Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика. Том X, 1946

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

В. В. Крылов

(Казань)

На примере обобщенного плоско-напряженного состояния делается попытка построить основные уравнения теории упругости, не привлекая предположения о малости перемещений или их производных.

1. Характеристика деформации. Будем рассматривать два состояния: первоначальное, определяемое координатами x, y, и деформированное — координатами $\xi = x + u$, $\eta = y + v$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — компоненты смещения по осям x и y.

В недеформированном теле построим бесконечно малый треугольник, две стороны которого dx, dy, а третья dx' совпадает с осью x' подвижной системы $x'y'$. После деформации стороны этого треугольника, изменив направления, соответственно будут $g_x dx$, $g_y dy$, $g_{x'} dx'$, где $g = 1 + \varepsilon$, причем ε — относительное удлинение. Введем компоненты деформации

$$x_x = \lambda_x g_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad y_x = \mu_x g_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad x_y = \lambda_y g_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad y_y = \mu_y g_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{1.1}$$

где λ_i и μ_i — направляющие косинусы деформированных элементов.

Положение подвижных осей будем определять направляющими косинусами l_i и m_i. Спроектировав все стороны деформированного треугольника на оси x и y, будем иметь

$$x_n = l_1 x_x + m_1 x_y, \qquad y_n = l_1 y_x + m_1 y_y \tag{1.2}$$

где $x_n = g_{x'} \cos(g_{x'}, x)$, $y_n = g_{x'} \cos(g_{x'}, x')$. Воспользовавшись равенствами $\cos(g_x, x') = l_1 \lambda_x + m_1 \mu_x$ и т. д., и проектируя на оси x' и y', получим

$$\begin{aligned} x_{x'} &= l_1^2 x_x + m_1^2 y_y + l_1 m_1 (x_y + y_x), \\ y_{y'} &= l_1 l_2 x_x + m_1 m_2 y_y + l_1 m_2 y_x + m_1 l_2 x_y \end{aligned} \tag{1.3}$$

Компоненты деформации образуют тензор. Возводя оба эти равенства в квадрат и складывая, будем иметь

$$g_{x'}^2 = l_1^2 g_x^2 + m_1^2 g_y + l_1 m_1 g_x g_y (\lambda_x \lambda_y + \mu_x \mu_y) \tag{1.4}$$

Главные оси этой квадратичной формы суть главные оси деформации. Для них имеет место $\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 = 0$. Следовательно, главные оси, поворачиваясь на некоторый угол, остаются взаимно перпендикулярными.

Пользуясь (1.1) и выразив g_x через ε, равенства (1.3) представим в виде

$$\begin{aligned} e_{x'} &= l_1^2 \lambda_x \varepsilon_x + m_1^2 \mu_y \varepsilon_y + l_1 m_1 (\mu_x \varepsilon_x + \lambda_y \varepsilon_y) \\ \omega_{x'} &= l_1 l_2 \lambda_x \varepsilon_x + m_1 m_2 \mu_y \varepsilon_y + l_1 m_2 \mu_x \varepsilon_x + m_1 l_2 \lambda_y \varepsilon_y \end{aligned} \tag{1.5}$$

где введены обозначения

$$e_{x'} = \lambda_{x'} g_{x'} - \lambda_x^*, \qquad \lambda_x^* = l_1^2 \lambda_x + m_1^2 \mu_y + l_1 m_1 (\mu_x + \lambda_y)$$
$$\omega_{x'} = \mu_{x'} g_{x'} - \mu_x^*, \qquad \mu_x^* = l_1 l_2 \lambda_x + m_1 m_2 \mu_y + l_1 m_2 \mu_x + m_1 l_2 \lambda_y \tag{1.6}$$

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для оси y'. Предположив, что оси x и y главные, и учтя, что для них будет $\lambda = \lambda_1 = \mu_2 \cos\alpha$, $\mu = \mu_1 = -\lambda_2 = \sin\alpha$, для обеих подвижных осей найдем

$$e_x = \lambda_x g_x - \lambda, \quad e_y = \mu_y g_y - \lambda, \quad \omega_x = \mu_x g_x - \mu, \quad \omega_y = \lambda_y g_y + \mu \tag{1.7}$$

Для сокращения письма здесь штрихи опущены. Эти величины будем называть характеристиками деформации и определять ими деформированное состояние в точке. Образуем выражения

$$a_1 = e_{x'} + e_{y'}, \quad a_2 = \omega_{x'} - \omega_{y'}, \quad a^2 = a_1^2 + a_2^2$$
$$b_1 = e_{x'} - e_{y'}, \quad b_3 = \omega_{x'} + \omega_{y'}, \quad b^2 = d_1^2 + d_2^2 \tag{1.8}$$

Причем a_1, a_2, a, b суть инварианты при преобразовании координат. Вычисленные для главных осей, они имеют вид

$$a_1 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad a_2 = \mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad b = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \tag{1.9}$$

2. Компоненты напряжения. В недеформированном теле выделим бесконечно малый элемент $dxdy$. После деформации он примет форму параллелограма со сторонами $g_x dx$ и $g_y dy$. Силы, действующие на каждую грань деформированного элемента, представим составляющими по направлениям g_x и g_y. Соответствующие напряжения будем называть: σ — направленными, τ — касательными. Если напряжения отнесены к деформированным площадкам, то уравнение моментов дает $\tau_{xy}' = \tau_{yx}'$. Мы будем пользоваться напряжениями, отнесенными к первоначальным площадкам, т. е. $\sigma_x = g_y \sigma_x'$, $\tau_{xy} = g_y \tau_{xy}'$, ...

Введем компоненты напряжения

$$X_x = p_x \bar\lambda_x = \lambda_x \sigma_x + \lambda_y \tau_{xy}, \qquad Y_x = p_x \bar\mu_x = \mu_x \sigma_x + \mu_y \tau_{xy}$$
$$Y_y = p_y \bar\lambda_y = \lambda_y \sigma_y + \lambda_y \tau_{yx}, \qquad Y_y = p_y \bar\mu_y = \mu_y \sigma_y + \mu_x \tau_{yx} \tag{2.1}$$

где p_x, p_y — полные напряжения, $\bar\lambda_i \bar\mu_i$ — их направляющие косинусы. Составляющие по осям x и y полного напряжения для косой площадки, нормаль к которой до деформации совпадала с осью x', будут иметь обычный вид

$$X_n = l_1 X_x + m_1 X_y, \qquad Y_n = l_1 Y_x + m_1 Y_y \tag{2.2}$$

и соответственно компоненты напряжения

$$X_{x'} = l_1^2 X_x + m_1^2 Y_y + l_1 m_1 (Y_x + X_y)$$
$$Y_{x'} = l_1 l_2 X_x + m_1 m_2 Y_y + l_1 m_1 Y_x + m_1 l_2 X_y \tag{2.3}$$

Компоненты напряжений образуют тензор. Возводя эти равенства в квадрат и складывая, будем иметь

$$p_{x'}^2 = l_1^2 p_x^2 + m_1^2 p_y^2 + l_1 m_1 p_x p_y (\bar\lambda_x \bar\lambda_y + \bar\mu_x \bar\mu_y) \tag{2.4}$$

Главные оси этой квадратичной формы суть главные оси напряженного состояния. Для изотропного тела они совпадают с главными осями деформации. Следовательно, для них $\overline{\lambda}_i = \lambda_i$, $\overline{\mu}_i = \mu_i$. Образуем выражения

$$A_2 = X_{x'} + Y_{y'}, \quad A_2 = Y_{x'} - X_{y'}, \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2$$
$$B_1 = X_{x'} + Y_{y'}, \quad B_2 = Y_{x'} + X_{y'}, \quad B^2 = B_1^2 + B_2^2 \tag{2.5}$$

Величины A_1, A_2, A, B — инвариантны при преобразовании координат. Вычисленные для главных осей, они будут иметь вид

$$A_1 = \lambda(\sigma_1 + \sigma_2), \quad A_2 = \mu(\sigma_1 + \sigma_2), \quad A = \sigma_1 + \sigma_2, \quad B = \sigma_1 - \sigma_2 \tag{2.6}$$

В заключение этого параграфа заметим, что квадратичные формы (1.3) или (1.5) и (2.3) также имеют главные оси. Для изотропного тела главные оси компонентов деформации будут совпадать с соответствующими осями компонентов напряжения, причем главные оси одного компонента будут расположены под углом 45° к главным осям другого. Экстремальные значения характеристик деформации и компонентов напряжения будут

$$2e_{\text{ext}} = a_1 \pm b, \quad 2\omega_{\text{ext}} = a_2 \pm b, \quad 2X_{x\,\text{ext}} = A_1 \pm B, \quad 2Y_{x\,\text{ext}} = A_2 \pm B$$

3. Зависимость между напряжениями и деформациями. Главные оси квадратичных форм (1.4) и (2.4) определяются уравнениями

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_1 + a_2 b_2}, \qquad \operatorname{tg} 2\overline{\beta} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 B_1 + A_2 B_2} \tag{3.1}$$

Совпадение главных осей требует $\beta = \overline{\beta}$, а из (1.9) и (2.6) имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{A_2}{A_1} \tag{3.2}$$

Сравнивая правые части (3.1) и пользуясь (3.2), получим условия совпадения

$$a_1 = k_1 A_1, \quad a_2 = k_1 A_2, \quad a = k_1 A; \quad b_1 = k_2 B_1, \quad b_2 = k_2 B_2, \quad b = kB \tag{3.3}$$

где коэффициенты k_1 и k_2 — некоторые функции, не зависящие от направления. В случае, если тело анизотропно, главные оси напряжений и деформации совпадать не будут. Это обстоятельство должно быть учтено особо. Коэффициенты должны быть определены экспериментально.

Будем опираться на классический закон Гука. Он имеет вид

$$\varepsilon_1 = \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_1 - \frac{\nu}{1+\nu} A\right], \qquad \varepsilon_2 = \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_2 - \frac{\nu}{1+\nu} A\right] \tag{3.4}$$

Если, исходя из результатов эксперимента (3.4), положить

$$k_1 = \frac{1-\nu}{E}, \qquad k_2 = \frac{1+\nu}{E} \tag{3.5}$$

то выражения (3.3) примут вид

$$e_x + e_y = \frac{1-\nu}{E}(X_x + Y_y), \qquad \omega_x - \omega_y = \frac{1-\nu}{E}(Y_x - X_y)$$
$$e_x - e_y = \frac{1+\nu}{E}(X_x - Y_y), \qquad \omega_x + \omega_y = \frac{1+\nu}{E}(Y_x + X_y) \tag{3.6}$$

Теперь получим:

для характеристик деформации

$$e_x=\frac{1+\nu}{E}\left[X_x-\frac{\nu}{1+\nu}A_1\right],\qquad \omega_x=\frac{1+\nu}{E}\left[Y_x-\frac{\nu}{1+\nu}A_2\right]$$
$$e_y=\frac{1+\nu}{E}\left[Y_y-\frac{\nu}{1+\nu}A_1\right],\qquad \omega_y=\frac{1+\nu}{E}\left[X_y+\frac{\nu}{1+\nu}A_2\right] \tag{3.7}$$

для компонентов напряжений

$$X_x=\frac{E}{1+\nu}\left[e_x+\frac{\nu}{1-\nu}a_1\right],\qquad Y_x=\frac{E}{1+\nu}\left[\omega_x+\frac{\nu}{1-\nu}a_2\right]$$
$$Y_y=\frac{E}{1+\nu}\left[e_y+\frac{\nu}{1-\nu}a_1\right],\qquad X_y=\frac{E}{1+\nu}\left[\omega_y-\frac{\nu}{1-\nu}a_2\right] \tag{3.8}$$

Подбирая соответственным образом коэффициенты k_i, зависимость между деформациями и напряжениями можно получить и в нелинейной форме.

4. Равновесие упругого тела. В недеформированном теле выделим односвязную область, ограниченную контуром S. На контуре около точки $C(x, y)$ возьмем элемент дуги ds. После деформации контур S примет форму S_1, точка C переместится в точку C_1, с координатами ξ, η. Составляющие полного напряжения в точке C_1 контура S_1 определятся выражениями (2.2). Пренебрегая массовыми силами, условия равновесия будут

$$\oint X_n\,ds=0,\qquad \oint Y_n\,ds=0,\qquad \oint[Y_n\xi-X_n\eta]\,ds=0 \tag{4.1}$$

Вводя для последнего интеграла обозначения

$$\Gamma_x=Y_x\xi-X_x\eta,\qquad \Gamma_y=Y_y\xi-X_y\eta \tag{4.2}$$

и пользуясь формулой Гаусса, получим

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial \Gamma_x}{\partial x}+\frac{\partial \Gamma_y}{\partial y}=0 \tag{4.3}$$

Первые два уравнения показывают, что существуют две функции, для которых будем иметь

$$X_x=\frac{\partial F_x}{\partial y},\qquad X_y=-\frac{\partial F_x}{\partial x},\qquad Y_x=\frac{\partial F_y}{\partial y},\qquad Y_y=-\frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{4.4}$$

При помощи третьего уравнения легко показать, что напряженное состояние определяется одной функцией

$$F_x=\frac{\partial W^*}{\partial \eta},\qquad F_y=-\frac{\partial W^*}{\partial \xi} \tag{4.5}$$

При помощи (1.1) и (1.7) уравнение моментов можно представить еще иначе:

$$(A_1a_2-A_2a_1)+(B_1b_2-B_2b_1)+\mu(X_x+Y_y)-\lambda(Y_x-X_y)=0 \tag{4.6}$$

Используя условия совпадения главных осей (3.3) и значения инвариантов (2.6), увидим, что уравнение моментов удовлетворяется тождественно.

5. Основные уравнения. Выразив характеристики деформации (1.7) при помощи (1.1) через ξ, η, условия совместимости получим в виде

$$\frac{\partial e_x}{\partial y}-\frac{\partial \omega_y}{\partial y}=-\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}+\frac{\partial \mu}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial e_y}{\partial x}-\frac{\partial \omega_x}{\partial y}=-\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}-\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) \tag{5.1}$$

Представив уравнения равновесия через характеристики деформации, а условия совместности через компоненты напряжения, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial e_x}{\partial x}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}-\frac{\partial \mu}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial X_x}{\partial y}-\frac{\partial X_y}{\partial x}=-E\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}+\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) \\ &\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+\frac{\partial e_y}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}+\frac{\partial \mu}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial Y_y}{\partial x}-\frac{\partial Y_x}{\partial y}=-E\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}-\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{5.2}$$

И, наконец, пользуясь (1.1) и (4.4), будем иметь

$$\begin{aligned} &\Delta\xi=(1+\nu)\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}-\frac{\partial \mu}{\partial y}\right), \quad \Delta F_x=-E\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}+\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) \\ &\Delta\eta=(1+\nu)\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}+\frac{\partial \mu}{\partial x}\right), \quad \Delta F_y=+E\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}-\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

где Δ — оператор Лапласа.

Из уравнения равновесия и условий совместимости можно получить

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{X_x+Y_y}{E}+\lambda\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{Y_x-X_y}{E}+\mu\right]=0 \\ &\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{X_x+Y_y}{E}+\lambda\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{Y_x-X_y}{E}+\mu\right]=0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Следовательно, учтя (3.6), (1.9) и (2.6), найдем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}=\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}=\frac{X_x+Y_y}{E}+\lambda=\frac{e_x+e_y}{1-\nu}+\lambda=\rho\lambda=\rho\cos\alpha \\ &-\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}=\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}=\frac{Y_x-X_y}{E}+\mu=\frac{\omega_x-\omega_y}{1-\nu}+\mu=\rho\mu=\rho\sin\alpha \end{aligned} \tag{5.5}$$

где обозначено

$$\rho=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{E}+1=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{1-\nu}+1=\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)} \tag{5.6}$$

При помощи (3.7) и (1.7) выражения (5.5) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}=\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}=+\frac{1+\nu}{E}X_x+\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1+\nu}{E}Y_y+\frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &-\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}=\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}=-\frac{1+\nu}{E}X_y+\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1+\nu}{E}Y_x-\frac{\partial \xi}{\partial y} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Выразив компоненты напряжения через F_x, F_y, получим

$$\xi=\frac{1+\nu}{E}F_y+\varphi_1, \qquad \eta=-\frac{1+\nu}{E}F_x+\varphi_2 \tag{5.8}$$

Отсюда для функции W^*, введенной в (4.5), будем иметь

$$\frac{1+\nu}{E}W^*=\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)+\int(\varphi_1\,d\xi+\varphi_2\,d\eta) \tag{5.9}$$

Под интегралом стоит полный дифференциал. В заключение заметим, что введенные в (5.6) β и α являются сопряженными гармоническими функциями. Следовательно, кривые $\alpha=\text{const}$, $\beta=\text{const}$, дающие постоянное значение угла поворота главных осей и суммы главных напряжений или удлинений, образуют взаимно ортогональную систему. Если $\alpha=0$, то $\beta=\text{const}$ — случай чистой деформации.

6. Рассмотрение в криволинейных координатах. Если через рассматриваемую точку проведем кривые $\varphi_1=\mathrm{const}$ и $\varphi_2=\mathrm{const}$, то нормали к ним, проведенные через ту же точку, будут взаимно перпендикулярны и расположены под углом α к осям x и y. Если эти нормали выберем за новую систему координат, то тем самым выделим поворот бесконечно малой области как твердого тела на угол поворота главных осей. В этом случае будем иметь дело с чистой деформацией в точке. Примем за новые независимые переменные φ_1, φ_2 и введем для такого рассмотрения новые характеристики деформации и компоненты напряжения

$$\begin{aligned} e_x^\circ &= e_x\lambda-\omega_y\mu\,, & \omega_x^\circ &= \omega_x\lambda-e_y\mu\,, & X_x^\circ &= X_x\lambda-X_y\mu\,, & X_y^\circ &= X_y\lambda+X_x\mu \\ e_y^\circ &= e_y\lambda+\omega_x\mu\,, & \omega_y^\circ &= \omega_y\lambda+e_x\mu\,, & Y_y^\circ &= Y_y\lambda+Y_x\mu\,, & Y_x^\circ &= Y_x\lambda-Y_y\mu \end{aligned} \tag{6.1}$$

Зависимость между ними сохранится в виде (3.7) или (3.8). Выраженные через ξ, η и F_x, F_y, они будут иметь вид

$$\begin{aligned} e_x^\circ &= \rho\frac{\partial\xi}{\partial\varphi_1}-1\,, & \omega_x^\circ &= \rho\frac{\partial\eta}{\partial\varphi_1}\,, & X_x^\circ &= \rho\frac{\partial F_x}{\partial\varphi_2}\,, & X_x^\circ &= -\rho\frac{\partial F_x}{\partial\varphi_1} \\ e_y^\circ &= \rho\frac{\partial\eta}{\partial\varphi_2}-1\,, & \omega_y^\circ &= \rho\frac{\partial\xi}{\partial\varphi_2}\,, & Y_x^\circ &= \rho\frac{\partial F_y}{\partial\varphi_2}\,, & Y_y^\circ &= -\rho\frac{\partial F_y}{\partial\varphi_1} \end{aligned} \tag{6.2}$$

При помощи (1.9) и (2.6) найдем

$$a=e_x^\circ+e_y^\circ=\varepsilon_1+\varepsilon_2\,,\quad \omega_x^\circ-\omega_y^\circ=0\,,\quad A=X_x^\circ+Y_y^\circ=\sigma_1+\sigma_2\,,\quad Y_x^\circ-X_y^\circ=0 \tag{6.3}$$

Отсюда совместно с (6.2) получим

$$\xi=\frac{\partial S_0}{\partial\varphi_1}\,,\qquad \eta=\frac{\partial S_0}{\partial\varphi_2}\,,\qquad F_x=\frac{\partial W_0}{\partial\varphi_2}\,,\quad F_y=-\frac{\partial W_0}{\partial\varphi_1} \tag{6.4}$$

где W_0 — функция напряжений, S_0 — функция деформации.

Характеристики деформации и компоненты напряжения, соответствующие чистой деформации в точке, при помощи (6.2) найдутся простым дифференцированием. Уравнения равновесия и условия совместности (5.3) представятся

$$\begin{aligned} \Delta_0\xi &= (1+\nu)\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial\varphi_1}\,, & \Delta_0 F_x &= -E\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial\varphi_2} \\ \Delta_0\eta &= (1+\nu)\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial\varphi_2}\,, & \Delta_0 F_y &= +E\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial\varphi_1} \end{aligned} \tag{6.5}$$

где Δ_0 — оператор Лапласа по переменным φ_1, φ_2. Учитывая (6.4), получим

$$\Delta_0 S_0=(1+\nu)e^{-\beta}+(1-\nu)\,,\qquad \Delta_0 W_0=-Ee^{-\beta}+E \tag{6.6}$$

Чтобы эти уравнения не противоречили закону Гука, постоянным интегрирования приданы частные значения. Как видно отсюда, функции S_0 и W_0 не являются независимыми. Исключая β, найдем

$$\Delta_0\left(S_0+\frac{1+\nu}{E}W_0\right)=2 \tag{6.7}$$

Зависимость между S_0 и W_0 можно также получить, пользуясь законом Гука. Будем иметь

$$S_0+\frac{1+\nu}{E}W_0=\frac{1}{2}(\varphi_1^2+\varphi_2^2) \tag{6.8}$$

Ее можно рассматривать как обобщенный закон Гука, она, как видно, является лишь частным интегралом (6.7). Таким образом общие интегралы для S_0 и W_0 будут иметь вид

$$S_0 = S_0' - \frac{1+\nu}{4}\varphi_0, \qquad W_0 = W_0' + \frac{E}{4}\varphi_0 \tag{6.9}$$

где S_0' и W_0' — частные интегралы уравнений (6.6) и $\Delta_0\varphi_0 = 0$.

7. Приближенная теория для малых α **и** β. Для большинства металлов сумма главных напряжений всегда мала по сравнению с модулем E. Следовательно, с большой точностью вместо (5.6) можем положить

$$\rho = 1 + \beta, \qquad \beta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{E} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1-\nu} \tag{7.1}$$

Будем предполагать, что величина α очень мала. Тогда вместо (5.5) можно написать

$$\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_y}{\partial y} = \beta, \qquad -\frac{\partial\varphi_x}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_y}{\partial x} = \alpha, \quad \varphi_1 = \varphi_x + \alpha, \quad \varphi_2 = \varphi_y + y \tag{7.2}$$

Равенства (5.8) дадут известные выражения Лява

$$u = \frac{1+\nu}{E}F_y + \varphi_x, \qquad v = -\frac{1+\nu}{E}F_x + \varphi_y \tag{7.3}$$

Для инвариантов получим

$$X_x + Y_y = E\beta, \quad Y_x - X_y = E\alpha\beta, \quad e_x + e_y = (1-\nu)\beta, \quad \omega_x - \omega_y = (1-\nu)\alpha\beta \tag{7.4}$$

Уравнения равновесия и условия совместности (5.3) примут вид

$$\begin{aligned} &\triangle u + (1+\nu)\frac{\partial\beta}{\partial x} = 0, \qquad &&\triangle F_x - E\frac{\partial\beta}{\partial y} = 0 \\ &\triangle v + (1+\nu)\frac{\partial\beta}{\partial y} = 0, \qquad &&\triangle F_y + E\frac{\partial\beta}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Так как β — гармоническая функция, то компоненты смещения и функции напряжения удовлетворяют бигармоническому уравнению. При помощи (7.1) и (6.3) нетрудно усмотреть, что уравнения (7.5) суть известные уравнению Ляме и тождества Бельтрами.

1. *Рассмотрение в переменных* xy. Будем полагать

$$Y_x - X_y = E\alpha\beta \approx 0, \qquad \omega_x - \omega_y = (1-\nu)\alpha\beta \approx 0 \tag{7.6}$$

Первое равенство при помощи (4.4) даст нам известную функцию Эри, для которой вместо (7.5) будем иметь

$$\triangle W = E\beta \tag{7.7}$$

Используя для β (7.2), общий интеграл этого уравнения легко усматривается в виде известного интеграла Лява

$$W = \frac{E}{4}(\varphi_0 + x\varphi_x + y\varphi_y) \tag{7.8}$$

2. *Рассмотрение в криволинейных координатах*. При рассмотрении в переменных x, y мы сделали дополнительное допущение $\alpha\beta \approx 0$ и получили общий интеграл для W. Общие интегралы для W_0 и S_0 могут быть легко получены и без этого допущения, если воспользоваться криволинейными координатами.

С принятой точностью (7.1) вместо (6.6) можно написать

$$\triangle_0 S_0 = -(1+\nu)\beta + 2, \qquad \triangle_0 W_0 = E\beta \tag{7.9}$$

Учитывая (7.2) и (6.9), общие решения могут быть взяты в виде

$$\begin{gathered} W_0 = \frac{E}{4}(\varphi_0 + \varphi_1\varphi_x + \varphi_2\varphi_y) = W + \frac{E}{4}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \\ S_0 = -\frac{1+\nu}{4}(\varphi_0 + \varphi_1\varphi_x + \varphi_2\varphi_y) + \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \end{gathered} \tag{7.10}$$

Для компонентов смещения и функций напряжения, преобразуя к x, y, найдем

$$\begin{aligned} u &= \varphi_x + \frac{1+\nu}{E}F_y, & F_x &= \frac{\partial W_0}{\partial x}\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial W_0}{\partial y}\left(1 - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\right) \\ v &= \varphi_y - \frac{1+\nu}{E}F_x, & -F_y &= \frac{\partial W_0}{\partial x}\left(1 - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial W_0}{\partial y}\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \end{aligned} \tag{7.11}$$

При помощи (4.4) можно найти и компоненты напряжения.

8. Приближенная теория для малых β и любых α. Для β оставим предположение (7.1). Величина α может принимать любые значения. В этом случае уравнения для S_0, W_0 будут иметь тот же вид (7.9).

Общие интегралы будут иметь вид

$$S_0 = \frac{1-\nu}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{1+\nu}{2}\Phi_0, \qquad W_0 = \frac{E}{2}\left[\frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \Phi_0\right] \tag{8.1}$$

где введено обозначение

$$2\Phi_0 = \varphi_0 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \tag{8.2}$$

Для $\xi\eta$ и функций напряжений F_x, F_y найдем

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1-\nu}{2}\varphi_1 - \frac{1+\nu}{2}\Phi_1, & F_x &= \frac{E}{2}(\varphi_2 + \Phi_2) \\ \eta &= \frac{1-\nu}{2}\varphi_2 - \frac{1-\nu}{2}\Phi_2, & -F_y &= \frac{E}{2}(\varphi_1 + \Phi_1) \end{aligned} \tag{8.3}$$

где с принятой точностью следует считать

$$\Phi_i = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi_i} \approx \frac{1}{4}\triangle\varphi_i\left[\varphi_0 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right] \qquad (i = 1, 2) \tag{8.4}$$

Оператор $\triangle$ распространяется на все члены, стоящие от его справа.

9. Общие интегралы S_0, W_0. Наряду с функциями φ_1, φ_2 введем две новые функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = \exp\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \exp\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \tag{9.1}$$

Общие интегралы для S_0, W_0 будем искать, исходя из точных уравнений (6.6). В качестве общих решений могут быть взяты выражения (8.1), если функцию Φ_0 возьмем в виде

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}[\varphi_0 - (\psi_1^2 + \psi_2^2)] \tag{9.2}$$

Вместо (8.4) в этом случае будем иметь

$$\Phi_i = \frac{1}{4} e^{-2\beta} [\triangle\varphi_0\varphi_1 - 2(\psi_1\triangle\psi_1\varphi_i + \psi_2\triangle\psi_2\varphi_1)] \tag{9.3}$$

Координаты ξ, η и функции F_x, F_y будут выражены формулами (8.3). Компоненты $X_x^\circ, \ldots$ и характеристики e_x°, повидимому, представляют интерес лишь с точки зрения промежуточного счета и в случае необходимости могут быть вычислены при помощи (6.4) и (6.2).

Сделаем сравнение полученных результатов. Предположив для всех рассмотрений, что α и β суть очень малые, будем иметь, например, для W_0

$$W_{0i} = W + k_i \frac{E}{4}(\varphi_x{}^2 + \varphi_y{}^2)$$

где W — функция Эри, k_i — числовой коэффициент, последовательно принимающий значения 0, 1, 0.25, 0.75. Для принятого предположения относительно α и β второй член может рассматриваться как очень малая величина.

В заключение сделаем замечание относительно краевой задачи. Любая аналитическая функция $f(z) = \varphi_1 + i\varphi_2$, $z = x + iy$ вместе с гармонической функцией φ_0 определяют общие интегралы § 7, 8. Условия на контуре следует удовлетворять, или исходя из выражения для ξ, η, или выражений $X_n = \partial F_x / \partial s$, $Y_n = \partial F_y / \partial s$. Они, как видно, не будут линейными. При использовании результатов § 9 функция $f_1(z) = \alpha + i\beta$ определяет при помощи дифференциальных уравнений (5.5) и (9.1) функции φ_i, ψ_i и аналогично все остальное.

10. Пример. Не ставя конкретной задачи, рассмотрим случай, когда

$$\alpha = -kx, \qquad \beta = ky, \qquad k = \mathrm{const}$$

Для прямоугольника с размерами l, $2h$, расположенного симметрично относительно оси x, исходя из точных результатов § 9, получим:

для деформированных координат

$$\xi = \frac{1+\nu}{k}\left[1 + \frac{1+\nu-\operatorname{ch} kh}{(1+\nu)\operatorname{ch} kh}\operatorname{sh} ky - \frac{\nu}{1+\nu}\operatorname{ch} ky\right]\sin kx$$

$$\eta = \frac{1+\nu}{k}\left[1 - \frac{1+\nu-\operatorname{ch} kh}{(1+\nu)\operatorname{ch} kh}\operatorname{ch} ky + \frac{1}{1+\nu}\operatorname{sh} ky\right]\cos kx - \frac{1+\nu}{k}\left[\frac{\operatorname{ch} kh - 1}{\operatorname{ch} kh} + \frac{1}{1+\nu}\right]$$

для компонентов напряжения

$$X_x = E\frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{ch} kh}\cos kx, \qquad Y_x = -E\left[(\operatorname{ch} kh - 1)\frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{ch} kh} + \operatorname{sh} ky\right]\sin kx$$

$$X_y = E\left[1 - \frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{ch} kh}\right]\sin kx, \quad Y_y = +E\left[\operatorname{ch} kh - 1 + (\operatorname{ch} kh - 1)\frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{ch} kh}\right]\cos kx$$

Для φ_0 взято выражение

$$\varphi_0 = c_1(\varphi_1{}^2 - \varphi_2{}^2) + 2c_2 \lg(\varphi_1{}^2 + \varphi_2{}^2) + \frac{4}{k} c_3\varphi_2$$

На контуре выполнены условия

$$x = 0, \ \xi = 0; \quad x = 0, \ y = 0, \ \eta = 0; \quad y = \pm h, \ X_y = 0$$

Координаты изогнутой оси балки ($y=0$) будут

$$\xi_0 = -\frac{1}{k}\sin kx, \qquad \eta_0 = \frac{C}{k}(\cos kx - 1), \qquad C = (1+\nu)\left[\frac{\operatorname{ch} kh - 1}{\operatorname{ch} kh} + \frac{1}{1+\nu}\right]$$

т. е. ось балки изогнется по окружности. Предполагая теперь, что ky очень малая величина, и удерживая главные члены, получим

$$\xi = \frac{1}{k}(1+ky)\sin ky, \qquad X_x = E\,ky\cos kx, \qquad Y_x = -E\,ky\sin kx$$

$$\eta = \frac{1}{k}[(1+ky)\cos ky - 1], \qquad X_y = -Ek^2\frac{h^2-y^2}{2}\sin kx, \qquad Y_y = -\frac{1}{2}Ek^2y^2\cos kx$$

Для изгибающего момента и перерезывающей силы найдем

$$M = EJk, \qquad Q = -Ek^2h^3\sin kx$$

Полное напряжение на поперечном сечении будет

$$p = \sqrt{X_x^{\,2} + Y_y^{\,2}} = Eky$$

Если будем решать численный пример, то для $p = 1050$ кг / см² наибольшие значения Q, Y_y, X_y будут равны 0.25 кг / см².

Следовательно, в предположении, что kh очень малая величина, приведенную задачу с очень большой точностью можно рассматривать как задачу о чистом изгибе.

Поступило в редакцию
30 VII 1945

V. V. KRYLOV.—PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR FINITE DISPLACEMENTS

An attempt is made to set up the basic equations for the plane problem of the theory of elasticity without assuming smallness of the displacements or their derivatives. General expressions for the stress function and deformation function are given, containing the general solutions of the linear theory as the main terms.
