Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНОК ИЗ СЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

И. П. Кунце

(Москва)

Рассмотрим пластинку толщиной $2h$, сжатую в направлении оси x до предела упругости материала σ_s. При неразвитых пластических деформациях будем иметь (ν — коэффициент Пуассона)

$$\sigma_x = -\sigma_s, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \varepsilon_x = -\frac{\sigma_s}{E}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = \nu\frac{\sigma_s}{E}, \quad \gamma_{xy} = 0 \tag{1}$$

При потере устойчивости в одной части ($h > z > z_0$) пластические деформации будут дальше развиваться, в другой части ($z_0 > z > -h$) произойдет разгрузка.

Согласно теории пластичности Генки-Мизеса

$$\begin{gathered}\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 \qquad \frac{\sigma_x}{\varepsilon_y - \varepsilon_z} = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y - \varepsilon_z} = \frac{2\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}\\ \sigma_x + \sigma_y = k(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\end{gathered} \tag{2}$$

где k — модуль объемной деформации; поэтому для малых изменений напряжений получим: в области пластических деформаций

$$\delta\sigma_x = \frac{E}{5-4\nu}(\delta\varepsilon_x + 2\delta\varepsilon_y), \quad \delta\sigma_y = \frac{2E}{5-4\nu}(\delta\varepsilon_x + 2\delta\varepsilon_y), \quad \delta\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\delta\gamma_{xy} \tag{3}$$

в области упругих деформаций (пользуясь законом Гука)

$$\delta\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\delta\varepsilon_x + \nu\,\delta\varepsilon_y), \quad \delta\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\,\delta\varepsilon_x + \delta\varepsilon_y), \quad \delta\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\delta\gamma_{xy} \tag{4}$$

При переходе пластинки от плоской формы равновесия к искривленной, считая усилия

$$T_1 = \int_{-h}^{+h}\sigma_x\,dz, \qquad T_2 = \int_{-h}^{+h}\sigma_y\,dz, \qquad S = \int_{-h}^{+h}\tau_{xy}\,dz$$

неизменными, имеем соотношение $\varepsilon_1 = -2\varepsilon_2$ и уравнение

$$\frac{E(h+z_0)^2}{2(1-\nu^2)}\left[(2-\nu)\varkappa_1 - (1-2\nu)\varkappa_2\right] = 0 \tag{5}$$

из которого следует, что $z_0 = -h$, т. е. область упругих деформаций отсутствует.

Дифференциальное уравнение равновесия пластинки

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = -2h\sigma_s\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{6}$$

где

$$M_1 = \int_{-h}^{+h} z\,\delta\sigma_x\,dz, \qquad H = \int_{-h}^{+h} z\,\delta\tau_{xy}\,dz, \qquad M_2 = \int_{-h}^{+h} z\,\delta\sigma_y\,dz \tag{7}$$

при подстановке формул (3) и (4) приводится к виду

$$\frac{8Eh^3}{3(5-4\nu)}\left(\frac{1}{4}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{7-2\nu}{2(1+\nu)}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + 2h\sigma_s\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{8}$$

При $\nu = 0.5$ уравнение обращается в частный вид общих уравнений А. А. Ильюшина [1] для случая пластинки из несжимаемого материала, лишенного упрочнения.

Для весьма длинной прямоугольной пластинки, сжатой до предела упругости в направлении оси x $(0 \leqslant x \leqslant l)$ (стороны, параллельные оси y $(-b \leqslant y \leqslant b)$ предполагаем шарнирно опертыми, стороны, параллельные оси x, — свободными), решение уравнения (8) ищем в форме

$$w = w_0 \sin \frac{\pi x}{l} f\left(\frac{\pi y}{l}\right) \tag{9}$$

где f определяется дифференциальным уравнением

$$f^{\mathrm{VI}}(\eta) - \frac{7-2\nu}{2(1+\nu)} f''(\eta) - \frac{3(5-4\nu)}{4\pi^2} \frac{l^2 \sigma_s}{h^2 E} f(\eta) = 0 \tag{10}$$

при выполнении граничных условий

$$\frac{1}{2} f(\beta) - f''(\beta) = 0, \quad \gamma f'(\beta) - f'''(\beta) = 0 \qquad \left(\eta = \frac{\pi y}{l},\ \beta = \frac{\pi b}{l},\ \gamma = \frac{6-3\nu}{2(1+\nu)}\right) \tag{11}$$

Отличное от нуля решение получается при условии

$$\left(\frac{1}{2} - \lambda^2\right)(\gamma - \mu^2)\, \mu \operatorname{ch} \lambda\beta \operatorname{sh} \mu\beta = \left(\frac{1}{2} - \mu^2\right)(\gamma^2 - \lambda^2)\, \lambda \operatorname{ch} \mu\beta \operatorname{sh} \lambda\beta \tag{12}$$

где

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} + \alpha + q,\ \mu^2 = \frac{1}{2} + \alpha - q,\ \alpha = \frac{5-4\nu}{4(1+\nu)},\ q = \sqrt{\alpha + \alpha^2 + u},\ u = \frac{3(5-4\nu)}{4\pi^2} \frac{l^2 \sigma_s}{h^2 E}$$

Если отношение b / l достаточно велико, то $u \to 0.239$, для цилиндрической же формы потери устойчивости имеем $u = 0.250$.

Для случая пластинки, сжатой в направлении оси x при условии равенства нулю деформации удлинения срединной поверхности в направлении оси y, получим в случае цилиндрической формы потери устойчивости уравнение равновесия в виде

$$k' \frac{h^3}{3} \frac{d^2 w}{dx^2} + |\sigma_x| h w = 0, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{l^2}{h^2} = \frac{\pi^2 k'}{3 |\sigma_x|}$$

где

$$k' = \frac{4E'H'}{(\sqrt{E'} + \sqrt{H'})^2}, \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad H' = \frac{1(-2\nu) E}{5 - 12\nu + 15\nu^2 - 4\nu^3}$$

Для несжимаемого материала $(\nu = 0.5)$ критическая длина равна нулю, однако при $\nu = 0.3$ она составляет 0.735 длины пластинки с шарнирно опертыми краями.

При развитии пластических деформаций в случае цилиндрической формы потери устойчивости критическая длина определяется соотношением

$$\frac{l^2}{h^2} = \frac{\pi^2 c}{3\sigma_s h}, \qquad c = \frac{E}{5 - 4\nu + 3\lambda}$$

где λ определяет величину пластических деформаций

$$\varepsilon_x = -\frac{\sigma_s}{E}(1 + \lambda)$$

Поступила в редакцию
6 VIII 1946

I. P. KUNTZE.—STABILITY OF PLATES OF COMPRESSIBLE MATERIAS BEYOND THE LIMIT OF ELASTICITY

The author gives the equilibrium equation (8) of a plate compressed to the limit of stability, assuming non-strain hardening of compressible materials and assuming stresses to be equal to the limit of elasticity. Solutions of this equation for particular cases and the corresponding magnitudes of critical flexibility of plates are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Устойчивость пластинок и оболочек за пределом упругости. Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII.