - (\mu_1 \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1) h_{22} -$ $-\mu_2 \varepsilon_3 h_{23} - \varepsilon_4 h_{24} / \sigma$	h_{21}	$b_{21} \beta'^* + b_{22} \Omega^* + b_{23} i^* + b_{24} l^* + b_{25}$
c_{31}	$\varepsilon_1 b_{31} + \varepsilon_2 b_{36} + \varepsilon_3 b_{311}$	h_{22}	$b_{26} \beta'^* + b_{27} \Omega^* + b_{28} i^* + b_{29} l^* + b_{210}$
c_{32}	$\varepsilon_1 b_{32} + \varepsilon_2 b_{37} + \varepsilon_3 b_{312}$	h_{23}	$b_{211} \beta'^* + b_{212} \Omega^* + b_{213} i^* + b_{214} l^* + b_{215}$
c_{33}	$\varepsilon_1 b_{33} + \varepsilon_2 b_{38} + \varepsilon_3 b_{313}$	h_{24}	$b_{216} l^* + b_{217}$
c_{34}	$\varepsilon_1 b_{34} + \varepsilon_2 b_{39} + \varepsilon_3 b_{314} + \varepsilon_4 b_{316}$	h_{31}	$b_{31} \beta'^* + b_{32} \Omega^* + b_{33} i^* + b_{34} l^* + b_{35}$
c_{35}	$(-\mu_1 \varepsilon_1 + \omega \varepsilon_2) h_{31} - (\mu_1 \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1) h_{32} -$ $-\mu_2 \varepsilon_3 h_{33} - \varepsilon_4 h_{34} / \sigma$	h_{32}	$b_{36} \beta'^* + b_{37} \Omega^* + b_{38} i^* + b_{39} l^* + b_{310}$
c_{41}	$\varepsilon_1 b_{41} + \varepsilon_2 b_{46} + \varepsilon_3 b_{411}$	h_{33}	$b_{311} \beta'^* + b_{312} \Omega^* + b_{313} i^* + b_{314} l^* + b_{315}$
c_{42}	$\varepsilon_1 b_{42} + \varepsilon_2 b_{47} + \varepsilon_3 b_{412}$	h_{34}	$b_{316} l^* + b_{317}$
c_{43}	$\varepsilon_1 b_{43} + \varepsilon_2 b_{48} + \varepsilon_3 b_{413}$	h_{41}	$b_{41} \beta'^* + b_{42} \Omega^* + b_{43} i^* + b_{44} l^* + b_{45}$
c_{44}	$\varepsilon_1 b_{44} + \varepsilon_2 b_{49} + \varepsilon_3 b_{414} + \varepsilon_4 b_{416}$	h_{42}	$b_{46} \beta'^* + b_{47} \Omega^* + b_{48} i^* + b_{49} l^* + b_{410}$
c_{45}	$(-\mu_1 \varepsilon_1 + \omega \varepsilon_2) h_{41} - (\mu_1 \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1) h_{42} -$ $-\mu_2 \varepsilon_3 h_{43} - \varepsilon_4 h_{44} / \sigma$	h_{43}	$b_{411} \beta'^* + b_{412} \Omega^* + b_{413} i^* + b_{414} l^* + b_{415}$
		h_{44}	$b_{416} l^* + b_{417}$
		h_{54}	$l^* + b_{51}$

Из первого уравнения (21) можно выразить x_5 через x_1, \dots, x_4 . Подставляя это значение x_5 в остальные четыре уравнения, получим

$$\begin{aligned}
 T x_1 + k_{11} x_1 + k_{12} x_2 + k_{13} x_3 + k_{14} x_4 &= 0 \\
 T x_2 + k_{21} x_1 + k_{22} x_2 + k_{23} x_3 + k_{24} x_4 &= 0 \\
 T x_3 + k_{31} x_1 + k_{32} x_2 + k_{33} x_3 + k_{34} x_4 &= 0 \\
 T x_4 + k_{41} x_1 + k_{42} x_2 + k_{43} x_3 + k_{44} x_4 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned}
 k_{\nu 1} &= \frac{c_{\nu+1,1} c_{15} - c_{\nu+1,5} c_{11}}{c_{15}}, & k_{\nu 2} &= \frac{c_{\nu+1,2} c_{15} - c_{\nu+1,5} c_{12}}{c_{15}} \\
 k_{\nu 3} &= \frac{c_{\nu+1,3} c_{15} - c_{\nu+1,5} c_{13}}{c_{15}}, & k_{\nu 4} &= \frac{c_{\nu+1,4} c_{15} - c_{\nu+1,5} c_{14}}{c_{15}}
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Система уравнений в конечных разностях (23) имеет характеристическое уравнение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda + k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & \lambda + k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & \lambda + k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & \lambda + k_{44} \end{vmatrix} = 0
 \tag{25}$$

Для того чтобы величины x_1, \dots, x_5 убывали, т. е. рассматриваемое периодическое движение было устойчивым, модули корней уравнения (25) должны быть меньше единицы.

3. Пример. Рассмотрим гироскопический стабилизатор, параметры которого имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
 A &= 125 \text{ кгм сек}^2, & B &= 0.133 \text{ кгм сек}^2, & H &= 100 \text{ кгм сек} \\
 \tau &= 0.01 \text{ сек.}, & \sigma &= 0.13125 \text{ сек.}, & n &= 50 \text{ кгм сек} \\
 K &= 7.5 \frac{\text{кгм}}{\text{ампер}}, & p &= 40, & S &= 0.15 \text{ ампер}
 \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение (4) принимает следующий вид:

$$(\lambda^3 + 100\lambda^2 + 640\lambda + 60\,000)(\lambda + 7.61906)\lambda = 0$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = -\mu_1 + \omega i, \quad \lambda_2 = -\mu_1 - \omega i, \quad \lambda_3 = -\mu_2, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = -\frac{1}{c}$$

где

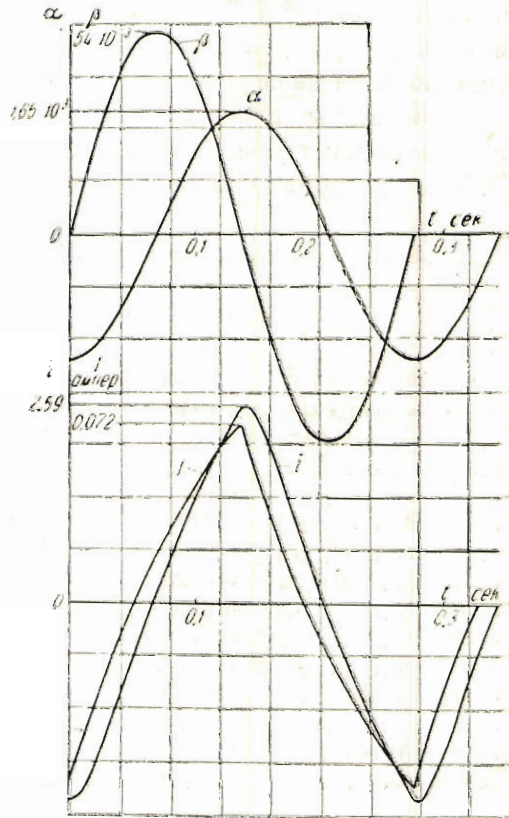
$$\mu_1 = 0.189315, \quad \omega = 24.5407, \quad \mu_2 = 99.6214, \quad \frac{1}{c} = 7.61906$$

Для рассматриваемого примера коэффициенты a_{ij} , входящие в общее решение (7) уравнений движения (2), принимают указанные ниже значения:

$$\begin{aligned}
 a_{16} &= +0.390582, & a_{24} &= +0.802944, \\
 a_{17} &= -3, & a_{35} &= -13.2326, \\
 a_{21} &= -0.189315, & a_{36} &= -0.0302311, \\
 a_{22} &= -24.5407, & a_{41} &= -5.07657, \\
 a_{23} &= +24.5407, & a_{42} &= -1.16520, \\
 a_{24} &= -0.189315, & a_{43} &= +1.16520, \\
 a_{25} &= -99.6214, & a_{44} &= -5.07657, \\
 a_{26} &= -2.97587, & a_{45} &= +23299.0, \\
 a_{31} &= +0.802944, & a_{46} &= +43.5171, \\
 a_{32} &= -0.0123891, & a_{47} &= +40, \\
 a_{33} &= +0.0123891, & & &
 \end{aligned}$$

При известных значениях a_{ij} можно построить согласно (12) функцию $g(x)$. Как показывают вычисления, функция $g(x)$ монотонно убывает. Значения $g(x)$, вычисленные согласно (12), приведены ниже:

x	$g(x)$
0.138220 00	634.77
0.138 254 00	210.65
0.138 269 77	2.62
0.138 269 94	0
0.138 270 90	-15.07
0.138 400 00	-2751



Фиг. 1

Значения $\theta^* = 0.138\,269\,94$ сек. и является половиной периода искомого периодического решения. Подставляя в уравнения (9) найденное значение

θ^* и полагая согласно заданным параметрам $S = 0.15$ ампер, найдем

$$D_1 = +0.0417756, \quad D_2 = -0.00813766, \quad D_3 = +0.0000429589, \\ D_4 = +0.0949732, \quad D_5 = -0.222433$$

Подставляя найденные значения D_1, \dots, D_5 в уравнения (7) и учитывая соотношения (14) и (15), получим искомое периодическое решение в виде:

$$\beta = 0.0417756e^{-\mu_1 t} \sin \omega t - 0.00813766e^{-\mu_1 t} \cos \omega t + 0.0000429589e^{-\mu_2 t} - \\ - 0.0868785e^{-t/\tau} - 0.45t + 0.0949732$$

$$\beta' = 0.191795e^{-\mu_1 t} \sin \omega t + 1.02674e^{-\mu_1 t} \cos \omega t - 0.00427963e^{-\mu_2 t} + \\ + 0.661932e^{-t/\tau} - 0.45$$

$$\Omega = 0.0336443e^{-\mu_1 t} \sin \omega t - 0.00601652e^{-\mu_1 t} \cos \omega t - 0.000568456e^{-\mu_2 t} + \\ + 0.00672439e^{-t/\tau}$$

$$i = 0.202595e^{-\mu_1 t} \sin \omega t + 0.0899883e^{-\mu_1 t} \cos \omega t + 1.000901e^{-\mu_2 t} - \\ - 9.67965e^{-t/\tau} + 6.0$$

$$I = -0.222433e^{-t/\tau} + 0.15$$

$$\alpha = -0.000255726e^{-\mu_1 t} \sin \omega t - 0.00136899e^{-\mu_1 t} \cos \omega t + \\ + 0.00000570617e^{-\mu_2 t} - 0.000882576e^{-t/\tau} + 0.0006$$

Это решение имеет место на интервале $0 < t \leq \theta^* = 0.13826994$ сек., в течение которого $\beta > 0$. На втором интервале, в течение которого $\beta < 0$, правые части приведенных выражений должны быть умножены на $\xi = -1$, а счет времени вновь начат от нуля. Этот интервал также имеет длину θ^* .

Координаты точек замкнутой интегральной кривой, соответствующей периодическому решению, т. е. значения переменных $\alpha, \beta, \Omega, \beta', i, I$, вычисленные по приведенным здесь формулам, приведены в табл. 2.

Таблица 2

t сек.	α	β	Ω	β'	i	I
0	-0.00164586	0.0600000	0.060139416	1.234394	-2.58876	-0.0724334
0.01	-0.00160319	0.012253	0.00895440	1.202396	-2.56194	-0.0564153
0.02	-0.00147495	0.028462	0.0162083	1.109964	-2.19112	-0.0409947
0.03	-0.00128139	0.0342459	0.0233526	0.961042	-1.72037	-0.0264832
0.04	-0.00101659	0.0429014	0.0295903	0.762444	-1.23572	-0.0139996
0.05	-0.000698489	0.0493613	0.0351591	0.523867	-0.715264	-0.00196855
0.06	-0.000342265	0.0532855	0.04067751	0.257449	-0.316150	0.00917994
0.07	0.000030554	0.0544637	0.0376573	-0.0229156	0.111628	0.015405
0.08	0.000403206	0.0528201	0.0315409	-0.202404	0.529119	0.0290832
0.09	0.000754907	0.0484683	0.0334817	-0.566181	0.911506	0.0371538
0.10	0.00106193	0.0410661	0.0281524	-0.800115	1.28742	0.0461726
0.11	0.00132215	0.0326045	0.0223327	-0.992214	1.64869	0.1537903
0.12	0.00150183	0.0219350	0.0148911	-1.132375	1.99540	0.0608483
0.13	0.00161848	0.0101520	0.00676293	-1.213860	2.32691	0.0672885
θ^*	0.00164586	0.0000000	-0.000139414	-1.224394	2.58875	0.0724332

В этой таблице α и β выражены в радианах, а I и i — в амперах.

Графики функций $\alpha(t), \beta(t), I(t), i(t)$, построенные согласно табл. 2, и траектория вершины гироскопа изображены на фиг. 1 и 2.

Таблица 3

b_{11}	0.0407347	b_{21}	0.00859503	b_{31}	0.0327159	b_{41}	-0.206018	b_{51}	-0.15
b_{12}	0.0107440	b_{22}	-30.6712	b_{32}	-0.00685616	b_{42}	-1.510727	b_{52}	0.15
b_{13}	0.000180274	b_{23}	-0.0173828	b_{33}	0.000135992	b_{43}	-0.00173889		
b_{14}	0.113701	b_{24}	-0.145197	b_{34}	0.0912331	b_{44}	-0.583083		
b_{15}	0.000193829	b_{25}	0.129944	b_{35}	0.000224253	b_{45}	0.00518755		
b_{16}	-0.000664478	b_{26}	0.999783	b_{36}	-0.0000288717	b_{46}	0.0508374		
b_{17}	1.249729	b_{27}	0.0270734	b_{37}	1.005596	b_{47}	-6.33482		
b_{18}	0.000706925	b_{28}	0.00429022	b_{38}	0.000569863	b_{48}	-0.00337875		
b_{19}	0.00503948	b_{29}	2.78934	b_{39}	0.00545507	b_{49}	0.106901		
b_{110}	-0.00529655	b_{210}	0.00575941	b_{310}	-0.00425043	b_{410}	0.0271142		
b_{111}	-0.0000218186	b_{211}	0.00021736	b_{311}	0.0000288716	b_{411}	-0.0508253		
b_{112}	0.000271763	b_{212}	-0.0270734	b_{312}	-0.00559612	b_{412}	6.33482		
b_{113}	0.0000420652	b_{213}	-0.00429021	b_{313}	-0.000569863	b_{413}	1.00328		
b_{114}	-0.00187255	b_{214}	0.180526	b_{314}	0.024776	b_{414}	-43.6240		
b_{115}	0.0000214797	b_{215}	-0.00215984	b_{315}	-0.000284231	b_{415}	0.500456		
b_{116}	0.390582	b_{216}	-2.97587	b_{316}	-0.0302311	b_{416}	43.5171		
b_{117}	-0.0585874	b_{217}	0.446380	b_{317}	0.00453466	b_{417}	-6.52757		
b_{118}	0.0638624	b_{218}	-0.45			b_{418}	6.0		
b_{119}	-0.45								
b_{120}	0.000666659								
b_{121}	-1.250001								
b_{122}	-0.000750001								
b_{123}	-0.593749								

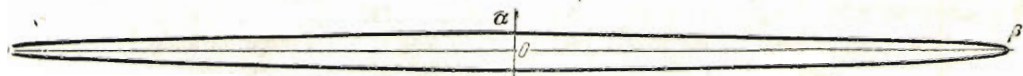
Таблица 4

$\beta' *$	1.224394	c_{11}	-0.0058703	k_{11}	-0.946079
$\Omega *$	0.000139416	c_{12}	-2.43169	k_{12}	7.20804
$i *$	-2.58876	c_{13}	-0.0014070	k_{13}	0.0000449122
$I *$	-0.0724331	c_{14}	-0.289880	k_{14}	-3.05875
ε_1	-0.242560	c_{15}	-1.234394	k_{21}	-0.00211923
ε_2	-0.943471	c_{21}	-0.945351	k_{22}	0.694165
ε_3	0.00000104272	c_{22}	7.41406	k_{23}	0.000444120
ε_4	0.248720	c_{23}	0.00016867	k_{24}	0.157609
h_{11}	0.0417756	c_{24}	-3.634187	k_{31}	-0.213302
h_{12}	-0.00813705	c_{25}	0.104584	k_{32}	-54.6317
h_{13}	0.000042066	c_{31}	-0.00790833	k_{33}	-0.0330149
h_{14}	-0.0868784	c_{32}	-0.945201	k_{34}	7.94747
h_{21}	0.191795	c_{33}	-0.000570636	k_{41}	-0.00411118
h_{22}	1.026746	c_{34}	-0.0378184	k_{42}	-1.164213
h_{23}	-0.00427961	c_{35}	-0.832188	k_{43}	-0.000099335
h_{24}	0.661931	c_{41}	0.00200807	k_{44}	0.209935
h_{31}	0.0336442	c_{42}	6.34032		
h_{32}	-0.00601652	c_{43}	0.00361059		
h_{33}	-0.000568457	c_{44}	15.2159		
h_{34}	0.0067240	c_{45}	30.9511		
h_{41}	-0.202593	c_{51}	0		
h_{42}	0.0899883	c_{52}	0		
h_{43}	1.000903	c_{53}	0		
h_{44}	-9.67905	c_{54}	0.248720		
h_{54}	-0.222433	c_{55}	0.590987		

Для исследования устойчивости найденного периодического решения необходимо представить интегралы уравнений движения (2) в виде (16).

Входящие в уравнения (16) коэффициенты b_{ij} , приведены в табл. 3.

Согласно формулам из табл. 1 вычислены значения коэффициентов h_{ij} , c_{ij} и k_{ij} . Они приведены в табл. 4. Там же приведены значения коэффициентов ε_j , а также координаты точек пересечения замкнутой интегральной



Фиг. 2

кривой с гиперповерхностью $\beta = 0$. При значениях коэффициентов h_{ij} , приведенных в табл. 4, раскрывая определитель (25), получим характеристическое уравнение системы уравнений в конечных разностях (23) в виде

$$\lambda^4 - 0.0749939\lambda^3 - 0.496319\lambda^2 - 0.332073\lambda - 0.000\,000\,348 = 0$$

Это уравнение имеет следующие корни:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.956\,652, & \lambda_2 &= -0.440\,829 + 0.390\,883i \\ \lambda_3 &= -0.000\,001\,048 & \lambda_4 &= -0.440\,829 - 0.390\,883i \end{aligned}$$

Модуль комплексных корней $|\lambda_3| = |\lambda_4| = 0.589168$

Как видно из приведенных данных, модули всех корней характеристического уравнения (25) меньше единицы и рассматриваемое периодическое движение устойчиво, т. е. является автоколебательным движением.

Поступило в редакцию
6 I 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

J. N. ROITENBERG. —AUTO-OSCILLATIONS OF GYROSCOPIC STABILIZERS

The paper treats the motion of a gyroscopic stabilizer connected with a motor whose function is to overcome the action of external forces on the object to be stabilized. The current feeding the motor is regulated by an amplifier. The author considers the case when the characteristic of the voltage fed into the amplifier is determined by function $S \operatorname{sign} \beta$, where β is the angle of turning of the gyroscope about the axis of its box. The periodic solution of the equations of motion is obtained, and it is shown that this solution is stable. The gyroscopic stabilizer in this case therefore describes auto-oscillations. The results of the numerical examples are given in tables 2, 3 and 4, and in the graphs in fig. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fieux J. Dispositif stabilisateur pour le pointage continu en hauteur d'appareils de bord. Французский патент № 736249. 12. VIII 1931; немецкий патент № 595448. 26.VI 1932.
2. Kreiselstabilisatoren auf schwankenden Trägern. Немецкий патент № 609433. 24.I 1935.
3. Булганов Б. В. Некоторые задачи теории регулирования с нелинейными характеристиками. ПММ. 1946, т. X. Вып. 3.
4. Андронов А. А. и Баути Н. Н. Движение нейтрального самолета, снабженного автопилотом, и теория точечных преобразований поверхностей. Доклады Академии Наук СССР. 1944. Т. XLIV. № 5.