

ПРИМЕР ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ВИХРЕВОЙ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

И. А. Кибель

(Москва)

Уравнения плоской стационарной задачи газовой динамики имеют вид

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, & u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\
 \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, & u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} p^{\frac{1}{\kappa}} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} p^{\frac{1}{\kappa}} \right) &= 0
 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u, v — компоненты скоростей по осям координат x и y соответственно, p — давление, ρ — плотность, $\kappa = c_p / c_v$ — отношение теплоемкостей. Уравнение непрерывности позволяет ввести функцию тока из равенств

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

Последнее из уравнений (1) дает

$$p^{\frac{1}{\kappa}} = \vartheta(\psi) \quad (3)$$

где ϑ — некоторая функция только ψ . Первые два из уравнений (1) дают закон Бернулли

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \vartheta p^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} = i_0(\psi) \quad (4)$$

где i_0 — функция от ψ , и уравнение для вихря

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\rho \left(\frac{di_0}{d\psi} - \frac{\kappa}{\kappa - 1} p^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \frac{d\vartheta}{d\psi} \right) \quad (5)$$

Для решения вихревой задачи, в которой по крайней мере одна из производных $di_0/d\psi$ и $d\vartheta/d\psi$ отлична от нуля, удобно перейти от независимых переменных x, y к переменным $x^* = x$ и ψ . При этом уравнения (2) и (5) примут вид¹

$$\frac{\partial y}{\partial x^*} = \frac{v}{u}, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{\rho u}, \quad \frac{\partial p}{\partial \psi} = -\frac{\partial v}{\partial x^*} \quad (6)$$

Задача сводится к определению пяти функций u, v, p, ρ, y от x^* и ψ из пяти уравнений (3), (4), (6).

¹ См., например, Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика. Ч. II (1941). Стр. 80.

Пользуясь последним из уравнений (6), введем функцию χ с помощью равенств

$$p = \frac{\partial \chi}{\partial x^*}, \quad v = -\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \quad (7)$$

Тогда первые уравнения (6) на основании (3) и (4) примут вид

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \left[2i_0 - \frac{2x}{x-1} \wp \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^{\frac{x-1}{x}} - \left(\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \wp \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[2i - \frac{2x}{x-1} \wp \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^{\frac{x-1}{x}} - \left(\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем звездочки у x опущены.

Дифференцируя уравнение (8) по ψ , а уравнение (9) по x , можно исключить y и получить одно уравнение для функции χ .

Чтобы получить пример точного решения нашей системы уравнений, положим $i_0 = \text{const}$,

$$\chi = -H(\psi) x^{-\frac{x-1}{x+1}} \quad (10)$$

где H — некоторая функция от ψ , подлежащая определению. Уравнения (8) и (9) нам дадут тогда

$$\frac{\partial y}{\partial x} = H' x^{-\frac{x-1}{x+1}} \left\{ 2i_0 - \left[\frac{2x}{x-1} \wp \left(\frac{x-1}{x+1} H \right)^{\frac{x-1}{x}} + H'^2 \right] x^{-2\frac{x-1}{x+1}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \wp \left(\frac{x-1}{x+1} H \right)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{2}{x+1}} \left\{ 2i_0 - \left[\frac{2x}{x-1} \wp \left(\frac{x-1}{x+1} H \right)^{\frac{x-1}{x}} + H'^2 \right] x^{-2\frac{x-1}{x+1}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Продифференцируем (11) по ψ , а (12) по x и соберем члены при одинаковых степенях x . После простых преобразований получим

$$\wp \left(\frac{x-1}{x+1} H \right)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{x+1}{2}} H'' = \frac{x+1}{2} H''', \quad H' (H'^2 + x H H'')' = -(x-1) H'' (H'^2 + x H H'') \quad (13)$$

Последовательная интеграция второго из уравнений (13) дает

$$H'^2 + x H H'' = C_1 H^{1-x}, \quad H = C_2 (C_1 - H'^{1+x})^{-\frac{x}{1+x}} \quad (14)$$

Из последнего равенства зависимость между ψ и H можно найти с помощью квадратуры. Но [мы этого [не будем делать потому, что удобнее ввести нумерацию линий тока непосредственно по H' , а не по ψ .

Действительно, (14) дает H в функции от H' и, пользуясь равенством (13), позволяет найти \wp через H' в виде

$$\wp = \frac{x-1}{2x} \left(C_2 \frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1-x}{x}} H'^{1-x} (C_1 - H'^{1+x})^{\frac{2x}{x+1}} \quad (15)$$

Подставляя в (11) и интегрируя, для линий тока получим

$$y = \int H' x^{-\frac{x-1}{x+1}} \left[2i_0 - C_1 H'^{1-x} x^{-2\frac{x-1}{x+1}} \right]^{-\frac{1}{2}} dx + F(H') \quad (16)$$

Сравнение с (12) покажет, что $F = \text{const}$ и без ущерба для общности можно принять $F \equiv 0$

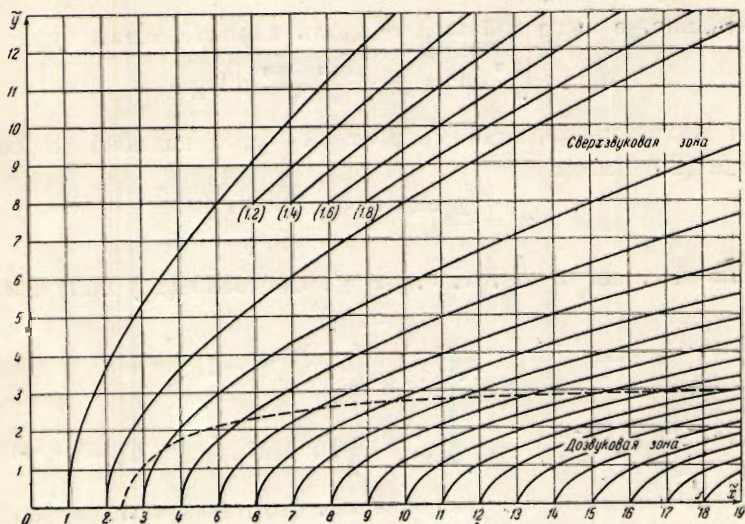
Для определения u, v, p и ρ имеем

$$u^2 = 2i_0 - C_1 H'^{1-x} x^{2 \frac{1-x}{1+x}}, \quad v = H' x^{-\frac{x-1}{x+1}} \tag{17}$$

$$p = C_2 (C_1 - H'^{1+x})^{-\frac{x}{1+x}} x^{-\frac{2x}{1+x}} \tag{18}$$

$$\rho = \frac{2x}{x-1} C_2 (C_1 - H'^{1+x})^{-\frac{2x+1}{x+1}} H'^{x-1} x^{-\frac{2}{1+x}} \tag{19}$$

Для упрощения удобно ввести безразмерные переменные \tilde{x} и \tilde{y} , а вместо



Фиг. 1.

H' ввести величину η с помощью следующих равенств

$$x = L\tilde{x}, \quad y = L\tilde{y}, \quad H'^{1+x} = C_1 \frac{1}{\eta^2} \tag{20}$$

где

$$L = (2i_0)^{-\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} C_1^{\frac{1}{x-1}} \tag{21}$$

тогда уравнения (16) и (17) примут следующий простой вид:

$$\tilde{y} = \int [m^{2 \frac{x-1}{x+1}} - 1]^{-\frac{1}{2}} dm, \quad \tilde{x} = \eta m(\tilde{y}) \tag{22}$$

$$u^2 = 2i_0 (1 - m^{-\frac{2x-1}{x+1}}), \quad v = \sqrt{2i_0} \frac{1}{\eta} m^{-\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{2i_0} \frac{1}{\tilde{x}} m^{\frac{2}{x+1}} \tag{23}$$

Если $x = 1.4$, то интеграл в (22) берется и мы получаем

$$y = 6 \sqrt{\sqrt[3]{m} - 1} \left[1 + \frac{2}{3} (\sqrt[3]{m} - 1) + \frac{1}{5} (\sqrt[3]{m} - 1)^2 \right] \tag{24}$$

и, следовательно, легко построить линии тока.

На фиг. 1 нанесены линии тока для $\eta = 1, 2, 3, \dots, 19$.

Такое движение обладает как сверх-, так и дозвуковыми скоростями.

Действительно, линия перехода (показана на фиг. 1 пунктиром) получится, если положить

$$u^2 + v^2 = 2 \frac{z-1}{z+1} i_0$$

т. е. это будет

$$1 - m^{-2 \frac{z-1}{z+1}} + \frac{1}{\eta^2} m^{-2 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z-1}{z+1}, \quad \text{или} \quad m^{2 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1}{2} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) \quad (25)$$

Без труда можно построить характеристики в плоскостях xu и w . Вместо уравнения эпициклоид в плоскости uw мы имеем в рассматриваемом случае более сложное уравнение.

Действительно, в вихревой задаче вдоль характеристик будет

$$d\beta \mp \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\omega} d\omega = \pm \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{x-1} d \log \vartheta \quad (26)$$

где α — угол Маха, ω — величина скорости, β — угол наклона скорости к оси x . Из уравнений (23) имеем

$$\eta^2 = \frac{2i_0 - u^2}{i_0^2} = \frac{2i_0 - \omega^2 \cos^2 \beta}{\omega^2 \sin^2 \beta} \quad (27)$$

Но ϑ зависит лишь от H' , т. е. от η^2 . Согласно (15) получим

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{x-1}{2x} \left(C_2 \frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1-x}{x}} C_1 \frac{1}{\eta^2} (\eta^2 - 1)^{\frac{2x}{x+1}} = \\ &= \frac{x-1}{2x} \left(C_2 \frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1-x}{x}} \frac{C_1}{2i_0 - \omega^2 \cos^2 \beta} (\omega^2 \sin^2 \beta)^{-\frac{x-1}{x+1}} (2i_0 - \omega^2)^{\frac{2x}{x+1}} \end{aligned} \quad (28)$$

Вставляя это значение ϑ в правую часть (26), получим дифференциальное уравнение для характеристик в плоскости $\beta\omega$.

Наконец возникает вопрос, можно ли получить такое вихревое движение путем перехода через поверхность сильного разрыва какого-то другого, но уже безвихревого движения. На этот вопрос можно ответить утвердительно. Именно, вспомним, что на поверхности разрыва должны между прочим выполняться соотношения

$$\frac{p_+}{\rho_-} = \frac{x-1}{x+1} + \frac{2x}{x+1} \frac{p_+}{\rho_+ \theta_+^2}, \quad \frac{p_-}{\rho_+} = 1 + \frac{2}{x+1} \left(1 - \frac{x p_+}{\rho_+ \theta_+^2}\right) \frac{\rho_+ \theta_+^2}{p_+} \quad (29)$$

где p_+ , ρ_+ , θ_+ — давление, плотность и скорость распространения поверхности разрыва по одну сторону от этой поверхности, а p_- , ρ_- — давление и плотность по другую сторону. Величины p_+ , ρ_+ можно взять из нашего вихревого движения. Величина θ_+ найдется через элементы, описывающие наше движение, и через наклон поверхности разрыва. Наконец, p_- , ρ_- можно связать соотношением $p_-^{1/x} = \vartheta_1 \rho_-$, где ϑ_1 — постоянная (до некоторой степени произвольная) величина (слева от поверхности разрыва движение безвихревое).

Так как

$$\left(\frac{p_-}{p_+}\right)^{\frac{1}{x}} \frac{\rho_+}{\rho_-} = \frac{\vartheta_1}{\theta_+}, \quad (30)$$

то мы получим

$$\left(M - \frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x-1}{2x} + \frac{1}{M}\right) = G \eta^2 (\eta^2 - 1)^{-\frac{2x}{x+1}} \quad (31)$$

где

$$G = \frac{\vartheta_1}{C_1} G_2^{\frac{1}{2}-1} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \left(\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}, \quad M = \frac{p_+ \theta_+^2}{p_+} \quad (32)$$

Так как

$$-\theta_+ = u_+ \cos \delta + v_+ \sin \delta$$

где δ — угол, составляемый с осью x нормалью к поверхности разрыва (нормаль направлена в сторону «положительной» области), то мы можем выразить M через известные величины и через δ .

Выражая $\operatorname{tg} \delta$ через производную от \tilde{x} по η вдоль поверхности разрыва, используя (22), (18) и (19), получим после простых преобразований дифференциальное уравнение, служащее для определения поверхности разрыва ($x = 1.4$):

$$\frac{dm}{d\eta} = \frac{m \sqrt{\sqrt[m]{m}-1}}{1+\eta^2 (\sqrt[m]{m}-1)} \left\{ -\eta \sqrt{\sqrt[m]{m}-1} \pm \sqrt{\frac{7}{6} \frac{1+\eta^2 (\sqrt[m]{m}-1)}{M(\eta^2-1)}} - 1 \right\} \quad (33)$$

Здесь M выражается через η^2 из трансцендентного уравнения (31), в котором постоянная G в большой степени произвольна. Скорость в «отрицательной» области мы можем определить сперва на поверхности разрыва, а затем распространять их на отрицательную область обычным графическим методом Буземана. Мы получим модель движения вокруг контура, обладающего углом.

Из угла выходит поверхность разрыва, после прохождения которой движение обращается в исследованное нами вихревое движение.

Решение, аналогичное построенному, можно получить и для задачи с осевой симметрией. Принимая за независимые переменные расстояние $r^* = r$ от оси симметрии z и функцию тока ψ , легко получить

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{v_z}{v_r}, \quad \frac{\partial z}{\partial r^*} = \frac{1}{r^* \rho v_r} \quad (34)$$

где v_r и v_z составляющие скоростей; причем попрежнему будет

$$\frac{1}{\rho^x} = \vartheta(\psi) \rho$$

Закон Бернулли будет иметь вид

$$\frac{1}{2} (v_r^2 + v_z^2) + \frac{x\vartheta}{x-1} p^{\frac{x-1}{x}} = i_0$$

Уравнения Эйлера дают

$$\frac{\partial v_z}{\partial r^*} = \frac{\partial r^* p}{\partial \psi}$$

Следовательно можно ввести функцию $\chi(r^*, \psi)$, из условий

$$v_z = -\frac{\partial \chi}{\partial \psi}, \quad p = \frac{1}{r^*} \frac{\partial \chi}{\partial r^*} \quad (35)$$

Уравнения (34) и (35) позволяют теперь написать (верхние звездочки при r в дальнейшем опускаются)

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = -\frac{\partial \chi}{\partial \psi} \frac{1}{v_r}, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = r^{-\frac{x+1}{x}} \vartheta(\psi) \left(\frac{\partial \chi}{\partial r}\right)^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{v_r} \quad (36)$$

где

$$v_r = \left[2i_0 - \frac{2z}{z-1} \vartheta(\psi) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right)^{\frac{z-1}{z}} - \left(\frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Исключая z из (36), получим одно уравнение для определения функции χ . Частные решения, аналогичные решениям в первом случае, можно построить, отыскивая χ в виде

$$\chi = -r^{-2 \frac{z-1}{z+1}} H(\psi)$$

Поступила в редакцию
20 X 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

I. A. KIEBEL.—EXACT SOLUTIONS OF EQUATIONS OF GAS DYNAMICS

One of the most important problems in gas dynamics is finding solutions yielding subsonic velocities for one part of space and supersonic for the other.

A number of solutions for the problem have been given for non-vortex flow.

The present work gives a procedure for finding cases of exact solutions in the subsonic and supersonic domains for vortex flows. The solutions are obtained by means of quadratures. An analysis of these solutions reveals principle distinctions as compared with those for non-vortex flows.