

## ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

С. А. Христианович

(Москва)

Изучению уравнений плоского адиабатического потока газа посвящено много исследований. Уже давно известно, что эти уравнения имеют два первых интеграла, каждый из которых зависит от произвольной функции. При помощи этих интегралов удастся решить большое число практически важных задач. Однако чаще всего этих интегралов оказывается недостаточно для удовлетворения требуемым граничным условиям. В этих случаях пользуются приближенным графическим методом решения. Этот метод был предложен Массо для решения уравнений гиперболического типа в 1901—1905 гг. Буземан и Прандтль применили его к решению задач газовой динамики. Как всякий приближенный графический метод, этот метод, несмотря на свою общность, не дает возможности для качественных выводов. Ниже приводится приближенное решение уравнений плоского сверхзвукового потока газа в простом аналитическом виде.

**§ 1. Исследование уравнений движения.** В работе «О сверхзвуковых течениях газа»<sup>[1]</sup> уравнения для плоских адиабатических течений были преобразованы к виду, очень удобному для исследования. Напомним некоторые результаты, полученные в этой работе.

Как известно, уравнения плоского установившегося безвихревого течения идеального газа при отсутствии трения и теплопроводности имеют вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{W^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = \frac{a_*^2}{2} \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \quad (1.2)$$

где  $\rho$  — плотность,  $a$  — скорость звука,  $a_*$  — критическая скорость,  $W$  — величина вектора скорости,  $u$  и  $v$  — составляющие скорости по осям  $x$  и  $y$ .

Плотность  $\rho$ , давление  $p$  и скорость звука  $a$  связаны соотношениями

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\kappa, \quad a^2 = \kappa \frac{p}{\rho} \quad (1.3)$$

Исключая из первого уравнения (1.1) плотность, получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (a^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} - 2uv \frac{\partial u}{\partial y} + (a^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

Уравнения характеристик для этой системы уравнений будут

$$\begin{aligned} (uv + a \sqrt{W^2 - a^2}) dx - (u^2 - a^2) dy &= 0 \\ (uv + a \sqrt{W^2 - a^2}) du + (v^2 - a^2) dv &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$



Выбирая перед корнем знак плюс или минус, получим первое или второе семейство характеристик.

Произведем в уравнениях (1.5) замену переменных. На основании уравнений (1.4) можно определить потенциал скоростей и функцию тока следующими соотношениями:

$$d\varphi = \frac{u}{a_*} dx + \frac{v}{a_*} dy, \quad d\psi = -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{v}{a_*} dx + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{u}{a_*} dy \quad (1.6)$$

Если вместо  $u$  и  $v$  рассматривать величину скорости  $W$  и  $\vartheta$  — угол наклона вектора скорости к оси  $x$ , то

$$u = W \cos \vartheta, \quad v = W \sin \vartheta \quad (1.7)$$

В дальнейшем вместо величины скорости  $W$  удобно рассматривать безразмерную величину  $\lambda = W / a_*$ .

Решая уравнения (1.6) относительно  $dx$  и  $dy$ , получим

$$dx = \frac{\cos \vartheta}{\lambda} d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \vartheta}{\lambda} d\psi, \quad dy = \frac{\sin \vartheta}{\lambda} d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \vartheta}{\lambda} d\psi \quad (1.8)$$

Заменяя  $dx$ ,  $dy$ ,  $u$  и  $v$  в уравнениях (1.5) их выражениями из (1.7) и (1.8), после некоторых преобразований<sup>[1]</sup>, получим

$$d\varphi = \sqrt{\chi} d\psi, \quad \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \lambda^2(x-1)/(x+1)}} \frac{d\lambda}{\lambda} - d\vartheta = 0 \quad (1.9)$$

где

$$\sqrt{\chi} = \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{[1 - \lambda^2(x-1)/(x+1)]^2}} \quad \left( v = \frac{x+1}{x-1} \right) \quad (1.10)$$

Обозначим

$$\sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \lambda^2(x-1)/(x+1)}} \frac{d\lambda}{\lambda} = d\sigma, \quad \sigma' = \int_1^\lambda \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \lambda^2(x-1)/(x+1)}} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (1.11)$$

Значения функций  $\sqrt{\chi}$  и  $\sigma'$  в зависимости от  $\lambda$  приведены в табл. 1.

**§ 2. Приближенное интегрирование уравнений.** Вторые уравнения (1.9) могут быть после интегрирования записаны в виде

$$\sigma - \vartheta = 2\xi, \quad \sigma + \vartheta = 2\eta \quad (2.1)$$

Здесь

$$\sigma = \sigma' + C \quad (2.2)$$

где  $C$  — постоянная, которая будет определена в дальнейшем.

Первые уравнения 1.9 могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \sqrt{\chi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\sqrt{\chi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (2.3)$$

Уравнения (2.3) представляют собой уравнения (1.1), преобразованные к переменным  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\xi$  и  $\eta$ .

Для определения  $x$  и  $y$  служат уравнения (1.8). Правые части этих уравнений являются полными дифференциалами в силу уравнений (2.3).

Решение задачи сводится к интегрированию уравнений (2.3) и последующему определению  $x$  и  $y$  при помощи квадратур.



Таблица 1

$\lambda$	M	$\sqrt{\bar{\chi}}$	$\sigma'$	$\lambda$	M	$\sqrt{\bar{\chi}}$	$\sigma'$
1.00	1.000	0.0000	0.0000	1.50	1.753	4.582	0.3272
1.05		0.5878	0.0412	1.60	1.929	6.630	0.4260
1.10	1.124	0.9008	0.0316	1.70	2.155	9.878	0.5334
1.15		1.200	0.0575	1.80	2.423	15.33	0.6508
1.20	1.256	1.514	0.0873	1.90	2.748	25.59	0.7792
1.25		1.855	0.1205	2.00	3.162	46.83	0.9213
1.30	1.400	2.240	0.1569	2.10	3.724	99.33	1.0812
1.35		2.688	0.1959	2.20	4.568	272.6	1.2663
1.40	1.557	3.210	0.2375	2.30	6.104	3966	1.4951
1.45		3.832	0.2813	2.40	10.95		1.8097
1.50	1.753	4.582	0.3272	2.45			

Общий интеграл уравнений (2.3) не может быть выражен элементарным образом через произвольные функции. Но оказывается, что, приближенно заменяя функцию  $\sqrt{\bar{\chi}} = f(\sigma')$  более простой зависимостью, можно получить общий интеграл уравнений (2.3) в явном виде. Полученное таким образом решение дает хорошую аппроксимацию к решению точных уравнений.

На фиг. 1 изображены кривые  $\sqrt{\bar{\chi}} = f(\sigma')$  и парабола

$$\sqrt{\bar{\chi}} = 18.5(\sigma' + 0.185)^2 \tag{2.4}$$

Этой параболой можно заменить точную зависимость  $\sqrt{\bar{\chi}} = f(\sigma')$  в интервале  $0.015 < \sigma' < 0.57$ . В этом интервале  $\lambda$  изменяется от 1.06 до 1.74 и, следовательно, число Маха в пределах от 1.06 до 2.2.

На фиг. 2 изображены кривая  $\sqrt{\bar{\chi}} = f(\sigma')$  и кривая

$$\sqrt{\bar{\chi}} = \frac{6.5}{(\sigma' - 1.30)^2} \tag{2.5}$$

дающая хорошее приближение в интервале  $0.57 < \sigma' < 1.02$ . В этом интервале число  $\lambda$  изменяется от 1.74 до 2.07, что соответствует изменению числа Маха от 2.2 до 3.5. Нетрудно подобрать кривую в виде (2.5) для приближения к кривой  $\sqrt{\bar{\chi}} = f(\sigma')$  и при числах Маха больше 3.5.

Положим

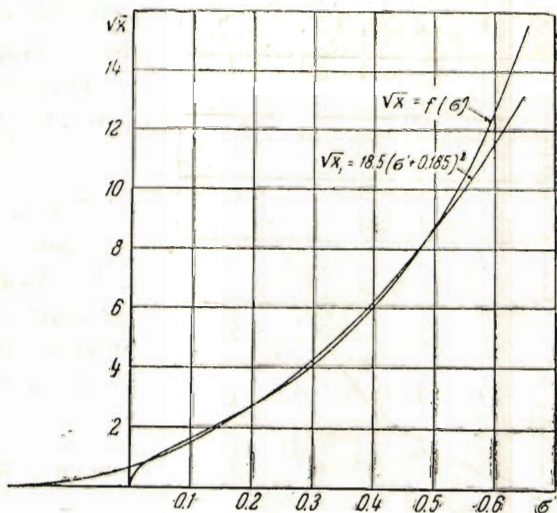
$$\sqrt{\bar{\chi}} = A(\sigma' + C)^2 \tag{2.6}$$

Обозначая  $\sigma' + C = \sigma$ , получим для системы (2.3) следующее выражение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -A(\xi + \eta)^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = A(\xi + \eta)^2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \tag{2.7}$$

где  $\sigma - \vartheta = 2\xi$ ,  $\sigma + \vartheta = 2\eta$ . Полагая

$$(\xi + \eta)\psi = z$$



Фиг. 1



имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = A \left[ (\xi + \eta) \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \right], \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -A \left[ (\xi + \eta) \frac{\partial z}{\partial \eta} - z \right]$$

Исключая из этой системы функцию  $\varphi$ , получим для  $z$  уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Следовательно,

$$\psi = \frac{f_1(\xi) + f_2(\eta)}{\xi + \eta} \quad (2.8)$$

Определяя затем  $\varphi$  из уравнений (2.7), получим

$$\varphi = A(\xi + \eta) [f_2(\eta) - f_1(\xi)] + 2A \left[ \int f_1(\xi) d\xi - \int f_2(\eta) d\eta \right] \quad (2.9)$$

Функции (2.8) и (2.9) дают общий интеграл уравнений (2.7). Если

$$\sqrt{\bar{\chi}} = \frac{B}{(\sigma' + C)^2} \quad (2.10)$$

то система уравнений (2.3) совпадает с системой (2.6) при условии замены функции  $\psi$  на функцию  $\varphi$  и  $B$  на  $1/A$ .

$$(2.11)$$

Для общего интеграла имеем в этом случае

$$\varphi = \frac{f_1(\xi) + f_2(\eta)}{\xi + \eta}, \quad \psi = \frac{1}{B} (\xi + \eta) [f_2(\eta) - f_1(\xi)] + \frac{2}{B} \left[ \int f_1(\xi) d\xi - \int f_2(\eta) d\eta \right]$$

Приведенные решения представляют собой частные случаи решений уравнения Эйлера

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{k}{\xi + \eta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (2.12)$$

Исследование случаев интегрируемости этого уравнения приведено во втором томе сочинения Дарбу<sup>[2]</sup>.

Решение системы (2.3) приводится к решению уравнения (2.12) при

$$\sqrt{\bar{\chi}} = A(\sigma' + C)^{2k}$$

Этими интегралами мы пользовались при решении уравнений длинных волн в канале<sup>[3]</sup>. Недавно Л. Д. Ландау и К. П. Станюкович применили аналогичные решения к уравнениям теории детонации.

В случае

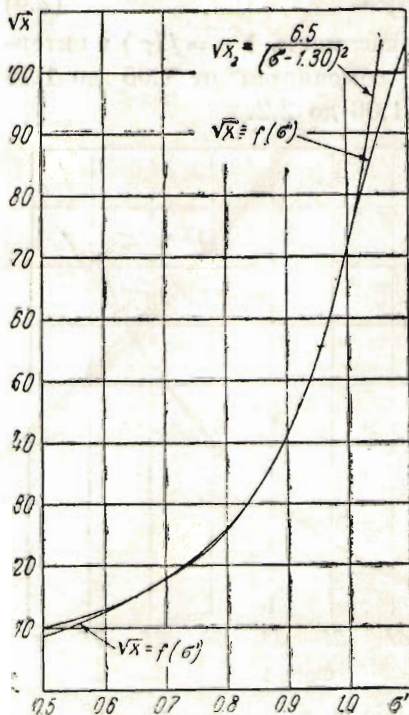
$$\sqrt{\bar{\chi}} = A(\sigma' + C)^4 \quad (2.13)$$

имеем решение в виде

$$\psi = \frac{f_1'(\xi) + f_2'(\eta)}{(\xi + \eta)^2} - 2 \frac{f_1(\xi) + f_2(\eta)}{(\xi + \eta)^3}$$

При помощи функций (2.13) можно получить для зависимости  $\sqrt{\bar{\chi}} = f(\sigma')$  лучшее

приближение и в более широком интервале изменения  $\sigma'$  по сравнению с функциями (2.6), но общий интеграл систем (2.3) получается при этом уже в более сложном виде, менее удобном для решения граничных задач.



Фиг. 2



§ 3. Вычисление координат  $x$  и  $y$ . Уравнения (1.8) являются полными дифференциалами в силу уравнений (2.3). Запишем эти уравнения в виде

$$dx = p(\sigma) \cos \vartheta d\varphi - q(\sigma) \sin \vartheta d\psi, \quad dy = p(\sigma) \sin \vartheta d\varphi + q(\sigma) \cos \vartheta d\psi \quad (3.1)$$

Пользуясь уравнениями (2.3), получим (3.2)

$$dx = - \left[ p(\sigma) \sqrt{\bar{\chi}} \cos \vartheta + q(\sigma) \sin \vartheta \right] \frac{d\varphi}{d\xi} d\xi + \left[ p(\sigma) \sqrt{\bar{\chi}} \cos \vartheta - q(\sigma) \sin \vartheta \right] \frac{\partial \psi}{\partial \eta} d\eta$$

$$dy = - \left[ p(\sigma) \sqrt{\bar{\chi}} \sin \vartheta - q(\sigma) \cos \vartheta \right] \frac{d\varphi}{d\xi} d\xi + \left[ p(\sigma) \sqrt{\bar{\chi}} \sin \vartheta + q(\sigma) \cos \vartheta \right] \frac{\partial \psi}{\partial \eta} d\eta$$

Условия, что эти выражения суть полные дифференциалы, имеют вид

$$2p(\sigma) \sqrt{\bar{\chi}} \cos \vartheta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \left\{ \left[ \frac{d}{d\sigma} (p \sqrt{\bar{\chi}}) + q \right] \cos \vartheta + \left( \frac{dq}{d\sigma} - p \sqrt{\bar{\chi}} \right) \sin \vartheta \right\} \frac{d\psi}{d\eta} + \left\{ \left[ \frac{d}{d\sigma} (p \sqrt{\bar{\chi}}) + q \right] \cos \vartheta - \left( \frac{dq}{d\sigma} - p \sqrt{\bar{\chi}} \right) \sin \vartheta \right\} \frac{d\psi}{d\xi} = 0 \quad (3.3)$$

$$2p(\sigma) \sqrt{\bar{\chi}} \sin \vartheta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \left\{ \left[ \frac{d}{d\sigma} (p \sqrt{\bar{\chi}}) + q \right] \sin \vartheta + \left( \frac{dq}{d\sigma} - p \sqrt{\bar{\chi}} \right) \cos \vartheta \right\} \frac{d\psi}{d\eta} + \left\{ \left[ \frac{d}{d\sigma} (p \sqrt{\bar{\chi}}) + q \right] \sin \vartheta - \left( \frac{dq}{d\sigma} - p \sqrt{\bar{\chi}} \right) \cos \vartheta \right\} \frac{d\psi}{d\xi} = 0 \quad (3.4)$$

Замечая, что функция  $\psi$  в силу системы (2.3) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi d\eta} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{\chi}}} \frac{d\sqrt{\bar{\chi}}}{d\sigma} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = 0$$

и сравнивая это уравнение с уравнениями (3.3) и (3.4), заключаем, что для того, чтобы выражения (3.1) были полными дифференциалами, необходимо, чтобы  $p$  и  $q$  удовлетворяли уравнениям

$$\frac{dq}{d\sigma} - \sqrt{\bar{\chi}} p = 0, \quad \frac{dp}{d\sigma} \sqrt{\bar{\chi}} + q = 0 \quad (3.5)$$

Если

$$\sqrt{\bar{\chi}} = \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{[1 - \lambda^2(x-1)/(x+1)]^2}} \quad \left( y = \frac{x+1}{x-1} \right)$$

то эти уравнения имеют решением

$$p(\sigma) = \frac{1}{\lambda}, \quad q(\sigma) = \frac{p_0}{\rho \lambda}$$

В случае, когда  $\sqrt{\bar{\chi}} = A\sigma^2$ , решение уравнений (3.5) легко находится, исключая из (3.5) функцию  $q$ , получим

$$\frac{d^2 p}{d\sigma^2} + \frac{2}{\sigma} \frac{dp}{d\sigma} + p = 0$$

Общий интеграл этого уравнения будет

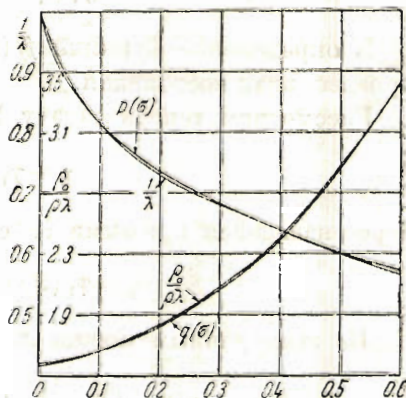
$$p = \frac{1}{\sigma} (C_1 \sin \sigma + C_2 \cos \sigma)$$

Для функции  $q$  имеем, следовательно,

$$q = A \{ C_1 \sin \sigma + C_2 \cos \sigma - \sigma (C_1 \cos \sigma - C_2 \sin \sigma) \} \quad (3.7)$$

В случае  $\sqrt{\bar{\chi}} = B/\sigma^2$  получим для  $q$  уравнение

$$\frac{d^2 q}{d\sigma^2} + \frac{q}{\sigma} \frac{dq}{d\sigma} + q = 0 \quad (3.8)$$



Фиг. 3



Отсюда

$$q = \frac{1}{\sigma} (C_1 \sin \sigma + C_2 \cos \sigma), \quad p = -\frac{1}{B} \{C_1 \sin \sigma + C_2 \cos \sigma + \sigma (C_1 \cos \sigma - C_2 \sin \sigma)\} \quad (3.9)$$

На фиг. 3 даны значения функций  $p$  и  $q$ , отвечающие параболе (2.4), и функции  $1/\lambda$  и  $\rho_0/\rho\lambda$ . Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  выбраны из условия, что  $p = 1/\lambda$  и  $q = \rho_0/\rho\lambda$  при  $\sigma' \approx 0.2$ . В этом случае  $C_1 = 0.553$  и  $C_2 = 0.082$ . Приближение получается достаточно хорошим. Аналогичным образом получаем приближенное значение  $p$  и  $q$  для уравнения (2.5).

**§ 4. Решение краевых задач.** Рассмотрим решение основных краевых задач при помощи общего интеграла (2.8) и (2.9). Решение тех же задач при помощи общего интеграла (2.11) получается аналогичным образом.

В качестве первой задачи рассмотрим определение интеграла по данным значениям на двух характеристиках различных семейств.

Пусть  $\psi = \psi_1(\eta)$ ,  $\varphi = \varphi_1(\eta)$  при  $\xi = \xi_0$  и  $\psi = \psi_2(\xi)$ ,  $\varphi = \varphi_2(\xi)$  при  $\eta = \eta_0$ , причем  $\psi_1(\eta_0) = \psi_2(\xi_0)$ ,  $\varphi_1(\eta) = \varphi_2(\xi_0)$ . Значения  $\psi_1(\eta)$  и  $\varphi_1(\eta)$  так же, как  $\varphi_2(\xi)$  и  $\psi_2(\xi)$ , связаны между собой уравнениями (2.7), т. е.

$$\varphi_2'(\xi) = -A(\xi + \eta_0)^2 \psi_2'(\xi), \quad \varphi_1'(\eta) = +A(\xi_0 + \eta)^2 \psi_1'(\eta)$$

Произвольные функции в уравнении (2.8) сейчас же определяются. Имеем

$$f_2(\eta) = \psi_1'(\eta)(\xi_0 + \eta) - f_1(\xi_0) \quad f_1(\xi) = \psi_2(\xi)(\eta_0 + \xi) + f_2(\eta_0) \quad (4.1)$$

Кроме того,

$$f_1(\xi_0) + f_2(\eta_0) = (\xi_0 + \eta_0) \psi_1(\eta_0)$$

В определении функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$  входит, таким образом, лишь одна произвольная постоянная.

Рассмотрим теперь задачу Коши. Вдоль кривой

$$\eta = \chi_1(\xi) \quad \text{или} \quad \xi = \chi_2(\eta) \quad (4.2)$$

пересекающейся прямыми  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$  только в одной точке, дано

$$\varphi = \varphi_1(\xi) = \varphi_2(\eta), \quad \psi = \psi_1(\xi) = \psi_2(\eta) \quad (4.3)$$

По этим данным можно вычислить производные от  $\psi$  по  $\xi$  и по  $\eta$ . Имеем

$$\varphi_1'(\xi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \chi_1'(\xi), \quad \psi_1'(\xi) = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \chi_1'(\xi)$$

Отсюда, пользуясь уравнениями (2.7), имеем на начальной кривой

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{A[\chi_1(\xi) + \xi]^2 \psi_1' - \varphi_1'(\xi)}{2A[\chi_1(\xi) + \xi]^2} = F_1(\xi), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{A[\chi_2(\eta) + \eta]^2 \psi_2'(\eta) + \varphi_2'(\eta)}{2A[\chi_2(\eta) + \eta]^2} = F_2(\eta) \quad (4.4)$$

Из уравнения (2.8) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [(\xi + \eta) \psi] = f_1'(\xi), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} [(\xi + \eta) \psi] = f_2'(\eta)$$

Отсюда

$$f_1'(\xi) = \psi_1(\xi) + F_1(\xi) [\chi_1(\xi) + \xi], \quad f_2'(\eta) = \psi_2(\eta) + F_2(\eta) [\chi_2(\eta) + \eta] \quad (4.5)$$



Отсюда  $f_1$  и  $f_2$  определяются квадратурами с точностью до постоянных. Эти постоянные определяются из условий совпадения  $\varphi$  и  $\psi$  с заданными значениями на начальной кривой.

Очень важной задачей является определение решения по данным на одной из характеристик и данным вдоль свободной поверхности. Вдоль свободной поверхности давление и, следовательно, скорость постоянны. Свободная поверхность есть функция тока. Будем считать, что на свободной поверхности  $\psi = 0$ . Вдоль характеристики  $\xi = \xi_0$ , пересекающей эту линию тока в точке ( $\xi = \xi_0$ ,  $\eta = \eta_0$ ), имеем  $\psi = \psi_2(\eta)$  и  $\varphi = \varphi_2(\eta)$ , причем

$$\varphi_2'(\eta) = A(\xi_0 + \eta)^2 \psi_2'(\eta)$$

На свободной поверхности

$$f_1(\xi) + f_2(\eta) = 0, \quad \xi + \eta = \sigma_0$$

Вдоль характеристики  $\xi = \xi_0$  имеем

$$\varphi_2(\eta)(\xi_0 + \eta) = f_1(\xi_0) + f_2(\eta)$$

Следовательно,

$$f_2(\eta) = \psi_2(\eta)(\xi_0 + \eta) - f_1(\xi_0), \quad f_1(\xi) = -\psi_2(\sigma_0 - \xi)(\xi_0 + \sigma_0 - \xi) + f_1(\xi_0)$$

Отсюда

$$\psi = \frac{1}{\xi + \eta} [\psi(\eta)(\xi_0 + \eta) - \psi(\sigma_0 - \xi)(\xi_0 + \sigma_0 - \xi)] \quad (4.6)$$

Постоянное  $f_1(\xi_0)$  определится из условия совпадения значений  $\varphi$  с данными значениями вдоль характеристики  $\xi = \xi_0$ .

В качестве последней задачи рассмотрим определение решения по данным на характеристике одного из семейств и условиям обтекания твердой стенки. Пусть  $\psi = \psi_2(\eta)$  при  $\xi = \xi_0$ . Вдоль стенки  $x = x^*(\vartheta)$ ,  $y = y^*(\vartheta)$  и  $\psi = 0$ .

Из уравнения стенки имеем

$$\frac{dx^*(\vartheta)}{d\vartheta} = \cos \vartheta p(\sigma) \frac{d\varphi}{d\vartheta}$$

или, пользуясь уравнениями (2.7),

$$\frac{dx^*(\vartheta)}{d\vartheta} = Ap(\sigma) \cos \vartheta \sigma^2 \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\vartheta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\vartheta} \right] \quad (4.7)$$

Вдоль линии тока  $\psi = 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{f_1'(\xi)}{\xi + \eta}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{f_2'(\eta)}{\xi + \eta}$$

причем  $f_1(\xi) = -f_2(\eta)$ . Дифференцируя это равенство по  $\vartheta$ , получим

$$f_1'(\xi) \frac{d\xi}{d\vartheta} = -f_2'(\eta) \frac{d\eta}{d\vartheta}$$

Уравнение (4.7) принимает, следовательно, вид

$$\frac{dx^*(\vartheta)}{d\vartheta} = A\sigma p(\sigma) \cos \vartheta f_2' \left( \frac{\sigma + \vartheta}{2} \right) \left[ \frac{d\sigma}{d\vartheta} + 1 \right] \quad (4.8)$$

Функция  $f_2'(\eta)$  определяется по данным вдоль характеристики  $\xi = \xi_0$  в виде

$$f_2'(\eta) = \frac{d}{d\eta} [\xi_0 + \eta] \psi_2(\eta) \quad (4.9)$$



Таким образом, определение скорости вдоль стенки приводится к интегрированию уравнения (4.8). Это уравнение можно представить в виде

$$\frac{d\sigma}{d\vartheta} = \frac{1}{A\sigma p(\sigma) \cos \vartheta f_2'[(\sigma + \vartheta)/2]} \frac{dx^*(\vartheta)}{d\vartheta} - 1 \quad (4.10)$$

В случае прямолинейной стенки решение получается в более простом виде. Пусть  $\vartheta_0$  — угол наклона стенки. Вдоль стенки  $\psi = 0$ . Имеем

$$\eta - \xi = \vartheta_0, \quad f_1(\xi) = -f_2(\eta)$$

Отсюда

$$f_1(\xi) = -f_2(\eta - \vartheta_0)$$

Функция  $f_2(\eta)$  определится по данным вдоль характеристики  $\xi = \xi_0$ .

После того как определены функции  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ , на основании уравнений (1.8) и (2.7) можно вычислить  $x$  и  $y$ .

Обозначая

$$C_1 = N \cos \varepsilon, \quad C_2 = N \sin \varepsilon$$

получим, пользуясь (3.6) и (3.7):

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = -AN \{ \sigma \sin(\sigma - \vartheta + \varepsilon) + \sin \vartheta \sin(\sigma + \varepsilon) \} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = +AN \{ \sigma \sin(\sigma + \vartheta + \varepsilon) - \sin \vartheta \sin(\sigma + \varepsilon) \} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = -AN \{ \sigma \cos(\sigma - \vartheta + \varepsilon) - \cos \vartheta \sin(\sigma + \varepsilon) \} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = -AN \{ \sigma \cos(\sigma + \vartheta + \varepsilon) - \cos \vartheta \sin(\sigma + \varepsilon) \} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$$

Значение  $x$  и  $y$  вдоль характеристик  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$  получается из этих уравнений простой квадратурой.

Поступила в редакцию  
30 I 1947

#### S. A. CHRISTIANOVICH. — APPROXIMATE INTEGRATION OF THE EQUATIONS OF A SUPERSONIC GAS FLOW

The paper shows that the general integral for the equations of plane supersonic gas flow may be obtained in approximate analytic form.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. О сверхзвуковых течениях газа, Труды ЦАГИ. № 543. 1944.
2. Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces. Sec. Partie. 1894. Paris.
3. Девисон Б. Б., Михлин С. Г., Христианович С. А. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Акад. Наук СССР. 1938.