Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946

ЗАМЕТКИ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ УЧАСТКЕ ТРУБЫ

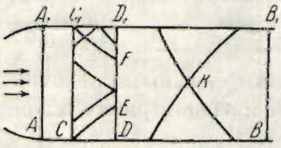
А. А. Никольский

(Москва)

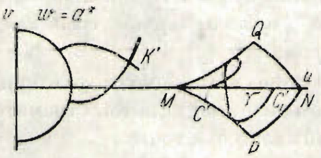
Дозвуковое потенциальное течение газа в трубе обладает следующим характерным свойством. Если, начиная с некоторого сечения трубы, далее вниз по течению она становится цилиндрической, то на этом ее цилиндрическом участке скорости и давления постепенно, причем достаточно быстро, выравниваются таким образом, что в пределе на бесконечности вниз по течению скорости и давления постоянны по сечению.

В настоящей работе анализируется возможность аналогичного выравнивания скорости и давления на цилиндрическом участке трубы для случая сверхзвуковых течений. Рассматривается только плоская задача.

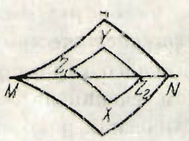
Пусть на цилиндрическом участке трубы, ограниченном сечениями AA_1 и BB_1 (фиг. 1), имеет место некоторое плоское адиабатическое течение газа со сверхзвуковыми скоростями.



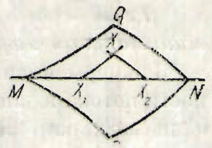
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Обозначим через u продольную и через v поперечную составляющие скорости, через w абсолютную величину скорости, а через a^* скорость в точке, где она равна местной скорости звука. Через любую точку K области, занимаемой рассматриваемым сверхзвуковым течением, проходят две характеристики, которые изображаются в плоскости uv годографа скорости эпициклоидами двух различных семейств, а сама точка K изобразится в плоскости uv как точка пересечения K' этих эпициклоид. Рассмотрим некоторое плоское сечение CC_1 внутри цилиндрического участка трубы (фиг. 1).

В плоскости uv сечение CC_1 изобразится некоторой, вообще говоря, самопересекающейся кривой γ, концы которой C' и C'_1 лежат на прямой $v=0$ (фиг. 2). Рассмотрим на прямой $v=0$ какую-либо пару точек M и N. Как через точку M, так и через точку N проходит пара эпициклоид различных семейств. Эти четыре эпициклоиды, соответствующим образом пересекаясь, образуют криволинейный четырехугольник $MPNQ$, который мы назовем характеристическим ромбом.

Рассмотрим совокупность характеристических ромбов, каждый из которых содержит все точки кривой γ или целиком внутри себя, или и внутри и на границе. Выберем из этой совокупности ромбов минимальный и назовем его минимальным характеристическим ромбом, соответствующим сечению CC_1.

Минимальный характеристический ромб $MPNQ$ обладает следующими двумя очевидными свойствами.

а) Пусть X и Y—две точки, принадлежащие $MPNQ$; тогда обе точки пересечения Z_1 и Z_2 двух пар эпициклоид различного семейства, выходящих из точек X и Y, лежат внутри минимального характеристического ромба (фиг. 3).

б) Пусть X—некоторая точка внутри $MPNQ$. Тогда обе эпициклоиды, проходящие через точку X, пересекают прямую $v=0$ в точках X_1 и X_2, принадлежащих ромбу $MPNQ$ (фиг. 4).

Рассмотрим теперь внутри цилиндрического участка трубы некоторое другое плоское сечение DD_1, столь близкое к сечению CC_1, чтобы характеристики, выходящие из точек C и C_1 стенок трубы в сторону сечения DD_1, не пересекались внутри прямоугольника CDD_1C_1 (фиг. 1). Обозначим через E и F точки пересечения этих характеристик с сечением DD_1. Любая точка прямолинейного отрезка EF является точкой пересечения двух характеристик различных семейств, выходящих из некоторых двух точек сечения CC_1. Пользуясь свойством «а», получим, что образ любой точки отрезка EF в плоскости годографа uv принадлежит характеристическому ромбу. Через любую точку отрезков CD и C_1D_1 проходит некоторая характеристика, исходящая из некоторой точки сечения CC_1. Пользуясь свойством «б», легко отсюда получим, что образ любой точки отрезков CD и C_1D_1 принадлежит ромбу $MPNQ$.

Заметим, наконец, что любая точка отрезка FD_1 является точкой пересечения двух характеристик различных семейств: одной, исходящей из некоторой точки отрезка C_1D_1 и другой, исходящей из некоторой точки сечения CC_1. Аналогично, любая точка отрезка ED является точкой пересечения характеристик, исходящих из сечения CC_1 и отрезка CD. Пользуясь предыдущими результатами и свойством «а», получим, что образ любой точки отрезков DE и FD_1 в плоскости uv лежит внутри ромба $MPNQ$; для точек отрезка EF это было доказано ранее; таким образом мы получили, что образы всех точек сечения DD_1 лежат внутри минимального характеристического ромба $MPNQ$, соответствующего сечению CC_1. Поэтому и минимальный характеристический ромб, соответствующий сечению DD_1, содержится внутри ромба $MPNQ$. Однако в ходе рассуждений можно сечения CC_1 и DD_1 поменять местами и доказать, что, наоборот, минимальный характеристический ромб $MPNQ$, соответствующий сечению CC_1, содержится внутри минимального характеристического ромба, соответствующего сечению DD_1. Отсюда следует, что минимальные характеристические ромбы сечений CC_1 и DD_1 совпадают. Но сечения CC_1 и DD_1 произвольны, поэтому имеем теорему

Всем сечениям цилиндрического участка трубы соответствует один и тот же минимальный характеристический ромб.

Размеры минимального характеристического ромба характеризуют степень неравномерности потока в данном сечении. В самом деле, когда поток стремится к равномерному, минимальный характеристический ромб стягивается в точку.

Из теоремы следует, что если сверхзвуковой поток неравномерен во входном сечении цилиндрического участка, то он в такой же степени неравномерен (в смысле минимального характеристического ромба) и в любом другом сечении цилиндрического участка. Таким образом при сверхзвуковом течении, в противоположность дозвуковому, поток на цилиндрическом участке трубы не выравнивается. Поэтому в сверхзвуковых трубах для достижения достаточной степени равномерности потока в некотором сечении цилиндрического участка следует добиваться такой же степени его равномерности в начале цилиндрического участка.

В настоящей работе не учитывается влияние трения около стенок трубы, которое может быть особенно существенным при малых числах Рейнольдса.

Поступила в редакцию
15 VI 1940

A. A. NIKOLSKY.—ONE PROPERTY OF SUPERSONIC FLOWS ALONG A CYLINDRICAL RANGE OF A TUBE

The author introduces the so-called «characteristic» rhomboid as a measure of the disturbance of a gas flow. The following theorem is proved: the minimal characteristic rhomboid is the same for supersonic flow at any cross-section of the cylindrical range of a tube. It follows that for supersonic flow in a cylindrical tube the distribution of velocities and pressures does not tend towards uniformity, as is the case in subsonic flows. Friction between the gas and the wall of the tube is neglected.