Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЛОЖБИН ИЗ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВИХРЯ

Е. Н. Блинова
(Москва)

Формулы Россби [1] и Гаурвица [2,3] для движения ложбин на больших высотах, полученные при решении линейного уравнения для вихря, имеют широкое применение в динамической метеорологии (см., например, [4]). В работе Крейга [5] содержится попытка включения нелинейных членов в задачу определения скорости движения ложбин из уравнения для вихря. Крэйг приходит к выводу, что скорость движения ложбин не зависит от скорости зонального потока и что, таким образом, формулы Россби и Гаурвица не выполняются в нелинейном случае.

Отправным уравнением в работе Крэйга служит нелинейное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla^2\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \tag{1}$$

представляющее условие сохранения абсолютного вихря в частице (ψ — функция тока, t — время, x, y — декартовы координаты, $\beta=2\omega\cos\varphi/a$ — изменение параметра Кориолиса с широтой φ, ω — угловая скорость вращения земли, a — радиус земли; ось x направлена к востоку, ось y — к северу). В качестве решения этого уравнения берется функция

$$\psi=C_1 f(y)+C_2 e^{i(\mu x-\nu t)+i\gamma y}. \tag{2}$$

Естественным казался бы следующий ход решения задачи. Подставим выражение (2) для ψ в уравнение (1); получим

$$\nu(\gamma^2+\mu^2)+\mu\beta+C_1\mu\left[(\gamma^2+\mu^2)f'+f'''\right]=0 \tag{3}$$

(штрихи обозначают дифференцирование по y). Этому одному уравнению и необходимо удовлетворить.

Возьмем, в частности, $f(y)=y$, $C_1=-U$ (волны, наложенные на западный поток с постоянной скоростью U). Уравнение (3) удовлетворяется при этом, если

$$c=\frac{\nu}{\mu}=U-\frac{\beta}{\gamma^2+\mu^2} \tag{4}$$

т. е. получаются вновь формулы Россби-Гаурвица, и функция

$$\psi=-Uy+C_2 e^{i(\mu x-\nu t)+i\gamma y} \tag{5}$$

удовлетворяет не только линейному, но и нелинейному уравнению, если, как и в линейном случае, скорость движения ложбины c и скорость зонального потока U связаны формулой (4).

Крэйг, однако, вместо того, чтобы удовлетворить уравнению (3), удовлетворяет двум уравнениям, приравнивая нулю в (3) отдельно члены, содержащие f и свободные от f. Таким образом он пропускает решение (5) и не получает формул Россби и Гаурвица.

Более общее решение уравнения (1), как легко видеть, будет иметь вид

$$\psi=-Uy+C_1' e^{\pm i\alpha y}+\sum_{j=1}^{\infty} C_{2j} e^{i\mu_j(x-ct)+i\gamma_j y} \tag{6}$$

где C_1', C_{2j} — произвольные постоянные, c связано с U попрежнему формулой (4) и должно быть $\mu_j^2+\gamma_j^2=\alpha^2$.

В сферическом случае уравнение (1) заменяется уравнением

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{a^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}-\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\right)=-2\omega\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \quad (7)$$

Здесь θ — дополнение широты (увеличивающееся к югу), λ — долгота места (увеличивающаяся к востоку).

Если вместе с Крэйгом будем искать здесь решение в виде

$$\psi=C_1 g(\theta)+C_2 e^{i(m\lambda+\nu t)}P_n^m(\cos\theta) \quad (8)$$

то, естественно, придем к одному уравнению

$$\frac{\nu}{m}n(n+1)-2\omega+\frac{C_1}{a^2\sin\theta}\left\{g''+\operatorname{ctg}\theta g''+\left[n(n+1)-\frac{1}{\sin^2\theta}\right]g'\right\}=0 \quad (9)$$

Пусть $g(\theta)=P_1(\cos\theta)=\cos\theta$, $C_1=-\alpha a^2$ (здесь α — угловая скорость движения воздуха относительно земли). Уравнение (9) удовлетворяется при этом, если только

$$\frac{\nu}{m}=\frac{2\omega}{n(n+1)}-\frac{\alpha\,[n(n+1)-2]}{n(n+1)} \quad (10)$$

Это — формула Гаурвица. Итак,

$$\psi=-\alpha a^2\cos\theta+C_2 e^{i(m\lambda+\nu t)}P_n^m(\cos\theta) \quad (11)$$

удовлетворяет как линейному, так и нелинейному уравнению для вихря, причем всегда должно выполняться равенство (10). Общий вид для ψ (в нелинейном случае) будет

$$\psi=-\alpha a^2\cos\theta+C_1'P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}C_{2m}e^{i(m\lambda+\nu t)}P_n^m(\cos\theta) \quad (12)$$

Здесь также справедливо равенство (10).

Другое доказательство того, что (12) и (10) имеют место для нелинейного случая, было, насколько мне известно, дано Эртель (H. Ertel).

Поступила в редакцию
2 VIII 1946

Центральный институт
прогнозов

E. N. BLINOVA.—ON THE DETERMINATION OF THE VELOCITY OF TROUGHS EMPLOYING THE NON-LINEAR VORTICITY EQUATION

By substituting the function (2) in the non-linear equation (1) the problem is reduced to the equation (3). This equation can be satisfied with $f(y)=y$, $C_1=-U$ (waves superimposed on the west-east flow with constant velocity) provided the Rossby and Haurwitz condition (4) is true. Hence the solution (5) satisfies the non-linear equation. The more general solution is given by the expression (6) where $\mu_j^2+\gamma_j^2=\alpha^2$ and $c=U-\beta/\alpha^2$.

By substituting ψ (Form. 8) in the non-linear equation (7) for the spherical case the problem is reduced to the equation (9). This equation can be satisfied by $g(\theta)=P_1(\cos\theta)=\cos\theta$, $C_1=-\alpha a^2$ (where α is the angular velocity of the air motion relative to the earth) provided the Haurwitz condition (10) is true; in this case the general solution has the form (12).

The error is thereby shown in R. Craig's [5] conclusion, that "The vorticity equation can be solved without linearization, and the more accurate solution indicates that zonal index is not significant in determining the velocity of a trough, as was previously thought".

ЛИТЕРАТУРА

1. Rossby C. G. and coll. Journal of Marine Research 1939. Vol. 2. N 1.
2. Haurwitz B. Journal of Marine Research. 1940. Vol. 3. N 1.
3. Haurwitz B. Journal of Marine Research. 1940. Vol. 3. N 3.
4. Блинова Е. Н. Доклады Академии Наук СССР. 1943. Т. XXXIX. N 7.
5. Craig R. A. Jornal of Meteorology. 1945. Vol. 2 N. 2.