Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА В ТЕОРИИ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ

Д. И. Шерман

(Москва)

Основным задачам теории потенциала для установившихся колебаний посвящено значительное количество работ. В них эти задачи преимущественно рассматриваются для односвязной области методами вариационного исчисления или интегральных уравнений. [1,2]

В настоящей статье мы рассмотрим общий случай многосвязной области и сведем каждую из задач к уравнению Фредгольма (несколько отличающемуся от известного для нее интегрального уравнения), которое позволит непосредственно установить существование решения.

§ 1. Обозначим через S многосвязную конечную область, расположенную в плоскости $z=x+iy$. Пусть она ограничена контуром L, состоящим из совокупности $m+1$ простых замкнутых кривых $L_j\,(j=0, 1, \ldots, m)$, не пересекающихся и не касающихся друг друга и имеющих в каждой точке непрерывно изменяющуюся касательную; при этом кривую L_0 будем считать внешней границей области S, содержащей внутри себя кривые $L_j\,(j=1, \ldots, m)$.

Обход полной границы L условимся считать происходящим в положительном направлении относительно области S и за положительное направление нормали n к S примем направление изнутри S наружу.

Назовем $S_j\,(j=0, 1, \ldots, m)$ односвязные области, ограниченные кривыми $L_j\,(j=0, 1, \ldots, m)$; очевидно, из них область S_0 будет бесконечной. Пусть $z_j=x_j+iy_j$ — аффиксы некоторых произвольно фиксированных точек, лежащих в областях $S_j\,(j=1, \ldots, m)$.

Как известно, задача Дирихле заключается в определении функции $u(x, y)$, непрерывной в замкнутой области S, имеющей в области S непрерывные частные производные второго порядка по координатам x и y и удовлетворяющей в ней уравнению

$$\triangle u+\lambda^2 u=0 \tag{1.1}$$

при условии на контуре L

$$u=f(s) \tag{1.2}$$

где $\triangle$ — оператор Лапласа, λ — некоторый вещественный параметр и $f(s)$ — заданная непрерывная функция дуги s.

Функцию $u(x, y)$ будем искать в виде

$$u(x, y)=\int_L \nu(s)\frac{dN(\lambda r)}{dn}\,ds+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j N(\lambda r_j) \tag{1.3}$$

Здесь плотность $\nu(s)$ — новая неизвестная, подлежащая определению,

$M(\xi, \eta)$ — точка границы (соответствующая дуге s) и n — нормаль в ней к L, направленная, как указано выше функция $N(\lambda r)$ определена формулой

$$N(\lambda r) = N_0(\lambda r) - \frac{1}{\pi}\left(C + \log\frac{\lambda}{2}\right) J_0(\lambda r) \tag{1.4}$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \qquad r_j = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}$$

где $J_0(\lambda r)$ — функция Бесселя первого рода и нулевого порядка, C — так называемая постоянная Эйлера; далее, функция

$$N_0(\lambda r) = \frac{1}{\pi}\left(\log\frac{\lambda r}{2} + C\right) J_0(\lambda r) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{2k}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m} \tag{1.5}$$

и отличается от обычной функции Неймана лишь наличием дополнительного множителя, равного $\frac{1}{2}$. Наконец, α_j — функционалы, равные

$$\alpha_j = \frac{1}{\pi}\int_{L_j} \nu(s)\, ds \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{1.6}$$

Ясно, что любая функция $u(x, y)$, взятая в форме (1.3), удовлетворяет уравнению (1.1). Устремляя в равенстве (1.3) точку $M(x, y)$ к некоторой точке $M(\xi_0, \eta_0)$, лежащей на L (и имеющей значение дуги s_0), и учитывая предельное условие (1.2), получим для определения плотности $\nu(s)$ уравнение Фредгольма

$$\nu(s_0) + \int_L \nu(s)\, K(s, s_0, \lambda)\, ds = f(s_0) \tag{1.7}$$

где

$$K(s, s_0; \lambda) = \frac{dN(\lambda r_0)}{dn} + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j N(\lambda r_{0j}) \tag{1.8}$$

$$r_0 = \sqrt{(\xi-\xi_0)^2 + (\eta-\eta_0)^2}, \qquad r_{0j} = \sqrt{(\xi_0-x_j)^2 + (\eta_0-y_j)^2}$$

Здесь $\varepsilon_j = 1$, если точка с аффиксом $t = \xi + i\eta$ лежит на кривой L_j, и $\varepsilon_j = 0$, если эта точка лежит на любой из остальных кривых L_k $(j = 1, \ldots, m;\ k \neq j)$.

Рассмотрим соответствующее (1.7) однородное интегральное уравнение при $\lambda = 0$. Оно, как нетрудно видеть, имеет вид

$$\nu^*(s) + \frac{1}{\pi}\int_L \nu^*(s)\, \frac{d\log r_0}{dn}\, ds + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^* \log r_{0j} = 0 \tag{1.9}$$

где $\nu^*(s)$ — некоторое его решение и α_j^* определяются формулой (1.6), в которой плотность $\nu(s)$ заменена через $\nu^*(s)$. Функция

$$u^*(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_L \nu^*(s)\, \frac{d\log r}{dn}\, ds + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^* \log r_j \tag{1.10}$$

гармоническая в области S, в силу (1.9) равна в ней тождественно нулю. Учитывая при этом, что нормальная производная потенциала двойного слоя изменяется непрерывно при переходе через границу области, будем иметь

$$\frac{du^*}{dn_e} = 0 \qquad \text{на } L_j \ (j = 0, 1, \ldots, m) \tag{1.11}$$

где индекс e указывает, что производная берется извне области S.

Умножив обе части формулы (1.11) на ds и проинтегрировав по каждой из кривых L_j, получим $\alpha_j^* = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. После этого найдем, что $\nu^*(s) = 0$.

Таким образом, резольвента ядра $K(s, s_0; \lambda)$ существует при $\lambda = 0$. Отсюда, имея в виду, что ядро $K(s, s_0; \lambda)$ является целой функцией параметра λ, заключаем, что его резольвента существует для всех значений λ, за исключением, быть может, некоторого дискретного их ряда.

Примечание. Предположим, что область S бесконечна[1] и ограничена контуром $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_m$ (кривую L_0 можно считать удаленной в бесконечность). В этом случае функцию $u(x, y)$ следует взять в форме отличающей от (1.3) наличием слагаемого $\alpha_0 J_0(\lambda \sqrt{x^2 + y^2})$, где α_0 согласно (1.6), а под знаком суммы в (1.3) функционал α_m нужно взять равным $\alpha_m = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m-1})$. Отметим, что при этом, как ясно из (1.3), функция $u(x, y)$ будет удовлетворять принципу излучения Зоммерфельда.

§ 2. Перейдем к задаче Неймана. При наличии уравнения (1.1) будем иметь вместо (1.2) условие на границе L

$$\frac{du}{dn} = f(s) \tag{2.1}$$

где $f(s)$, как прежде, заданная непрерывная функция дуги s и нормальная производная берется изнутри области. Последнюю будем считать конечной и многосвязной; этот случай представляет здесь наибольший интерес. Искомую функцию возьмем в виде

$$u(x, y) = \int_L \nu(s) N(\lambda r) ds \tag{2.2}$$

Тогда на основании (2.1) получим для определения плотности $\nu(s)$ интегральное уравнение

$$-\nu(s_0) + \int_L \nu(s) \frac{dN(\lambda r_0)}{dn_0} ds = f(s_0) \tag{2.3}$$

где n_0 — нормаль к L в точке $M(\xi_0, \eta_0)$.

Положив в (2.3) параметр $\lambda = 0$, будем иметь

$$-\nu(s_0) + \int_L \nu(s) \frac{d \log r_0}{dn_0} ds = f(s_0) \tag{2.4}$$

К этому уравнению обычно сводится задача Неймана для гармонической функции. Как известно, оно разрешимо лишь при условии

$$\int_L f(s) ds = 0 \tag{2.5}$$

Отсюда ясно, что резольвента ядра уравнения (2.3), если таковая существует, имеет полюс в точке $\lambda = 0$. Поэтому рассуждения, позволившие легко установить существование резольвенты ядра уравнения (1.7) для задачи Дирихле, в данном случае неприменимы[2].

---

[1] Задачи Дирихле и Неймана для случая бесконечной области рассмотрены В. Д. Купрадзе [3] И. Н. Векуа [4].

[2] Отметим, что в рассматриваемой нами задаче условие (2.5), вообще говоря, не имеет места. Однако выполнение этого условия (и, следовательно, разрешимость уравнения (2.4)), разумеется, не дает еще основания сделать заключение о существовании резольвенты ядра уравнения (2.3) при значениях $\lambda \neq 0$.

Для того чтобы доказать существование резольвенты ядра уравнения (2.3), поступим следующим образом.

Пусть $\omega(s)$—нетривиальное решение соответствующего (2.4) однородного уравнения (при $f(s)=0$). Тогда в области S

$$\int_L \omega(s)\log r\,ds = C^* \tag{2.6}$$

где C^* — некоторая постоянная. Для удобства положим $C^*=l^2/S$, где l — длина контура L, а S — площадь области того же наименования.

Нетрудно видеть, что C^* отлична от нуля. В самом деле, допустим противное. В этом случае

$$\int_L \omega(s)\log r\,ds = 0 \qquad \text{в областях } S_j\ (j=1,\ldots,m)$$

Отсюда следует, что $\omega(s)=0$ на $L_j\ (j=1,\ldots,m)$. Далее, предполагая начало координат лежащим в области S, получим на кривой L_0

$$\chi(t)+\overline{\chi(t)} = -2\alpha_0(\log t+\log\bar t)$$

где t — аффикс точки L_0 и

$$\chi(z)=\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\omega(s)\log\left(1-\frac{t}{z}\right)ds$$

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{v}\omega(s)\,ds$$

причем функция $\chi(z)$ регулярна в S_0 и обращается в нуль на бесконечности. Введем функцию

$$z=\delta(\zeta)=c_1\zeta+c_0+\frac{c_{-1}}{\zeta}+\ldots$$

конформно отображающую внешность единичной окружности γ в плоскости ζ на область S_0. Тогда, обозначая через τ аффикс точки этой окружности, будем иметь на ней

$$\varphi(\tau)+\varphi(\tau)=\alpha_0\log c_1\bar c_1 \tag{2.7}$$

где функция

$$\varphi(\zeta)=\chi\{\delta(\zeta)\}+\alpha_0\log\frac{\delta(\zeta)}{c_1\zeta}$$

регулярна во внешности γ и обращается в нуль на бесконечности. Отсюда найдем, что $\varphi(\zeta)=0$, $\alpha_0=0$ и, следовательно, в области S_0

$$\int_{L_0}\omega(s)\log r\,ds=0$$

Из последнего уравнения вытекает, что $\omega(s)=0$ также на кривой L_0. Таким образом, мы пришли к заключению, что $\omega(s)=0$ на всем контуре L, а это по условию невозможно. Поэтому следует считать $C^*\neq 0$.

Возвращаясь к уравнению (2.3), будем искать плотность $\nu(s)$ в окрестности точки $\lambda=0$ в виде

$$\nu(s)=\sum_{k=-1}^{\infty}\lambda^{2k}\nu_k(s) \tag{2.8}$$

где $\nu_k(s)$ — новые неизвестные. Подставив это выражение для $\nu(s)$ в уравнение (2.3) и расположив его левую часть по степеням λ, получим после некоторых преобразований для определения $\nu_k(s)$ рекуррентную систему

$$-\nu_{-1}(s_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \nu_{-1}(s)\frac{d\log r_0}{dn_0}ds=0 \qquad (2.9)$$

$$-\nu_n(s_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \nu_n(s)\frac{d\log r_0}{dn_0}ds=f_n(s_0) \qquad (n=0,1,\ldots,\infty)$$

Здесь введены обозначения

$$f_0(s_0)=f(s_0)-\frac{a_1}{\pi}\int_L \nu_{-1}\frac{d\{r_0^2(\log r_0-1)\}}{dn_0}ds, \quad a_n=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$f_n(s_0)=-\sum_{k=-1}^{n-1}\frac{a_{n-k}}{\pi}\int_L \nu_k(s)\frac{d\{r_0^{2(n-k)}(\log r_0-b_{n-k})\}}{dn_0}ds, \quad b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \qquad (2.10)$$

Из равенств (2.9) найдем последовательно все $\nu_k(s)$ в форме

$$\nu_n(s)=\mu_n(s)+C_n\omega(s) \qquad (n=-1,0,1,\ldots,\infty) \qquad (2.11)$$

где $\mu_n(s)$ — некоторые функции, из них $\mu_{-1}(s)=0$, а C_n — постоянные. Последние определяются из условий (2.5), которым должны удовлетворять $f_n(s)$ для того, чтобы каждое из уравнений (2.9) было разрешимо относительно соответствующей неизвестной $\nu_n(s)$. Отсюда, принимая во внимание равенство

$$\int_L \frac{d\{r_0^2(\log r_0-1)\}}{dn_0}ds_0=4\iint_S \log r_0\,dS$$

и соотношение (2.5) (при выбранном значении C^*), получим

$$C_{-1}=-\frac{1}{l^2}\int_L f(s)\,ds$$

$$C_n=-\frac{1}{\pi l^2}\left[a_1\int_L \mu_n(s)\,ds\int_L \frac{d\{r_0^2(\log r_0-1)\}}{dn_0}ds_0+\right. \qquad (2.12)$$

$$\left.+\int_L\left\{\sum_{k=-1}^{n-1}a_{n-k+1}\int_L \nu_k(s)\frac{d\{r_0^{2(n-k+1)}(\log r_0-b_{n-k+1})\}}{dn_0}ds\right\}ds_0\right] \quad (n=0,1,\ldots,\infty)$$

При этих значениях C_n будем иметь

$$\mu_n(s)=f_n(s_0)+\int_L f_n(s)D(s,s_0)\,ds \qquad (n=0,1,\ldots,\infty) \qquad (2.13)$$

где функцию $D(s, s_0)$ можно, например, взять равной первому слагаемому правильной части резольвенты ядра в уравнении, отличающемся от (2.4) наличием параметра ε в качестве множителя перед знаком интеграла при ее разложении в ряд Лорана в окрестности $\varepsilon=1$. Положим на L

$$\left|\frac{1}{\pi}r_0\frac{d\log r_0}{dn_0}\right|<A, \qquad \left|\frac{1}{\pi}\log r_0\frac{dr_0}{dn_0}\right|<A, \qquad \left|\frac{1}{\pi}\frac{dr_0}{dn_0}\right|<\frac{A}{2}$$

$$|\omega(s)|<B, \qquad |f(s)|<2M, \qquad r_0<\rho, \qquad 1+AB\rho<\frac{\sqrt{K}}{2} \qquad (2.14)$$

где A, B, K, M и ρ — некоторые фиксированные положительные числа ($K>1$), и примем $B>l$.

Так как, очевидно, $b_n < n$, то имеем

$$\left|\frac{1}{\pi}\frac{d\{r_0^{2k}(\log r_0 - b_k)\}}{dn_0}\right| \leqslant r_0^{2k-1}\left\{2k\left(\left|\frac{1}{\pi}\log r_0\frac{dr_0}{dn_0}\right| + b_k\left|\frac{1}{\pi}\frac{dr_0}{dn_0}\right|\right)+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{1}{\pi}r_0\frac{d\log r_0}{dn_0}\right|\right\} < A(k+1)^2\rho^{2k-1} \tag{2.15}$$

Введем (при выбранных A, B, K, M и ρ) новую фиксированную постоянную N из условий

$$|D(s, s_0)| < \frac{N-1}{l}, \qquad \frac{\rho^2}{l} < \frac{N\sqrt{K}}{2B} \tag{2.16}$$

Из второго из этих неравенств в силу $B > l$ вытекает, что

$$N > \frac{2\rho^2}{\sqrt{K}} \tag{2.17}$$

На основании первого из уравнений (2.12) имеем $|C_{-1}| < 2M / l$; затем учитывая (2.14) и (2.15), получим

$$|f_0(s)| \leqslant |f(s)| + \frac{|a_1|}{\pi}\int\limits_L |\nu_{-1}(s)|\left|\frac{d\{r_0^2(\log r_0 - 1)\}}{dn_0}\right| ds <$$

$$< (2M + 2^2|a_1|AB|C_{-1}|\rho l) < 2M(1 + AB\rho) < M\sqrt{K}$$

и отсюда из (2.13) найдем

$$|\mu_0(s)| < MN\sqrt{K} \tag{2.18}$$

Далее, из (2.12) при $n = 0$ имеем

$$|C_0| \leqslant \frac{1}{\pi l^2}\left[\int\limits_L\left\{\int\limits_L |a_1||\mu_0(s)|\left|\frac{d\{r_0^2(\log r_0 - 1)\}}{dn_0}\right| +\right.\right.$$

$$\left.\left.+|a_2||\nu_{-1}(s)|\left|\frac{d\{r_0^4(\log r_0 - b_2)\}}{dn_0}\right|\Big)\, ds\right\} ds_0\right] <$$

$$< M\left(2^2|a_1|N\sqrt{K}A\rho + 2.3^2|a_2|BA\rho\frac{\rho^2}{l}\right)$$

или в силу

$$A\rho < \sqrt{K} / 2B \tag{2.19}$$

вытекающего из последнего из соотношений (2.14)] и второго из неравенств (2.16)

$$|C_0| < \frac{MNK}{2B}(2^2|a_1| + 3^2|a_2|) < \frac{MNK}{B} \tag{2.20}$$

После этого из (2.11) при $n = 0$ получим

$$|\nu_0(s)| = |C_0\omega(s) + \mu_0(s)| \leqslant |C_0||\omega(s)| + |\mu_0(s)| <$$

$$< MNK(1 + 1 / \sqrt{K}) < MD, \qquad D = 2NK \tag{2.21}$$

Допустим теперь, что

$$|\nu_k(s)| < MD^{k+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{2.22}$$

и докажем, что это неравенство будет выполняться также при $k = n + 1$.

В самом деле, на основании (2.10) и соотношений (2.14) имеем

$$|f_{n+1}(s)| < M\sum_{k=0}^{n}(n-k+2)^2|a_{n-k+1}|D^{k+1}A\rho^{2(n-k)+1}l+$$
$$+2(n+3)^2|a_{n+2}|MAB\rho^{2n+3}$$

Учитывая затем еще (2.16), (2.17), (2.19) и вытекающее из них (при $B>l$) неравенства

$$\rho^2<\frac{D}{4\sqrt{K}},\qquad\qquad A\rho l<\frac{\sqrt{K}}{2}$$

получим

$$f_{n+1}(s)<\frac{1}{2}M\sqrt{K}D^{n+1}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k+2)^2|a_{n-k+1}|}{(4\sqrt{K})^{n-k}}+\frac{(n+3)^2|a_{n+2}|}{2^{n+1}\sqrt{K^{n+1}}}\right\}<$$
$$<\frac{1}{2}M\sqrt{K}D^{n+1}\sum_{k=-1}^{n}(n-k+2)^2|a_{n-k+1}|=\frac{1}{2}M\sqrt{K}D^{n+1}\sum_{k=1}^{n+2}\frac{(k+1)^2}{2^{2k}(k!)^2}$$

или, так как $2^{-k}k\,(k=3,\ldots,\infty)$ убывает с увеличением k, то

$$f_{n+1}(s)<\frac{1}{2}M\sqrt{K}D^{n+1}\left(1+\frac{9}{8}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}(k!)^2}\right)<$$
$$<\frac{1}{2}M\sqrt{K}D^{n+1}\left(1+\frac{9}{32}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)<M\sqrt{K}D^{n+1} \tag{2.23}$$

Имея в виду это соотношение, из (2.13) получим

$$|\mu_{n+1}(s)|<MN\sqrt{K}D^{n+1} \tag{2.24}$$

Переходя теперь к оценке выражения (2.12) для C_{n+1}, последовательно находим

$$|C_{n+1}|<2^2|a_1|MD^{n+1}N\sqrt{K}A\rho+\sum_{k=0}^{n}(n-k+3)^2|a_{n-k+2}|MD^{k+1}\rho^{2(n-k)+3}+$$
$$+2(n+4)^2|a_{n+3}|MBA\rho\frac{\rho^2}{l}\rho^{2(n+1)}<\frac{MNK}{2B}D^{n+1}\left[2^2|a_1|+\frac{(n+4)^2|a_{n+3}|}{2^{2n+2}\sqrt{K^{n+1}}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k+3)^2|a_{n-k+2}|}{2^{2(n-k)+1}\sqrt{K^{n-k}}}\right]<\frac{MNK}{2B}D^{n+1}\sum_{k=-1}^{n+1}(n-k+3)^2|a_{n-k+2}|<$$
$$<\frac{MNK}{B}D^{n+1} \tag{2.25}$$

Из двух же предпоследних соотношений имеем

$$|\nu_{n+1}(s)|\leqslant|C_{n+1}||\omega(s)|+|\mu_{n+1}(s)|<MNKD^{n+1}(1+1/\sqrt{K})<MD^{n+2}$$

что доказывает требуемое.

Из сказанного ясно, что ряд

$$\sum_{k=-1}^{\infty}a_k\lambda^{2k},\qquad\left(a_{-1}=\frac{2MB}{l},\quad a_n=MD^{n+1}\quad(n=0,1,\ldots,\infty)\right)$$

сходящийся на плоскости λ в кольце $0<\lambda<D^{-\frac{1}{2}}$, является мажорантным

по отношению к (2.8). Следовательно, для всех точек λ, принадлежащих этому кольцу, уравнение (2.3) имеет решение при любом значении $f(s)$. Отсюда заключаем, что резольвента ядра уравнения (2.3) существует почти для всех точек в произвольной, выделенной на плоскости λ конечной области.

Примечание 1. В том случае, когда область S бесконечная, уравнение (2.4), как известно, всегда имеет единственное решение.

Это дает возможность (аналогично тому, как в предыдущем параграфе) сразу заключить о существовании резольвенты ядра уравнения (2.3) почти для всех значений λ.

Примечание 2. Считая область S попрежнему конечной и многосвязной, допустим, что какое-либо из уравнений (1.7) и (2.3) неразрешимо при некоторых λ, не совпадающих с собственными значениями соответствующей задачи. Тогда для этих исключительных значений параметра может быть все же с помощью соответствующего из введенных потенциалов (1.3) и (2.2) построено требуемое решение. Поясним сказанное на задаче Дирихле.

Как известно, она может быть сведена к эквивалентному уравнению

$$u(x,y) = \lambda^2 \iint_S u(x_1,y_1)\, G dS + F(x,y)$$

где G — функция Грина для области S и F — известная функция. Отсюда ясно, что функция $u(x,y)$ регулярна в окрестности тех значений λ, для которых она существует. Далее, пусть резольвента ядра (1.7) имеет помимо полюсов резольвенты ядра G еще некоторый другой полюс λ_0. В этом случае, разрешив уравнение (1.7) при λ, лежащих в достаточно малой окрестности λ_0, и подставив выражение для плотности $\nu(s)$ в формулу (1.3), получим, в силу принципа аналитического продолжения, после предельного перехода $\lambda \to \lambda_0$ в (1.3) искомое решение.

Если какая-либо из задач при заданной функции $f(s)$ разрешима для некоторого характеристического значения λ, то это решение также можно найти, используя соответствующее из указанных уравнений.

Поступила в редакцию
12 V 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

D. I. SHERMAN. — ON THE DIRICHLET AND NEUMAN PROBLEMS IN THE THEORY OF STEADY OSCILLATIONS

In the paper, each of the problems (finite or infinite) of the multi-connected domain is reduced to the Fredholm equations (1.7) and (2.3) respectively. These equations are somewhat different from the hitherto known integral equations for the same problems, making it possible to establish the existence of the solution directly.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гильберт-Курант. Методы математической физики. Т. I.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV.
3. Купрадзе В. Д. Математический сборник Т. 41. 1934. № 4.
4. Векуа И. Н. Труды Тбилисского математического института. 1942.