Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

О СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА КОЛЕБЛЮЩИЙСЯ ПРОФИЛЬ КРЫЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

И. А. Паничкин

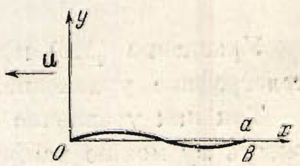
(Москва)

Впервые задачу о малых гармонических колебаниях профиля крыла в сверхзвуковом потоке газа рассматривал Борбели [1], отправляясь от известных частных решений линеаризированного уравнения для потенциала скоростей.

Для исследования этого же вопроса в настоящей работе используется преобразование [1], которое приводит основное дифференциальное уравнение для потенциала скоростей к хорошо изученному телеграфному уравнению.

1. Рассмотрим тонкий, слабо изогнутый профиль крыла, совершающий поступательное движение со сверхзвуковой скоростью U и колебательное движение с малыми амплитудами. Пусть x, y — подвижные оси координат, связанные с профилем. Начало этих осей поместим в носике профиля крыла (фиг. 1). Обозначим

$$p_1 = p_0 + p, \qquad \rho_1 = \rho_0 + \rho \tag{1.1}$$



Фиг. 1.

где p_0 — давление и ρ_0 — плотность, соответствующие невозмущенному потоку газа.

Обозначим проекции вектора абсолютной скорости на оси координат

$$V_x = -U + u, \qquad V_y = v \tag{1.2}$$

Предполагаем, что колеблющийся профиль вызывает в газе незначительные возмущения, поэтому величины p, ρ, u и v будем считать малыми первого порядка.

Если предполагать возмущенное движение газа потенциальным, то для потенциала скоростей Φ линеаризированное дифференциальное уравнение, отнесенное к подвижным осям, записывается в виде [1]

$$N^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{2M}{c}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (N = \sqrt{M^2 - 1}) \tag{1.3}$$

где M — число Маха набегающего потока, $c = \sqrt{(dp\,/\,d\rho)_0}$ — скорость звука.

На поверхности крыла должно выполняться условие обтекания

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = V_0(x) + V(x)\,e^{-i\omega t} \qquad (V = V_1 + iV_2) \tag{1.4}$$

---

[1] Это преобразование хорошо известно в задачах математической физики; к рассматриваемому вопросу его применила Е. А. Красильщикова, а для дозвукового потока М. Д. Хаскинд (см. статьи в этом выпуске стр. 147 и 1[illegible]9).

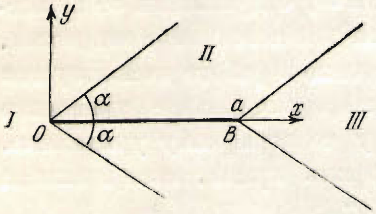
где $V_0(x)$ — нормальная составляющая скорости какой-либо точки профиля, соответствующая поступательному движению, а $V(x)\exp(-i\omega t)$ — нормальная составляющая, соответствующая колебаниям крыла с частотой ω.

Заметим, что здесь и в дальнейших выражениях, содержащих комплексный множитель $\exp(-i\omega t)$ $\left(i=\sqrt{-1}\right)$, следует подразумевать только действительную часть.

Считая возмущенное колебательное движение газа установившимся, представим потенциал скоростей в виде [2]

$$\Phi=\Phi_0+\varphi(x,y)\,e^{-i(\omega t-kx)} \qquad \left(k=\frac{\omega M}{cN^2}\right) \tag{1.5}$$

где $\Phi_0(x,y)$ — потенциал скоростей, отвечающий установившемуся поступательному движению профиля крыла, на определении которого мы не будем останавливаться (этот случай разобран Акеретом), а $\varphi\exp i(kx-\omega t)$ — потенциал скоростей, отвечающий колебаниям крыла.



Фиг. 2.

Подставляя (1.5) в (1.3) и (1.4), получим для φ уравнение

$$N^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\omega^2}{c^2N^2}\varphi=0 \tag{1.6}$$

и граничное условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=V(x)\,e^{-ikx} \qquad (y=0) \tag{1.7}$$

Уравнение (1.6) представляет собой известное в математической физике телеграфное уравнение, легко решаемое посредством функции Римана.

Так как уравнение (1.6) принадлежит к гиперболическому типу, то плоскость xy можно разбить на три характерные области (фиг. 2).

Первая область — впереди носика профиля, ограниченная линиями Маха, исходящими из носика. Возмущение, исходящее от колеблющегося профиля, на поток газа в этой области не распространяется ($\varphi=0$).

Вторая область — ограниченная линиями Маха, исходящими из передней и задней кромок профиля крыла.

Третья область — за задней кромкой крыла, ограниченная линиями Маха, исходящими из задней кромки, и заключающая в себе линию разрыва горизонтальных скоростей, схематизирующую поток вихрей, сходящих с поверхности профиля крыла.

Для определения аэродинамических сил, действующих на профиль крыла, надо, чтобы потенциал скоростей φ был нечетной функцией от y. Эти силы зависят от значения φ в точках верхней поверхности профиля крыла и его первой производной по x при $y=0$, причем при их определении приходится учитывать только возмущения во второй области.

Переходя в уравнении (1.6) к характеристическим координатам и пользуясь обобщенной формулой Грина [3], получим выражение для $\varphi(x,+0)$ в точках профиля крыла:

$$\varphi(x,+0)=-\frac{1}{N}\int\limits_0^x J_0(\vartheta)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,d\tau \qquad \left(\vartheta=\sigma x-\sigma\tau;\ \sigma=\frac{\omega}{cN}\right) \tag{1.8}$$

где $J_0(\vartheta)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Из формулы (1.8) имеем

$$\frac{\partial\varphi(x, +0)}{\partial x} = -\frac{\sigma}{N}\int_0^x J_0'(\vartheta)\frac{\partial\varphi}{\partial y}d\tau - \frac{1}{N}\frac{\partial\varphi}{dy}dy \qquad \left(J_0'(\vartheta) = \frac{dJ_0(\vartheta)}{d\vartheta}\right) \tag{1.9}$$

Пользуясь выражениями (1.8) и (1.9), вычислим подъемную силу и момент, обусловленные колебаниями крыла в сверхзвуковом потоке газа.

Давление, возникающее в результате колебаний профиля крыла, согласно закону Бернулли, отнесенное к подвижным осям, будет

$$p^* = p + \rho_0 U\frac{\partial\Phi_0}{\partial t} = -\rho_0 U\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + ir\varphi\right)e^{-i(\omega t - kx)} \qquad \left(r = \frac{\omega}{UN^2}\right) \tag{1.10}$$

Поэтому подъемная сила профиля крыла

$$Y - Y_0 = -2\int_0^a p^*(x, +0)\,dx = 2\rho_0 U e^{-i\omega t}\int_0^a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + ir\varphi\right)_{y=+0}e^{ikx}dx \tag{1.11}$$

и момент относительно носика профиля

$$L - L_0 = -2\int_0^a p^*(x, +0)\,x\,dx = 2\rho_0 U e^{-i\omega t}\int_0^a x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + ir\varphi\right)_{y=+0}e^{ikx}dx \tag{1.12}$$

где Y_0 и L_0 — подъемная сила и момент, соответствующие поступательному движению профиля крыла со скоростью U.

Подставляя (1.8) и (1.9) в (1.11) и (1.12) получим

$$Y - Y_0 = \frac{2\rho_0 U}{N}e^{-i\omega t}\left[i\gamma\int_0^a e^{ikx}T(x)\,dx - e^{ika}T(a)\right] \qquad \left(\gamma = \frac{\omega}{U}\right) \tag{1.13}$$

$$L - L_0 = \frac{2\rho_0 U}{N}e^{-i\omega t}\left[i\gamma\int_0^a e^{ikx}T(x)\,x\,dx + \int_0^a e^{ikx}T(x)\,dx - ae^{ika}T(a)\right] \tag{1.14}$$

где

$$T(x) = \int_0^x J_0(\vartheta)V(\tau)\,e^{-ik\tau}d\tau \tag{1.15}$$

Если известен закон изменения подъемной силы $Y - Y_0$ с течением времени и средний угол наклона профиля с направлением скорости U, тогда вычисление волнового сопротивления не представляет труда.

Пусть профиль крыла относительно подвижных осей задан уравнением

$$y = f_0(x) + f(x)\,e^{-i\omega t} \qquad (f = f_1 + if_2) \tag{1.16}$$

где ω — частота колебаний профиля относительно подвижных осей, $f_0(x)$ — уравнение профиля при отсутствии его колебаний.

В подвижных осях скорость частиц профиля по оси y будет

$$\frac{dy}{dt} = U\frac{df_0}{dx} + U\left(\frac{df}{dx} - i\gamma f\right)e^{-i\omega t} \tag{1.17}$$

Граничные условия на профиле крыла переносим (с точностью до малых величин высшего порядка) на отрезок оси x, длины, равной хорде a.

При движении профиля крыла скорость какой-нибудь его точки должна равняться скорости частицы газа, примыкающей к соответствующей точке профиля. Сравнивая (1.4) и (1.17), находим

$$V(x) = U\left(\frac{df}{dx} - i\gamma f\right) \tag{1.18}$$

Применим общие формулы (1.13) и (1.14) к двум частным случаям колебаний профиля крыла.

2. Предположим, что угол атаки профиля крыла меняется по гармоническому закону. Уравнение профиля задано в виде [4]

$$y = (\beta_0 + \beta_1 e^{-i\omega t})\, x \tag{2.1}$$

где $f_0(x) = \beta_0 x,\ f(x) = \beta_1 x$.

Поэтому (1.18) запишется

$$V(x) = U\beta_1(1 - i\gamma x) \qquad \left(\gamma = \frac{\omega}{U}\right) \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в выражения (1.13) и (1.14) и беря действительные части, получим подъемную силу

$$Y - Y_0 = -\frac{2\rho_0\beta_1 U^2}{N}\left\{\left[c_0(a) + \gamma s_1(a) + \gamma\int_0^a (s_0 - \gamma c_1)\,dx\right]\cos\omega t + \right.$$

$$\left. + \left[s_0(a) - \gamma c_1(a) - \gamma\int_0^a (c_0 + \gamma s_1)\,dx\right]\sin\omega t\right\} \tag{2.3}$$

и момент относительно передней кромки профиля

$$L - L_0 =$$

$$= -\frac{2\rho_0\beta_1 U^2}{N}\left\{\left[ac_0(a) + \gamma a s_1(a) + \gamma\int_0^a (s_0 - \gamma c_1)\,x\,dx - \int_0^a (c_0 + \gamma s_1)\,dx\right]\cos\omega t + \right.$$

$$\left. + \left[as_0(a) - \gamma a c_2(a) - \gamma\int_0^a (c_0 + \gamma s_1)\,x\,dx - \int_0^a (s_0 - \gamma c_1)\,dx\right]\sin\omega t\right\} \tag{2.4}$$

где обозначено

$$\Gamma_0(x) = c_0(x) - is_0(x) = \int_0^a J_0[\sigma(x - \tau)]\, e^{-ik(x-\tau)}\,d\tau \tag{2.5}$$

$$\Gamma_1(x) = c_1(x) - is_1(x) = \int_0^a J_0[\sigma(x - \tau)]\, e^{-ik(x-\tau)}\,\tau\,d\tau \tag{2.6}$$

Предполагая, что частота ω очень мала по сравнению со скоростью U, можем считать, что коэффициент γ в формулах (2.3) и (2.4) близок к нулю.

Пренебрегая коэффициентом γ в формулах (2.3) и (2.4), получим

$$Y - Y_0 = -\frac{2\rho_0\beta_1 U^2}{N}\left[c_0(a)\cos\omega t + s_0(a)\sin\omega t\right] \tag{2.7}$$

$$L - L_0 = -\frac{2\rho_0\beta_1 U^2}{N}\left\{\left[ac_0(a) - \int_0^a c_0(x)\,dx\right]\cos\omega t + \left[as_0(a) - \int_0^a s_0(x)\,dx\right]\sin\omega t\right\} \tag{2.8}$$

3. Рассмотрим случай машущего профиля крыла.

Пусть уравнение профиля в подвижных осях задано уравнением [4]

$$y = \beta_0 x + \beta_1 e^{-i\omega t} \tag{3.1}$$

где $f_0(x) = \beta_0 x$, $f = \beta_1$. Следовательно,

$$V(x) = -i\omega\beta_1 \tag{3.2}$$

Подъемная сила и момент соответственно будут (3.3)

$$Y - Y_0 = \frac{2\rho_0\beta_1\omega U}{N}\left\{\left[-s_0(a) + \gamma\int_0^a c_0(x)\,dx\right]\cos\omega t + \left[c_0(a) + \gamma\int_0^a s_0(x)\,dx\right]\sin\omega t\right\}$$

$$L - L_0 = \frac{2\rho_0\beta_1\omega U}{N}\left\{\left[-as_0(a) + \int_0^a s_0(x)\,dx + \gamma\int_0^a c_0(x)\,x\,dx\right]\cos\omega t + \right. \tag{3.4}$$

$$\left. + \left[ac_0(a) - \int_0^a c_0(x)\,dx + \gamma\int_0^a s_0(x)\,x\,dx\right]\sin\omega t\right\}$$

Если γ очень мало, то формулы (3.2) и (3.4) можно будет записать

$$Y - Y_0 = \frac{2\rho_0\beta_1\omega U}{N}\left[c_0(a)\sin\omega t - s_0(a)\cos\omega t\right] \tag{3.5}$$

$$L - L_0 = \frac{2\rho_0\beta_1\omega U}{N}\left\{\left[ac_0(a) - \int_0^a c_0(x)\,dx\right]\sin\omega t + \left[-as_0(a) + \int_0^a s_0(x)\,dx\right]\cos\omega t\right\}$$

Вычисление подъемной силы и момента для разобранных двух частных колебаний профиля связано с вычислением функций $s_0(x)$, $c_0(x)$, $s_1(x)$ и $c_1(x)$.

4. Можно показать, что между функциями $\Gamma_0(x)$ и $\Gamma_1(x)$, определяемыми формулами (2.5) и (2.6), существует зависимость

$$\Gamma_1(x) = c_1(x) - is_1(x) = \left(x + \frac{ik}{k^2 - \sigma^2}\right)\Gamma_0(x) + \frac{xe^{-ikx}}{k^2 - \sigma^2}\left[\sigma J_1(\sigma x) - ikJ_0(\sigma x)\right] \tag{4.1}$$

где J_1—функция Бесселя первого порядка.

Из формулы (4.1) видно, что если функция $\Gamma_0(x)$ будет определена, то тем самым будут определены функции $s_1(x)$ и $c_1(x)$.

Разложим функцию Бесселя $J_0(\nu u)$ в ряд [5]

$$J_0(\nu u) = \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(1-\nu^2)^\mu}{\mu!\,2^\mu}J_\mu(u)\,u^\mu \quad \left(\nu = \frac{\sigma}{k}\right) \tag{4.2}$$

Подставляя ряд (4.2) в формулу (2.5), получим

$$\Gamma_0(x) = \frac{1}{k}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(1-\nu^2)^\mu}{\mu!\,2^\mu}\int_0^{kx} e^{-iu}J_\mu(u)\,u^\mu\,du \tag{4.3}$$

Взяв интеграл в (4.3) по частям, найдем

$$\int_0^{kx} e^{-iu}J_\mu(u)\,u^\mu\,du = \frac{(kx)^{\mu+1}e^{-ikx}}{2\mu+1}\left[J_\mu(kx) + iJ_{\mu+1}(kx)\right] \tag{4.4}$$

Пользуясь формулой (4.4), функцию $\Gamma_0(x)$, определяемую формулой (2.5), можем записать

$$\Gamma_0(x) = c_0(x) - is_0(x) = \frac{1}{k} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(1-\nu^2)^\mu (kx)^{\mu+1} e^{-ikx}}{\mu!\, 2^\mu (2\mu+1)} [J_\mu(kx) + iJ_{\mu+1}(kx)] \tag{4.5}$$

Отделяя в (4.5) действительную и мнимую части, получим

$$c_0(x) = \frac{1}{k} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(1-\nu^2)^\mu (kx)^{\mu+1}}{\mu!\, 2^\mu (2\mu+1)} [J_\mu(kx) \cos kx + J_{\mu+1}(kx) \sin kx] \tag{4.6}$$

$$s_0(x) = \frac{1}{k} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(1-\nu^2)^\mu (kx)^{\mu+1}}{\mu!\, 2^\mu (2\mu+1)} [J_\mu(kx) \sin kx - J_{\mu+1}(kx) \cos kx] \tag{4.7}$$

Ряды (4.6) и (4.7) довольно быстро сходятся.

Зная $s_0(x)$ и $c_0(x)$, можем из (2.6) получить и функции $s_1(x)$ и $c_1(x)$: выраженные рядами по функциям Бесселя.

Поступила в редакцию
23 X 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

I. A. PANICHKIN. — FORCES ACTING ON AN OSCILLATING PROFILE IN A SUPERSONIC GAS FLOW

The paper discusses a supersonic gas flow past a thin, slightly bent, oscillating wing profile.

Potential of velocities in the moveable axes is determined by the differential equation (1.3). Equation (1.3) is reduced to (1.6) by means of formula (1.5). The potential of the velocities on the profile is found by the Riemann method and is given by formula (1.8). The lift force and the moment relative to the head edge of the profile arising out of oscillations of the profile is determined in general form by formulae (1.13) and (1.14).

The following two particular cases of oscillation are considered:

1. The angle of incidence of the profile varies according to the harmonic law. The lift force and the moment are given by formulae (2.3) and (2.4); for small frequencies of oscillation, by formulae (2.7) and (2.8).

2. The case of a flapping wing. The lift force and moment are given by formulae (3.3) and (3.4) respectively; and by (3.5) for small frequencies of oscillation.

ЛИТЕРАТУРА

1. Borbely S. Über die Luftkräfte, die auf einen harmonisch schwingenden zweidimensionalen Flügel bei Überschallgeschwindigkeit wirken. ZAMM. 1942. Bd. 22. Nr. 4.
2. Хаскинд М. Д. Теория колебаний крыла в дозвуковом потоке газа. Прикладная математика и механика. 1947. Т. XI. Вып. 1.
3. Кошляков Н. С. Основные дифференциальные уравнения математической физики ГОНТИ. 1933.
3. Кочин Н. Е. Об установившихся колебаниях крыла круговой формы в плане. Прикладная математика и механика. 1942. Т. VI. Вып. 4.
5. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ОГИЗ. 1943.