Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛОИДОВ ВРАЩЕНИЯ

Н. Н. Лебедев

(Ленинград)

1. За последнее время широкое распространение в математической физике получил метод интегральных преобразований, оказавшийся весьма полезным при рассмотрении многих классов задач, приводящихся к интегрированию линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Основная идея этого метода для случая двух независимых переменных может быть изложена следующим образом. Пусть $f(x, y)$ будет искомая функция, удовлетворяющая в области $a \leqslant x \leqslant \infty$, $b \leqslant y \leqslant B$ уравнению вида $L_x\{f\} = M_y\{f\}$, где L_x — линейный дифференциальный оператор с коэффициентами, зависящими от переменной x, а M_y — такой же оператор с коэффициентами, зависящими от переменной y. Задача определения функции f, удовлетворяющей уравнению рассматриваемого вида и дополнительным граничным условиям, часто заметно упрощается, если вместо f искать сперва интегральное преобразование этой функции Φ, связанное с f соотношением

$$\Phi = \int^{\infty} fK(x, \tau)\, dx \tag{1.1}$$

где $K(x, \tau)$ — надлежаще выбранная функция, называемая ядром преобразования, определенная для всех $a \leqslant x < \infty$ и значений параметра τ, принадлежащих некоторой области G_τ. Это упрощение заключается в возможности заменить в соответствующих случаях исследование исходных уравнений для f рассмотрением более простых уравнений для Φ, которые могут быть выведены из первых путем стандартного приема — умножения на $K(x, \tau)$ и интегрирования по основному промежутку (a, ∞). В случае двух независимых переменных преобразованные уравнения будут содержать одно независимое переменное y и могут быть легко решены. После определения Φ значение функции f находится при помощи формулы обращения вида

$$f = \int_L \Phi M(x, \tau)\, d\tau \tag{1.2}$$

где $M(x, \tau)$ — соответствующее разрешающее ядро, L подходяще выбранный путь интегрирования, принадлежащий области G_t.

Наиболее известными преобразованиями типа (1.1) являются:

Преобразование Фурье

$$\text{(I)} \qquad K(x, \tau) = e^{i\tau x} \qquad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \tau < \infty$$

Косинус и синус преобразования Фурье

$$\text{(II)} \qquad K(x, \tau) = \begin{matrix} \cos \tau x \\ \sin \tau x \end{matrix} \qquad 0 \leqslant x < \infty, \qquad 0 \leqslant \tau < \infty$$

Преобразование Лапласа

$$\text{(III)} \qquad K(x, \tau) = e^{-\tau x} \qquad 0 \leqslant x < \infty, \quad R(\tau) > \sigma$$

Преобразование Меллина

$$\text{(IV)} \qquad K(x, \tau) = x^{\tau - 1} \qquad 0 \leqslant x < \infty, \quad \sigma_1 < R(\tau) < \sigma_2$$

Преобразование Ханкеля

$$\text{(V)} \qquad K(x, \tau) = xJ_\nu(x\tau) \qquad 0 \leqslant x < \infty, \quad 0 \leqslant \tau < \infty, \quad \nu \geqslant -\tfrac{1}{2}$$

Примеры некоторых других преобразований даны в известной монографии Титчмарша[1]. Отметим еще преобразование

$$\text{(VI)} \qquad K(x, \tau) = K_{i\tau}(x) \qquad 0 \leqslant x < \infty, \quad 0 \leqslant \tau < \infty$$

где $K_\nu(x)$ — цилиндрическая функция Макдональда, исследованное недавно автором совместно с М. И. Конторовичем[2,3]. Для всех перечисленных случаев (I) — (VI) известны также соответствующие формулы обращения типа (1.2). Приложения преобразований Фурье и преобразования Лапласа к исследованию проблем математической физики могут считаться в настоящее время классическими и достаточно полно освещены в работах Детча[4], Карслоу[5] и др. Применение преобразований Меллина и Ханкеля для решения различных задач электростатики, теории упругости и т. д. систематически проведено в работах Г. А. Гринберга[6,7,8], Снеддона[9], А. И. Лурье[10], Конторовича и Лебедева[11] и др. Примеры приложений преобразования (VI) даны в цитированных выше работах Конторовича и Лебедева и работе Г. А. Гринберга[12]. Отметим еще недавно опубликованное общее исследование Г. А. Гринберга[13], посвященное новому методу решения краевых задач математической физики, который по своей идее близок к рассматриваемому.

2. Настоящая работа содержит дальнейшее развитие метода, рассматривая некоторые краевые задачи, которые могут быть решены при помощи преобразования типа (1.1) с ядром вида

$$\text{(VII)} \qquad K(x, \tau) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x), \qquad 1 \leqslant x < \infty, \quad 0 \leqslant \tau < \infty$$

где $P_\nu(x)$ — функция Лежандра первого рода[1]. Это преобразование мы будем в дальнейшем называть преобразованием Мелера. К числу проблем математической физики, которые могут быть изучены с помощью преобразования Мелера, относятся задачи Дирихле для области, ограниченной гиперболоидом вращения или двумя гиперболоидами, принадлежащими к одному семейству софокусных гиперболоидов вращения (фиг. 1), а также некоторые другие краевые задачи для областей указанного вида.

[1] Здесь $\nu = -\frac{1}{2} + i\tau$ — комплексное число, однако функции $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$ вещественны.

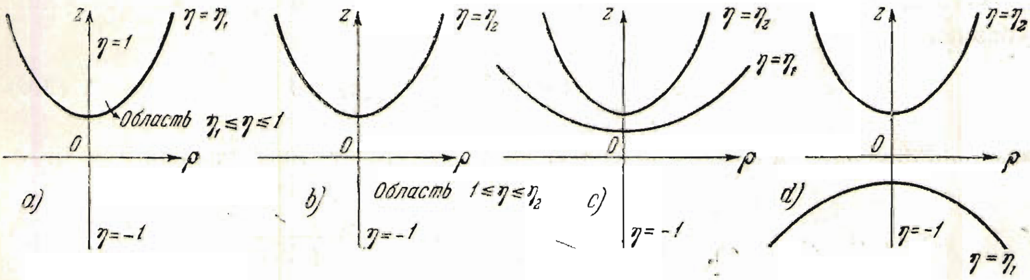
Чтобы рассмотреть решение задачи Дирихле с помощью преобразования (VII), введем сфероидальные координаты (α, β, φ), положив

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z, \qquad z + i\rho = c\,\mathrm{ch}\,(\alpha + i\beta) \tag{2.1}$$
$$0 \leqslant \alpha < \infty \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

Уравнение поверхности гиперболоида в этой системе координат будет $\beta = \mathrm{const}$. Если положить $\mathrm{ch}\,\alpha = \xi$, $\cos\beta = \eta$ и ограничиться рассмотрением случая симметрии вращения, при котором искомая функция f не зависит от координаты φ, то уравнение Лапласа $\triangle f = 0$ может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(1 - \xi^2)\frac{\partial f}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\eta}(1 - \eta^2)\frac{\partial f}{\partial\eta} \tag{2.2}$$

и, очевидно, принадлежит к типу уравнений, обсужденных в § 1.



Фиг. 1

Проблема Дирихле для области, ограниченной двумя гиперболоидами вращения $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$ (фиг. 1, c и d), формулируется теперь следующим образом. *Определить решение уравнения* (2.2), *регулярное в области* $1 \leqslant \xi < \infty$, $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$, *удовлетворяющее граничным условиям*

$$(f)_{\eta=\eta_1} = f_1(\xi), \qquad (f)_{\eta=\eta_2} = f_2(\xi) \qquad (1 \leqslant \xi < \infty), \tag{2.3}$$

и условию на бесконечности

$$|f|\,\xi^{1/2+\delta} \leqslant M, \qquad |\partial f/\partial\xi|\,\xi^{3/2+\delta} \leqslant M \qquad (\xi \to \infty,\ \eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2) \tag{2.4}$$

Здесь M — абсолютная постоянная, δ — некоторое положительное число[1].

Заданные функции f_1 и f_2 предполагаются непрерывными и удовлетворяющими первому из условий (2.4). В случае, если рассматриваемая область ограничена одним гиперболоидом (фиг. 1, a или b), то $\eta_2 = 1$ или $\eta_1 = -1$, одно из условий (2.3) отпадает и заменяется требованием регулярности решения на соответствующем конце промежутка.

Чтобы получить решение поставленной проблемы по методу интегральных

---

[1] Условия (2.4) требуют, чтобы f убывало на бесконечности достаточно быстрым образом, и по существу являются условиями, обеспечивающими единственность решения проблемы. В задачах математической физики эти условия обычно выполнены. Заметим, что из ограниченности f, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ на оси вращения следует ограниченность f, $\partial f/\partial\eta$ и $\sqrt{\xi^2 - 1}\ \partial f/\partial\xi$ при $\xi \to 1$.

преобразований, введем в соответствии с намеченной выше общей идеей преобразование Мелера от функции f, т. е.

$$\Phi = \int_1^\infty f P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\, d\xi \qquad (0 \leqslant \tau < \infty) \tag{2.5}$$

Функции $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$, представляющие частный случай функций Лежандра

$$P_n(z) = F\left(-n,\ n+1,\ 1, \frac{1-z}{2}\right)$$

были изучены впервые Мелером в связи с решением проблемы Дирихле для конуса. Относительно различных свойств этих функций мы отсылаем читателя к оригинальной работе Мелера[14], а также к известным мемуарам Гобсона[15] и Барнса[16], по теории сферических функций[1].

Функции $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)$ представляют вещественные непрерывные решения уравнения

$$\frac{d}{d\xi}(1-\xi^2) P'(\xi) - \left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right) P(\xi) = 0 \tag{2.6}$$

приводящиеся к единице при $\xi \to 1$. Они допускают представления

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\alpha \frac{s\cos\tau s}{\sqrt{2\operatorname{ch}\alpha - 2\operatorname{ch}s}}\, ds = \frac{2}{\pi \operatorname{th}\pi\tau}\int_\alpha^\infty \frac{\sin s\tau}{\sqrt{2\operatorname{ch}s - 2\operatorname{ch}\alpha}}\, ds \tag{2.7}$$

и при $\xi \to \infty$ удовлетворяют неравенствам

$$\xi^{\frac{1}{2}}\left|P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\right| \leqslant A\lg\xi,\ \xi^{\frac{3}{2}}\left|P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\right| \leqslant (B + C\tau)\lg\xi \tag{2.8}$$

где A, B и C — некоторые абсолютные постоянные.

Из (2.4) и (2.8) следует, что интеграл (2.5) сходится абсолютно и равномерно относительно τ при любом $\tau \geqslant 0$ и представляет поэтому непрерывную функцию τ в этом промежутке.

Уравнение для Φ может быть получено из (2.2) по общему методу умножением на $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)$ и интегрированием в пределах $(1, \infty)$. Имеем

$$(1-\xi^2)\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\frac{\partial f}{\partial\xi} - f P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\right]\Bigg|_1^\infty + \left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right)\Phi = \frac{d}{d\eta}(1-\eta^2)\frac{d\Phi}{d\eta}$$

или, принимая во внимание (2.4) и (2.8):

$$\frac{d}{d\eta}(1-\eta^2)\frac{d\Phi}{d\eta} - \left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right)\Phi = 0 \tag{2.9}$$

Из граничных условий (2.4) вытекает далее

$$(\Phi)_{\eta=\eta_1} = \Phi_1 \quad (\Phi)_{\eta=\eta_2} = \Phi_2 \tag{2.10}$$

где Φ_1 и Φ_2 представляют преобразования Мелера от функций f_1 и f_2.

---

[1] Идея о возможности использования рассматриваемых функций для решения проблемы Дирихле для гиперболоида вращения также принадлежит Мелеру.

Общий интеграл уравнения (2.9) будет

$$\Phi = AP_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\eta) + BP_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\eta) \tag{2.11}$$

где A и B — произвольные постоянные; $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\eta)$ определяются разложением

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\eta) = \Phi\left(\frac{1}{2}+i\tau,\ \frac{1}{2}-i\tau,\ 1,\ \frac{1-\eta}{2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{(4\tau^2+1)}{2^2}\left(\frac{1-\eta}{2}\right) + \frac{(4\tau^2+1)(4\tau^2+3^2)}{2^2\cdot 4^2}\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^2 \tag{2.12}$$

и могут быть выражены определенным интегралом

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos\beta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\beta \frac{\operatorname{ch}\tau s}{\sqrt{2\cos s - 2\cos\beta}}\,ds \tag{2.13}$$

Функции $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\eta)$ регулярны в промежутке $(-1+\delta, 1)$ и стремятся к бесконечности при $\eta \to -1$. Напротив, функции $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\eta)$ регулярны в промежутке $(-1, 1-\delta)$ и неограниченно возрастают при $\eta \to +1$.

Постоянные A и B в уравнении (2.11) определяются из условий (2.10). Если рассматриваемая область ограничена одним гиперболоидом, то на основании указанных выше свойств функций $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\eta)$ следует положить $B=0$ в случае (*a*) и $A=0$ в случае (*b*) (фиг. 1). Вторая постоянная находится из остающегося условия, заданного на поверхности гиперболоида. Таким образом, Φ всегда может быть вычислено, притом вполне однозначно. После того как Φ будет найдено, значение f определяется из (2.5) при помощи формулы обращения, принадлежащей Мелеру[1]:

$$f = \int\limits_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi\tau\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\,\Phi\, d\tau \tag{2.14}$$

Формула (2.14) дает решение поставленной задачи в предположении, что решение, обладающее требуемыми свойствами, существует.

Практически для вычисления интеграла (2.14) существенно то обстоятельство, что подинтегральная функция имеет вещественное значение и убывает достаточно быстро при $\tau \to \infty$. Настоящий метод может быть распространен на проблему Неймана и другие задачи математической физики.

3. В настоящем параграфе мы с целью иллюстрации предлагаемого метода рассмотрим задачу о распределении электричества, индуцированного точечным зарядом e, помещенным в начале координат, на поверхности проводника, имеющего форму гиперболоида вращения $\eta = \eta_2$ (фиг. 1, *b*). Если представить потенциал электростатического поля φ в виде суммы потенциала точечного заряда φ_0 и потенциала φ^* индуцированных зарядов:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi^* \qquad \varphi_0 = +\frac{e}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \tag{3.1}$$

---

[1] М е л е р, loc. cit. Мелер выводит формулу (2.14) из теоремы более общего характера, доказательство которой только намечается. Принадлежащая Мелеру формулировка условий, достаточных для справедливости теоремы обращения (2.14), повидимому, не является вполне точной. Строгое исследование этих условий дано В. А. Фоком[17]. Рассматриваемый нами класс функций принадлежит к классу функций, для которого теорема (2.14) верна.

то рассматриваемая проблема проводится к задаче Дирихле с граничным условием $[\varphi^*]_{\eta=\eta_2}=[-\varphi_0]_{\eta=\eta_2}$. Применяя общие формулы § 2, мы можем написать решение этой задачи в виде

$$\varphi^* = -\int\limits_0^\infty (\Phi_0)_{\eta=\eta_2}\,\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\eta)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\eta_2)}\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\,d\tau \tag{3.2}$$

где Φ_0 — преобразование Мелера от φ_0, т. е.

$$\Phi_0=\int\limits_1^\infty \varphi_0\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\,d\xi=\frac{e}{c}\int\limits_1^\infty \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)}{\sqrt{\xi^2-(1-\eta^2)}}\,d\xi \tag{3.3}$$

Так как φ_0 представляет решение уравнения Лапласа, регулярное в области $\eta_2\leqslant\eta\leqslant 1$, естественно предположить, что Φ_0 может быть выражено в форме (2.11), где положено $B=0$. Опираясь на это замечание, легко привести вычисление интеграла (3.3) к рассмотрению более простого интеграла, соответствующего $\eta=1$. Непосредственный метод вычисления, не основывающийся на соображениях косвенного характера, заключается в следующем.

Отправляясь от разложения

$$(1-x)^{-\mu}=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{2!}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\mu+n)}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(n+1)}x^n \qquad (|x|<1)$$

мы можем представить Φ_0 в виде

$$\Phi_0=\frac{e}{c}\int\limits_1^\infty \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)}{\xi}\left(1-\frac{1-\eta^2}{\xi^2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\xi=$$

$$=\frac{e}{c\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}(1-\eta^2)^n\int\limits_1^\infty \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)}{\xi^{2n-1}}\,d\xi \tag{3.4}$$

причем законность изменения порядка интегрирования и суммирования оправдывается тем, что выражение в правой части (3.4) остается сходящимся при переходе к абсолютным значениям. Для вычисления внутреннего интеграла следует воспользоваться представлением (2.7). Имеем

$$\int\limits_1^\infty \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)}{\xi^{2n+1}}\,d\xi=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,\alpha\,d\alpha}{\mathrm{ch}^{2n+1}\alpha}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\tau s}{\sqrt{2\,\mathrm{ch}\,\alpha-2\,\mathrm{ch}\,s}}\,ds=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos\tau s\,ds\int\limits_s^\infty \frac{\mathrm{sh}\,\alpha\,d\alpha}{\mathrm{ch}^{2n+1}\alpha\sqrt{2\,\mathrm{ch}\,\alpha-2\,\mathrm{ch}\,s}},$$

причем возможность изменения порядка интегрирования вытекает из абсолютной сходимости.

Полагая теперь $\sqrt{2\,\mathrm{ch}\,\alpha-2\,\mathrm{ch}\,s}=z\sqrt{2\,\mathrm{ch}\,s}$, находим[1]

$$\int\limits_1^\infty \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)}{\xi^{2n+1}}\,d\xi=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\tau s\,ds}{\mathrm{ch}^{2n+\frac{1}{2}}s}\int\limits_0^\infty \frac{dz}{(1+z^2)^{2n+1}}=$$

$$=\frac{1}{2\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right) \tag{3.5}$$

[1] Интегралы в (3.5) вычисляются элементарно. См., например, курс современного анализа Уиттекера и Ватсона. Для упрощения результата используются известные формулы теории гамма-функции.

Подставляя значение интеграла (3.5) в (3.4), получаем

$$\Phi_0 = \frac{e}{2c\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\eta^2)^n}{\Gamma^2(n+1)} \Gamma\left(n+\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right) =$$

$$= \frac{e}{2c\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right) F\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}, \frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}, 1, 1-\eta^2\right) \qquad (3.6)$$

где $F(a, b, c, x)$ — гипергеометрический ряд.

Если воспользоваться теперь известным преобразованием Куммера

$$F\left(a, b, a+b+\frac{1}{2}, 4x(1-x)\right) = F\left(2a, 2b, a+b+\frac{1}{2}, x\right) \qquad (3.7)$$

где

$$a = \frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}, \qquad b = \frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}, \qquad x = \frac{1-\eta}{2}$$

то из (3.6) следует

$$\Phi_0 = \frac{e}{2c\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right) F\left(\frac{1}{2}+i\tau, \frac{1}{2}-i\tau, 1, \frac{1-\eta}{2}\right) =$$

$$= \frac{e}{2c\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\eta) \qquad (3.8)$$

Решение задачи дается, таким образом, формулой

$$\varphi^* = -\frac{e}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \tau \,\mathrm{th}\, \pi\tau\, \Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right) \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\eta)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\eta_2)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\eta_2)\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\, d\tau \qquad (3.9)$$

При помощи асимптотических разложений[1] для функций $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos\beta) \sim \frac{e^{\tau\beta}}{\sqrt{2\pi\tau\sin\beta}}, \qquad P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos\beta) \sim \frac{e^{\tau(\pi-\beta)}}{\sqrt{2\pi\tau\sin\beta}}$$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\mathrm{ch}\,\alpha) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\tau\,\mathrm{sh}\,\alpha}} \sin\left(\alpha\tau+\frac{\pi}{4}\right) \qquad (\tau \to +\infty) \qquad (3.10)$$

легко показать, что подинтегральная функция в (3.9) асимптотически равна

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\tau\sin\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha}} \exp\left\{-\tau\left(\frac{\pi}{2}+\beta-2\beta_2\right)\right\} \sin\left(\alpha\tau+\frac{\pi}{4}\right)$$

Отсюда следует, что интеграл (3.9) сходится и, как нетрудно проверить, действительно представляет решение поставленной проблемы.

Для получения численных результатов необходимо табулировать функции $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$ для вещественных значений τ и параметра x, после чего вычисление интегралов, к которым приводит настоящий метод, выполняется по обычным формулам численных квадратур. Составление таблиц рассматриваемых функций может быть произведено при помощи рядов, служащих для их определения, а для больших значений — с помощью соответствующих асимптотических разложений[2]. Так как функции $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$ встречаются

---

[1] Barnes[16], стр. 156. Отметим еще формулу

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right) \sim \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{\sqrt{\tau}} \exp -\frac{\pi\tau}{2}$$

[2] Особенно удобны для этой цели разложения, данные недавно В. А. Фоком[17].

при решении широкого класса проблем, связанных с интегрированием уравнений Лапласа, Пуассона и Гельмгольца для конуса и гиперболоида вращения, а также в некоторых задачах, решаемых в тороидальной системе координат, то работа по составлению таблиц представляется вполне оправданной.

Заметим в заключение, что решение проблемы Дирихле для параболоида вращения также может быть выполнено по методу интегральных преобразований, причем этот случай является относительно элементарным и требует для своего осуществления использования преобразования Ханкеля (V), более простого, чем преобразование Мелера (VII), примененное здесь.

Поступила в редакцию
16 XII 1946

Ленинградский физико-технический институт
Академии Наук СССР

N. N. LEBEDEV. — SOLUTION OF DIRICHLET'S PROBLEM FOR HYPERBOLOIDS OF REVOLUTION

In recent years, the theory of integral transformations has often been employed to obtain the solution of a wide variety of problems in mathematical physics. The most commonly employed transformations are those of Fourier, Laplace, Mellin and Hankel; in problems where the range of variables is $(0, \infty)$ or $(-\infty, +\infty)$ these transformations have often been successfully used to reduce a partial differential equation in n variables to one in $n-1$ variables, hence simplifying the boundary problem under consideration. The present paper takes up certain problems which may be solved by means of a Mehler transformation, defined by equation (2.5). A typical case is Dirichlet's problem for hyperboloids of revolution. Employing the method of integral transformations, the problem is reduced to the solution of an ordinary differential equation, which may be obtained in terms of Legendre functions of complex degree $\nu = -{}^1/_2 + i\tau$. The solution of the integral equation (2.5) is then given as Mehler's inversion theorem (2.14). An electrostatic problem is discussed as an example, the solution being obtained in the form of an infinite integral.

ЛИТЕРАТУРА

1. Titchmarsh E. C. Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford. 1937.
2. Конторович М. И. и Лебедев Н. Н. Журнал эксп. и теор. физики. 1938. Т. VIII. Вып. 10—11 (Стр. 1192).
3. Лебедев Н. Н. Доклады АН СССР. 1946. Т. L II (Стр. 661).
4. Doetsch G. Theorie und Anwendung der Laplace Transformation.
5. Carslaw H. S. Introduction to the Mathematical Theory of Conduction of Heat.
6. Гринберг Г. А. Журн. эксп. и теор. физ. 1938. Т. VIII. Вып. 3.
7. Гринберг Г. А. Известия АН СССР. 1943. Т. VII. № 1—2.
8. Гринберг Г. А. Доклады АН СССР. 1940. Т. XXVI. № 6 (Стр. 581).
9. Sneddon J. N. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1945. Vol. 41 (p. 27 and 239).
10. Лурье А. И. Труды Лен. инд. института. Раздел физ.-мат. 1939. Вып. 3 (Стр. 94).
11. Лебедев Н. Н. и Конторович М. И. Журн. эксп. и теор. физики. 1939. Т. IX. Вып. 6 (Стр. 729).
12. Гринберг Г. А. Журн. эксп. и теор. физики. 1940. Т. X. Вып. 9—10 (Стр. 1087).
13. Гринберг Г. А. Известия АН СССР. Серия физическая. Т. X. № 2 (Стр. 141).
14. Mehler F. G. Math. Ann. 1881. Bd. XVIII.
15. Hobson E. W. Phil. Trans. of the Royal Soc. 1896. 187 A.
16. Barnes E. W. Quarterly Journal. 1908. Vol. XXXIX.
17. Фок В. А. Доклады АН СССР. 1943. Т. XXXIX. № 7 (Стр. 279).