Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X. 1946

О МЕДЛЕННОМ ВРАЩЕНИИ ТЕЛ В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Е. И. Степанов
(Новочеркасск)

1. Пусть тело вращения, помещенное в вязкую несжимаемую жидкость, равномерно вращается вокруг оси симметрии столь медленно, что в дифференциальных уравнениях Навье-Стокса мы можем пренебречь влиянием инерционных членов.

Выбирая цилиндрическую систему осей координат x, r и θ с осью Ox, направленной по оси вращения тела, и полагая компоненты скорости жидкой частицы

$$v_x = 0, \qquad v_r = 0, \qquad v_\theta = v(x, r)$$

приводим дифференциальные уравнения Навье-Стокса к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{r^2} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{1}$$

где p — гидромеханическое давление, не зависящее в силу симметрии движения от угла θ и, как показывают два последние из приведенных равенств, остающееся неизменным для любой точки жидкости.

Из условия прилипания жидкости следует, что на поверхности вращающегося тела

$$v = \Omega r \tag{2}$$

где Ω — угловая скорость вращения тела.

Полагая

$$v = -\frac{\psi}{r} \tag{3}$$

приводим дифференциальное уравнение (1) к виду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \tag{4}$$

На поверхности вращающегося тела согласно (2) и (3)

$$\psi = -\Omega r^2 \tag{5}$$

Для компонентов вихря скорости (в цилиндрической системе осей координат) находим выражения

$$\omega_x = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \qquad \omega_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \omega_\theta = 0 \tag{6}$$

К решению уравнения (4) при пограничном условии типа (5) сводится, как известно [1], задача о равномерном поступательном движении тела вращения в идеальной несжимаемой жидкости. Вводимая там функция тока аналогична функции ψ, введенной нами, а линиям тока в идеальной жидкости отвечают линии вихря в рассматриваемой нами задаче. Скорости u поступательного движения тела в идеальной жидкости отвечает в нашем случае удвоенная угловая скорость вращения тела.

Зная функцию тока из решения задачи о поступательном движении тела вращения в идеальной жидкости, после замены поступательной скорости u на 2Ω находим функцию ψ, а вместе с тем по формуле (3) и скорость v для движения вязкой жидкости, вызванного медленным вращением в ней тела такой же формы.

2. Из известного выражения для диссипации энергии (Кочин [1], стр. 279), отнесенной к единицам объема и времени, для нашего случая находим

$$E = \mu \left[\omega_x{}^2 + \omega_r{}^2 - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r} \right)^2 \right]$$

где μ — коэффициент вязкости.

Диссипация энергии D для всего объема τ, занятого жидкостью, находится по формуле

$$D = \mu \iiint\limits_{\tau} (\omega_x{}^2 + \omega_r{}^2)\, d\tau - 2\mu \iiint\limits_{\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r} \right)^2 d\tau$$

Второй член, входящий в правую часть приведенного равенства, для безграничного объема жидкости, покоящийся на бесконечности ($\psi_\infty = 0$), допускает преобразование:

$$2\mu \iiint\limits_{\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r} \right)^2 d\tau = 4\pi\mu \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r} \right)^2 dr\, dx = -4\mu\Omega^2 Q$$

где Q — объем вращающегося тела (на поверхности тела $\psi = -\Omega r^2$).

Диссипации энергии можно (в этом случае) придать вид

$$D = 4\mu\, (1 + k)\, \Omega^2 Q \tag{7}$$

где величина k, аналогичная коэффициенту присоединенной массы, определяется из уравнения

$$2\mu k \Omega^2 Q = T$$

в котором величина T, аналогичная кинетической энергии жидкости, определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} \mu \iiint\limits_{\tau} (\omega_x{}^2 + \omega_r{}^2)\, d\tau \tag{8}$$

При нахождении величины T удобно вводить функцию φ, отвечающую потенциалу скоростей.

Так как вся энергия, затрачиваемая на поддержание равномерного вращения, диссипируется, то вращающий момент M, прилагаемый к телу, находим из равенства

$$M = \frac{D}{\Omega} = 4\mu\, (1 + k)\, \Omega Q \tag{9}$$

Мы рассмотрели случай безграничного объема жидкости, но не представляет затруднений рассмотрение и иных случаев.

Если тело вращается внутри замкнутой поверхности, ограничивающей объем пространства Q_2 и вращающейся с угловой скоростью Ω_2, то, как нетрудно показать:

$$D = 2T + 4\mu\, (\Omega_1{}^2 Q_1 - \Omega_2{}^2 Q_2)$$

где Q_1 и Ω_1 — объем и угловая скорость тела, а тройной интеграл, входящий в выражение для T, распространяется на объем, заключенный внутри граничных поверхностей.

3. Как пример рассмотрим вращение сплюснутого эллипсоида вращения внутри неподвижного софокусного эллипсоида вращения. Введем полуэллиптические координаты ξ, ζ и θ, связанные с цилиндрическими координатами соотношениями

$$x = c\xi\zeta, \qquad r = c\sqrt{(1 - \xi^2)(1 + \zeta^2)}, \qquad \theta = \theta$$

Полагая $\zeta = \text{const}$, получаем семейство эллипсоидов вращения, фокусы которых лежат в точках $x = 0$, $r = \pm c$.

Используя готовые результаты относительно функций тока и потенциала скоростей, указанные в курсе Лэмба [2] (стр. 133—135), и равенство (5), без труда находим

$$\psi = \frac{c}{2} (1 + \xi^2)(1 + \zeta^2)\, [A + B f(\zeta)], \qquad \varphi = \xi\zeta\, [A + BF(\zeta)]$$

где

$$f(\zeta) = \frac{\zeta}{1+\zeta^2} - \operatorname{arc\,ctg} \zeta, \qquad F(\zeta) = \frac{1}{\zeta} - \operatorname{arc\,ctg} \zeta$$

а постоянные A и B, определенные из граничных условий, имеют вид

$$A = \frac{2\Omega c f_1}{f_0 - f_1}, \qquad B = \frac{2\Omega}{f_1 - f_0} \qquad \left(f_i = f(\zeta_i) \atop i=0,\,1 \right)$$

Внешний эллипсоид (неподвижный) определяется координатой ζ_1, внутренний, вращающийся с угловой скоростью Ω, — координатой ζ_0. Коэффициент k присоединенной массы определяется формулой

$$k = \frac{F_1 - f_1}{f_0 - f_1}$$

По формуле (9), приложимой в данном случае (внешний эллипсоид неподвижен), находим

$$M = \frac{4\mu\Omega Q_0}{\zeta_0 (1 + \zeta_0^2)} \frac{1}{f_1 - f_0}$$

Обозначая через a и b меньшую и большую полуоси эллипсоида вращения, будем иметь

$$a = c\zeta, \qquad b = c\sqrt{1+\zeta^2}, \qquad e = (1+\zeta^2)^{-1/2}, \qquad Q = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

где e — эксцентриситет эллипсоида.

После несложных преобразований имеем

$$M = \frac{16}{3}\pi\mu\Omega \frac{c^3}{f_1 - f_0}$$

где

$$f_i = e_i\sqrt{1 - e_i^2} - \arcsin e_i$$

Полагая в приведенной формуле

$$\zeta_0 = 0, \qquad c = b_0, \qquad e_0 = 1$$

получим решение задачи о вращении диска радиуса b_0 внутри сплюснутого эллипсоида вращения. Вращающий момент M для этого случая имеет вид

$$M = \frac{16}{3}\pi\mu\Omega \frac{b_0^3}{f_1 + {}^1/_2\pi}$$

Если диск вращается в неограниченном пространстве, то, полагая $e_1 = 0$, находим

$$M = \frac{32}{3}\mu\Omega b_0^3$$

Поступила в редакцию
19 VI 1946

E. I. STEPANOV. — SUR LA ROTATION LENTE DES SOLIDES DANS LIQUIDE VISQUEUX

Cet article est consacré à l'analogie entre le problème mentionné dans le titre et celui du mouvement de translation d'un solide de révolution le long de son axe de symétrie dans un liquide parfait.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. и др. Теоретическая гидромеханика. ОНТИ. 1937. Ч. II.
2. Lamb. Hydrodynamics. Cambridge. 1930.