Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Е. И. Степанов

(Новочеркасск)

В этой заметке дается преобразование, сводящее к плоской задаче интегрирование дифференциальных уравнений ламинарного пограничного слоя, возникающего на поверхности тела вращения, обтекаемого потоком, скорость которого на достаточном удалении от тела параллельна оси симметрии последнего.

Упомянутым дифференциальным уравнениям можно придать вид [1]

$$u\frac{\partial u}{\partial s}+v\frac{\partial u}{\partial y}=w\frac{dw}{ds}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(ry)+\frac{\partial}{\partial y}(rv)=0 \tag{2}$$

где s и y — координаты точек пограничного слоя, отсчитываемые соответственно вдоль обвода меридионального сечения тела и по перпендикуляру к нему, u и v — соответствующие компоненты скоростей, $r=r(s)$ — расстояние от точек обвода сечения до оси вращения тела, $w=w(s)$ — скорость внешнего потока, $\nu=\mu/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости, μ — коэффициент вязкости и ρ — плотность жидкости.

Отметим, что не только уравнение (1), но и уравнение непрерывности (2) являются приближенными.

Определяя асимптотические решения, пограничные условия для u и v принимают в виде

$$u=0,\quad v=0\quad \text{при}\quad y=0,\qquad u\to w(s)\quad \text{при}\quad y\to\infty \tag{3}$$

Придерживаясь теории слоя конечной толщины, полагают

$$u=0,\quad v=0\quad \text{при}\quad y=0;\qquad u=w,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0\quad \text{при}\quad y=\delta \tag{4}$$

где δ — толщина пограничного слоя — величина, подлежащая определению наряду с величинами u и v.

Из уравнения непрерывности (2) имеем

$$u=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial s} \tag{5}$$

где ψ — функция тока.

Введем новые переменные x и z, связанные с переменными s и y зависимостями

$$x=\int_0^s r^2 ds,\qquad z=ry \tag{6}$$

Рассматривая функцию тока ψ, входящую в равенства (5), как функцию переменных x и z, и замечая, что

$$\frac{\partial x}{\partial s}=r^2,\qquad \frac{\partial}{\partial s}=\frac{r'}{r}z,\qquad r'=\frac{dr}{ds}$$

из равенств (5), находим

$$u=\frac{\partial\bar\psi}{\partial z},\qquad v=-r\frac{\partial\bar\psi}{\partial x}-z\frac{r'}{r^2}\frac{\partial\bar\psi}{\partial z} \tag{7}$$

где $\bar\psi$ — функция тока ψ, преобразованная к новым переменным.

Заметим далее, что

$$\frac{\partial u}{\partial s} = z\,\frac{r'}{r}\,\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial z^2} + r^2\,\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial x\,\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = r\,\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = r^2\,\frac{\partial^3\bar{\psi}}{\partial z^2}$$

Подставляя приведенные выражения для u, v и т. д. в дифференциальное уравнение (1), после элементарных преобразований получаем

$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}\,\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}\,\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial z^2} = \bar{w}\frac{d\bar{w}}{dx} + \nu\,\frac{\partial^3\bar{\psi}}{\partial z^3} \tag{8}$$

Полагая

$$\bar{u} = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}, \qquad \bar{v} = -\,\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{9}$$

можно заменить дифференциальное уравнение (8) системой дифференциальных уравнений

$$\bar{u}\,\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\,\frac{\partial\bar{u}}{\partial z} = \bar{w}\,\frac{d\bar{w}}{dx} + \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

Функции $\bar{u}$ и $\bar{v}$ связаны с функциями u и v зависимостями (см. равенства 7 и 9)

$$u = \bar{u}, \qquad v = r\bar{v} - y\frac{r'}{r}\,u \tag{11}$$

Так как $z=0$ при $y=0$ и $z\to\infty$ при $y\to\infty$, то пограничные условия для функций $\bar{u}$ и $\bar{v}$ при отыскании асимптотических решений имеют вид (равенства 3 и 11)

$$\bar{u}=0, \quad \bar{v}=0 \quad \text{при} \quad z=0; \qquad \bar{u}\longrightarrow\bar{w}(x) \quad \text{при} \quad z\longrightarrow\infty \tag{12}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (10) при наличии пограничных условий (12) [или же решение дифференциального уравнения (8) при наличии соответствующих пограничных условий для функций ψ] составляет, как известно [1], задачу математической теории плоского ламинарного слоя.

Полагая $\bar{\delta}=r\delta$, придадим граничным условиям (4) [при наличии которых определяются приближенные решения дифференциальных уравнений (1) и (2)] вид

$$\bar{u}=0, \quad \bar{v}=0 \quad \text{при} \quad z=0, \qquad \bar{u}=\bar{w}, \quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial z}=0, \quad \text{при} \quad z=\bar{\delta}$$

Таким образом все методы и решения отдельных задач, известные в теории плоского ламинарного слоя, могут быть перенесены и в рассматриваемую пространственную задачу.

При определении напряжения трения τ_0 на поверхности тела нужно иметь в виду следующую зависимость:

$$\tau_0 = r\bar{\tau}_0 \tag{13}$$

где

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \qquad \bar{\tau}_0 = \mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)_{z=0}$$

Поступила в редакцию
19 VI 1946

L. I. STEPANOV.—SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'UNE COUCHE LIMITE LAMINAIRE POUR LE MOUVEMENT AVEC UNE SYMÉTRIE AXIALE

Cet article est consacré à un lien existant entre les problèmes de deux et de trois dimensions dans la théorie mathématique d'une couche limite laminaire.

ЛИТЕРАТУРА

1. Современные проблемы гидроаэродинамики. ОГИЗ. Т.1. 1943.