Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Ю. Н. Работнов

(Москва)

Напряженное состояние в оболочках, закрепленных таким образом, что изгибание средней поверхности исключено, является в основном безмоментным. Изгиб имеет место лишь в узкой пограничной зоне вблизи края оболочки, и рассмотрение его необходимо для точного удовлетворения граничным условиям. Таким образом, безмоментная теория, не позволяющая удовлетворить всем граничным условиям, дает возможность определить усилия в части оболочки, непосредственно не примыкающей к краю. Для несимметрично загруженных оболочек вращения, а также для оболочек, не являющихся поверхностями вращения, известно сравнительно немного решений, хотя безмоментная теория и привлекала к себе внимание таких математиков, как Бельтрами [1] и Вольтерра. Для некоторых поверхностей вращения и для поверхностей второго порядка решения были даны в недавнее время В. З. Власовым [2],[3] и В. В. Соколовским [4]. В настоящей работе мы указываем некоторые новые методы расчета оболочек по безмоментной теории, основанные главным образом на аналогии между безмоментной теорией оболочек и теорией бесконечно малых изгибаний поверхности. Эта аналогия, повидимому, впервые была отмечена Лекорню.

1. Обычно уравнения безмоментной теории получаются из общих уравнений теории Лява, т. е. пишутся для линий кривизны. Однако характеристиками этих уравнений служат асимптотические линии.

Геометрическая сторона всех вопросов, связанных с безмоментной теорией, становится совершенно очевидной, если избавиться от ограничений, связанных с выбором координатной сетки на поверхности, и писать уравнения равновесия для произвольных гауссовых координат. Новый вывод уравнений равновесия, который мы здесь предлагаем, основан на начале возможных перемещений и по идее восходит к Бельтрами.

Средняя поверхность оболочки задана радиусом-вектором $\mathbf{r}(u^1, u^2)$. Векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ образуют ковариантный базис на поверхности, единичный вектор нормали обозначим $\mathbf{n}$. Рассмотрим часть оболочки S, находящуюся в равновесии под действием распределенной нагрузки $\mathbf{q} = q^i\mathbf{r}_i + q\mathbf{n}$ на единицу площади и силы $\mathbf{T} = T^i\mathbf{r}_i$ на единицу длины граничного контура Γ.

Мысля оболочку нерастяжимой, предположим, что точки средней поверхности получают смещения $\mathbf{w}(u^1, u^2)$, подчиненные условиям нерастяжимости

$$\mathbf{w}_1\mathbf{r}_1 = 0\,, \qquad \mathbf{w}_1\mathbf{r}_2 + \mathbf{w}_2\mathbf{r}_1 = 0\,, \qquad \mathbf{w}_2\mathbf{r}_2 = 0 \tag{1.1}$$

Приравнивая нулю виртуальную работу всех сил и вводя множители Лагранжа $-T_{11}/g$, T_{12}/g, $-T_{22}/g$ для того, чтобы удовлетворить добавочным условиям (1.1), получим условие равновесия

$$\iint\limits_S \left[\mathbf{q}\mathbf{w} - \frac{T_{22}}{g}\mathbf{w}_1\mathbf{r}_1 + \frac{T_{12}}{g}(\mathbf{w}_1\mathbf{r}_2 + \mathbf{w}_2\mathbf{r}_1) - \frac{T_{11}}{g}\mathbf{w}_2\mathbf{r}_2 \right] \sqrt{g}\, du^1\, du^2 + \int\limits_\Gamma \mathbf{w}\mathbf{T}\, ds = 0 \qquad (1.2)$$

Интегрируя по частям и вводя обозначения

$$\mathbf{T}_1 = \frac{1}{\sqrt{g}}(T_{11}\mathbf{r}_2 - T_{12}\mathbf{r}_1), \qquad \mathbf{T}_2 = \frac{1}{\sqrt{g}}(T_{12}\mathbf{r}_2 - T_{22}\mathbf{r}_1) \qquad (1.3)$$

придем к следующему уравнению равновесия

$$\frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial u^1} + \mathbf{q}\sqrt{g} = 0 \qquad (1.4)$$

и граничному условию

$$\mathbf{T}\, ds = \mathbf{T}_1\, du^1 + \mathbf{T}_2\, du^2 \qquad (1.5)$$

Условие (1.5) показывает, что T_{ij} являются компонентами усилия в криволинейной системе координат.

Для прямоугольных координат связь между введенными обозначениями и обозначениями теории Лява будет

$$T_{11} = A^2 T_2, \qquad T_{22} = B^2 T_1, \qquad T_{12} = ABS$$

Векторное уравнение (1.4) эквивалентно трем скалярным:

$$\begin{gathered} \frac{\partial T_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial T_{12}}{\partial u^1} - G_{21}^1 T_{11} + (G_{11}^1 - G_{12}^2) T_{12} + G_{11}^2 T_{22} + q^2 g = 0 \\ \frac{\partial T_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial T_{12}}{\partial u^2} + G_{22}^1 T_{11} + (G_{22}^2 - G_{12}^1) T_{12} - G_{12}^2 T_{22} + q^1 g = 0 \\ T_{11} b_{22} + T_{22} b_{11} - 2T_{12} b_{12} + qg = 0 \end{gathered} \qquad (1.6)$$

Здесь G_{ij}^k — символы Кристоффеля, b_{ij} — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности.

Отнесем поверхность к асимптотическим линиям. Полагая $K = -1/\rho^2$, получим $b_{12} = \sqrt{g}/\rho$, $b_{11} = b_{22} = 0$. Из третьего уравнения системы (1.6)

$$T_{12} = \frac{q\rho}{2\sqrt{g}} \qquad (1.7)$$

Из уравнений Кодацци

$$G_{11}^1 - G_{12}^2 = \frac{\partial \log b_{12}}{\partial u^1}, \qquad G_{22}^2 - G_{12}^1 = \frac{\partial \log b_{12}}{\partial u^2}$$

С другой стороны,

$$G_{11}^1 + G_{12}^2 = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u^1}, \qquad G_{22}^2 + G_{12}^1 = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u^2}$$

Отсюда

$$G_{12}^2 = \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial u^1}, \qquad G_{12}^1 = \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial u^2} \qquad (1.8)$$

Преобразуем два первых уравнения системы (1.6), используя (1.7) и (1.8)

Введем обозначения

$$\frac{T_{11}}{\sqrt{\rho}}=x\,,\qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{-\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{q\rho}{2\sqrt{g}}\right)+(G_{11}^1-G_{12}^2)\frac{q\rho}{2\sqrt{g}}+q^1 g\right\}=X$$

$$\frac{T_{22}}{\sqrt{\rho}}=y\,,\qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{-\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{q\rho}{2\sqrt{g}}\right)+(G_{22}^2-G_{12}^1)\frac{q\rho}{2\sqrt{g}}+q^2 g\right\}=Y$$

В результате получим систему

$$\frac{\partial x}{\partial u^2}+G_{11}^2 y+X=0\,,\qquad \frac{\partial y}{\partial u^1}+G_{22}^1 x+Y=0 \tag{1.9}$$

Обращение в нуль одной из величин G_{11}^2 или G_{22}^1 указывает на то, что соответствующая система координатных линий является системой прямолинейных образующих.

В этом случае система (1.9) интегрируется квадратурами. Пусть, например, $G_{11}^2=0$; общее решение системы (1.9) при этом

$$x=-\int X\,du^2+f(u^1)$$

$$y=\int G_{22}^1\,du^1\int X\,du^2-\int G_{22}^1 f(u^1)\,du^1-\int Y\,du^1+\varphi(u^2) \tag{1.10}$$

Это—общее решение задачи о равновесии линейчатой поверхности. Отсюда легко получить известные решения для поверхностей второго порядка, найденные В. В. Соколовским, а также указанное им решение для поверхности равного ската.

Относя поверхность положительной кривизны к изотермически сопряженным координатным линиям, положим $b_{11}=b_{22}=b$. Тогда

$$T_{11}=T\,,\qquad T_{22}=-T-\frac{qg}{b} \tag{1.11}$$

Если ввести обозначения

$$X=q^1 g-G_{11}^2\frac{qg}{b}\,,\qquad Y=q^2 g+G_{12}^2\frac{qg}{b}-\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{qg}{b}\right)$$

уравнения равновесия можно привести к следующей системе:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial u^2}-\frac{\partial T_{12}}{\partial u^1}-(G_{12}^1+G_{11}^2)\,T+(G_{11}^1-G_{12}^2)\,T_{12}+X=0\\&\frac{\partial T}{\partial u^1}+\frac{\partial T_{12}}{\partial u^2}-(G_{12}^2+G_{22}^1)\,T-(G_{22}^2-G_{12}^1)\,T_{12}+Y=0\end{aligned} \tag{1.12}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для сферы члены, зависящие от символов Кристоффеля, исчезают.

Для центральной поверхности второго порядка

$$x^2=\frac{a\,(a-u^1)\,(a-u^2)}{(a-b)\,(a-c)}\,,\qquad y^2=\frac{b\,(b-u^1)\,(b-u^2)}{(b-a)\,(b-c)}\,,\qquad z^2=\frac{c\,(c-u^1)\,(c-u^2)}{(c-a)\,(c-b)}$$

Вторую квадратичную форму можно привести к изотермическому виду подстановкой

$$\alpha^i=\int\left[(a-u^i)\,(b-u^i)\,(c-u^i)\right]^{-1/2}du^i$$

Вычисляя символы Кристоффеля для новых переменных, находим, что система (1.12) приводится к следующей:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial y}{\partial \alpha^1}+\frac{X}{\sqrt{u^1u^2}}=0\,,\qquad \frac{\partial x}{\partial \alpha^1}+\frac{\partial y}{\partial \alpha^2}+\frac{Y}{\sqrt{u^1u^2}}=0 \tag{1.13}$$

Здесь $x=T\,/\sqrt{u^1u^2}$, $y=T_{12}\,/\sqrt{u^1u^2}$. Уравнения (1.13) были получены Власовым и Соколовским.

В заключение рассмотрим случай развертывающейся поверхности. Рассматривая ее как геометрическое место касательных к пространственной кривой—ребру возврата, зададим ее векторным уравнением

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0(u)+(v-u)\,\mathbf{r}_0'(u)$$

Здесь $\mathbf{r}_0(u)$—пространственная кривая, u—длина ее дуги. Пусть ρ и τ—радиусы кривизны и кручения кривой, заданные как функции от u. Положим

$$\frac{u-v}{\rho}=\varphi$$

Тогда

$$g_{11}=\varphi^2\,,\quad g_{12}=0\,,\quad g_{22}=1\,,\quad b_{11}=\frac{\varphi}{\tau}\,,\quad b_{12}=b_{22}=0$$

Полагая

$$T_{11}=\varphi x,\quad T_{12}=\varphi y,\quad X=q^2\varphi-q\tau\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,,\quad Y=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial u}(q\tau\varphi)-q'\varphi$$

придем к системе уравнений

$$\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}+X=0\,,\qquad \frac{\partial y}{\partial v}+Y=0 \tag{1.14}$$

Эта система интегрируется квадратурами

$$y=-\int Y\,dv+f_1(u)\,,\qquad x=\int dv\int Y\,dv-vf_1'(u)-\int X\,dv+f_2(u) \tag{1.15}$$

2. После того как определены усилия, можно вычислить деформации оболочки по формулам

$$T_{ij}=\frac{3D}{h^2}\left[(\varepsilon_{sk}g^{sk})\,g_{ij}-(1-\sigma)\,\varepsilon_{ij}\right] \tag{2.1}$$

Изменения коэффициентов второй квадратичной формы δ_{ij} удовлетворяют уравнениям, которые получаются в результате варьирования соотношений Кодацци и Гаусса.

Эти уравнения в точности совпадают с уравнениями (1.6), если заменить в последних величины T_{ij} через δ_{ij}, а под q^i, q понимать некоторые заданные функции, выражающиеся через компоненты деформации. Таким образом задача об отыскании изменений кривизны по заданной деформации вполне эквивалентна задаче определения усилий в оболочке при заданной нагрузке. Знание величин ε_{ij} и δ_{ij} позволяет определить новые координаты точек средней поверхности. Однако мы изберем другой путь для определения перемещений и будем, следуя Вейнгартену, находить их непосредственно. Пусть малый вектор смещения $\mathbf{w}$ задан как функция координат u^1 и u^2. Производные вектора $\mathbf{w}$ можно представить следующим образом:

$$\mathbf{w}_i=(\varepsilon_{ij}+\omega_{ij})\,\mathbf{r}^j+c_i\mathbf{n} \tag{2.2}$$

Здесь ω_{ij} — антисимметричный тензор. Положим $\omega_{12}=\varphi\sqrt{g}$.

Функция φ введена Вейнгартеном и носит название характеристической функции. Составляя условия интегрируемости системы (2.2), придем к следующим уравнениям:

$$\beta_1 + \varphi_1 \sqrt{g} = -c_2 b_{11} + c_1 b_{12}, \qquad \beta_2 + \varphi_2 \sqrt{g} = -c_2 b_{12} + c_1 b_{22} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial u^2} - \frac{\partial c_2}{\partial u^1} + \varepsilon_{11} b_2^1 + \varepsilon_{12} b_2^2 - \varepsilon_{12} b_1^1 - \varepsilon_{22} b_1^2 + \varphi \sqrt{g}\,(b_2^2 + b_1^1) = 0$$

Здесь для краткости положено $\beta_i = \varepsilon_{ij,k} - \varepsilon_{ik,j} \quad (k < j)$.

Исключая c_1 и c_2 из последнего уравнения, получим

$$\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\varphi_2 b_{11} - \varphi_1 b_{22}}{K\sqrt{g}}\right) + \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\varphi_1 b_{22} - \varphi_2 b_{12}}{K\sqrt{g}}\right) + \sqrt{g}\varphi\,(b_2^2 + b_1^1) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\beta_2 b_{11} - \beta_1 b_{22}}{Kg}\right) + \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\beta_1 b_{22} - \beta_2 b_{12}}{Kg}\right) + \varepsilon_{11} b_2^1 + \varepsilon_{12}(b_2^2 - b_1^1) - \varepsilon_{22} b_1^2 = 0 \tag{2.4}$$

Здесь K — полная кривизна. Имея решение уравнения (2.4), по формулам (2.3) находим c_i и далее из формул (2.2) квадратурами находим $\mathbf{w}$. При $\varepsilon_{ij} = 0$ уравнение (2.4) определяет бесконечно малые изгибания.

3. Расчет оболочек по безмоментной теории приводится к решению уравнения, совершенно аналогичного уравнению (2.4). Исключив при помощи частного решения в уравнении (1.3) нагрузку, найдем, что $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ представляют собой частные производные некоторого вектора $\mathbf{a} = a^i \mathbf{r}_i + \psi \mathbf{n}$, причем: 1) $\mathbf{a}_i$ лежит в касательной плоскости и 2) $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}^i = 0$, так как T_{ij} — симметричный тензор. Для производных вектора $\mathbf{a}$ имеем

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{T}_j = \left(\frac{\partial a^i}{\partial u} + G_{kj}^i a^k - \psi b_j^i\right)\mathbf{r}_i + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u^j} - a^i b_{ij}\right)\mathbf{n} \tag{3.1}$$

Из первого условия следует

$$\psi_j + a^i b_{ij} = 0$$

Отсюда

$$a^1 = \frac{1}{Kg}(\psi_2 b_{12} - \psi_1 b_{22}), \qquad a^2 = -\frac{1}{Kg}(\psi_2 b_{11} - \psi_1 b_{12}) \tag{3.2}$$

Второе условие после упрощений, связанных с использованием тождеств

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^i} = G_{ik}^k$$

приводит к следующему соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial u^1}(a^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial u^2}(a \sqrt{g}) - \psi \sqrt{g}\,(b_2^2 + b_1^1) = 0$$

Внося сюда выражения (3.2), придем к уравнению для функции ψ, совпадающему с характеристическим уравнением Вейнгартена (2.4), если положить в нем $\varepsilon_{ij} = 0$ и заменить φ через ψ. Формулы для компонента усилий можно записать в симметричной форме, положив

$$a^1 = \frac{c_2}{\sqrt{g}}, \quad a^2 = -\frac{c_1}{\sqrt{g}}, \quad \psi\sqrt{g} = \omega_{12} = -\omega_{21}, \quad \omega_{11} = \omega_{22} = 0.$$

Именно

$$-T_{ij} = \frac{\partial c_i}{\partial u^j} - c_k G_{ij}^k + \omega_{ik} b_j^k \tag{3.3}$$

Характеристическое уравнение Вейнгартена может быть преобразовано к одной из канонических форм, именно к форме

$$\triangle \theta - M\theta = 0 \tag{3.4}$$

для поверхности положительной кривизны и

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^1 \partial u^2} - M\theta = 0 \tag{3.5}$$

для поверхности отрицательной кривизны. Это преобразование указано в курсе Bianchi [5]. Как известно, три частных решения уравнения (3.4) или (3.5) определяют по формулам Лельевра поверхность, отнесенную к изотермически сопряженной сетке или к асимптотическим линиям. Имея в виду решение определенных краевых задач, представляет интерес исследование классов поверхностей, для которых уравнения (3.4) или (3.5) принадлежат к хорошо изученным. Так, задаваясь тремя произвольными гармоническими функциями, можно построить поверхности, для которых уравнение (3.4) есть уравнение Лапласа. Примеры параболоида и прямого геликоида хорошо известны. Можно указать также класс поверхностей вращения

$$r = -c\,(ae^{u} + be^{-u}) + (1 + cu)\,(ae^{u} - be^{-u})$$

$$z = -\left[\frac{a^2}{2} e^{2u} + 2abu - \frac{b^2}{2} e^{-2u}\right]$$

для которых меридианы и параллели образуют изотермическую сетку такую, что $M = 0$.

4. Уравнения безмоментной теории не позволяют удовлетворить произвольным граничным условиям. Для оболочек отрицательной кривизны задание усилия, распределенного по граничной линии, не являющейся асимптотической, определяет решение в области, ограниченной двумя асимптотическими, проходящими через начальную и конечную точки граничной кривой. Разрыв граничных значений усилий приводит к разрывному решению. Для односвязного куска оболочки положительной кривизны на контуре можно задать только одно условие (если не вводить особенностей внутри области, не всегда допускающих механическое истолкование). Задание граничных условий в деформациях в рамках безмоментной теории вообще смысла не имеет. Для решения краевой задачи, вообще говоря, необходимо рассматривать изгиб оболочек в целом и краевой эффект вблизи границы, даже если нагрузка на границе лежит в касательной плоскости. Здесь мы укажем на одну возможность расширения класса граничных условий, возможных в безмоментной теории, за счет введения безмоментного краевого эффекта.

Деформации оболочки, незначительные сами по себе, но сконцентрированные в узкой зоне вблизи границы, могут вызвать большие местные изменения кривизны и повлиять на перераспределение усилий. Принимая линию контура за линию $v = 0$, положим $g_{12} \approx 0$, $g_{11} \approx g_{22} \approx 1$, что всегда возможно для узкой области. Усилия, определенные по безмоментной теории, будут T_{11}°, T_{22}°, T_{12}°, изменения их вследствие изменений кривизны T_{11}, T_{22}, T_{12}.

Уравнения равновесия запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial v}-\frac{\partial T_{12}}{\partial u}=0\,,\qquad \frac{\partial T_{22}}{\partial u}-\frac{\partial T_{12}}{\partial v}=0\,, \tag{4.1}$$

$$(T_{11}{}^{\circ}\delta_{22}+T_{22}{}^{\circ}\delta_{11}-2T_{12}{}^{\circ}\delta_{12})+(T_{11}b_{22}+T_{22}b_{11}-2T_{12}b_{12})+$$
$$+(T_{11}\delta_{22}+T_{23}\delta_{11}-2T_{12}\delta_{12})=0 \tag{4.2}$$

Уравнения совместности можно получить так, как это сделано в нашей работе [6]:

$$\frac{\partial\delta_{11}}{\partial v}-\frac{\partial\delta_{12}}{\partial u}=0\,,\qquad \frac{\partial\delta_{22}}{\partial u}-\frac{\partial\delta_{12}}{\partial v}=0 \tag{4.3}$$

$$b_{11}\delta_{22}+b_{22}\delta_{11}-2b_{12}\delta_{12}+\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}{}^{2}=\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial v^2}-\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial u^2} \tag{4.4}$$

Вводя функцию усилий F и функцию изгиба φ так, что

$$T_{ij}=\frac{\partial^2 F}{\partial u^i\,\partial u^j}\,,\qquad \delta_{ij}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i\,\partial u^j}$$

придем к нелинейной системе, являющейся обобщением уравнений Фёппля для мембраны.

Применим эти уравнения к оболочке, закрепленной вдоль линии $v=0$. Допустим, что порядки величин $T_{ij}{}^{\circ}$ одинаковы, порядок δ_{ij} не больше порядка b_{ij}. Соотношение между порядками производных по v и по u следующее:

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}\right]=\eta\left[\frac{\partial}{\partial v}\right],\qquad \eta\ll 1$$

Из (4.1) следует

$$[T_{12}]=\eta\,[T_{22}]\,,\qquad [T_{11}]=\eta^2\,[T_{22}]$$

Из (4.3)

$$[\delta_{22}]=[b]\,,\qquad [\delta_{12}]=\eta\,[b]\,,\qquad [\delta_{11}]=\eta^2\,[b]$$

(прямые скобки обозначают порядок величины).

Сравнивая порядки членов в уравнении (4.2), находим, что его можно упростить, после чего остается

$$T_{11}{}^{\circ}\,\delta_{22}+T_{22}\,b_{11}=0 \tag{4.5}$$

Точно таким же образом уравнение совместности становится

$$b_{11}\,\delta_{22}=-\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial v^2} \tag{4.6}$$

Связывая усилия с деформациями, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial v^2}-p^2T_{22}=0\,,\qquad p=\frac{2Ehb_{11}{}^2}{T_{11}{}^{\circ}} \tag{4.7}$$

В случае закрепленного края дополнительные усилия в пограничной зоне будет следующими:

$$T_{11}=0\,,\qquad T_{22}=-(T_{22}{}^{\circ}-\sigma T_{11}{}^{\circ})\,e^{-pv} \tag{4.8}$$

Поступило в редакцию
10 IV 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

J. N. RABOTNOV.—SOLUTIONS OF THE MOMENTLESS THEORY OF SHELLS

The paper deals with methods of determining momentless stressed states in shells. By employing asymptotic or isothermically conjugated lines as coordinates, the equation of equillibrium is reduced to its simplest form. For surfaces generated by a straight line, the solution are obtained in quadratures (1.10), (1.15); a number of known solutions are easily obtained for surfaces of the second order.

A second method is based on an analogy with the problem of infinitesimal small deflections of surfaces. Equilibrium of a shell is described by the Mutard equation (3.4) or (3.5).

The momentless boundary effect is taken up at the end of the paper.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beltrami. Sull'equilibrio delle superficie flessibile e inestendibile. Opere. T. III.
2. Власов. Расчет некоторых оболочек вращения на несимметричную нагрузку. Проект и стандарт. 1937. № 3, 4.
3. Власов. Расчет оболочек, очерченных по центральным поверхностям второго порядка. Сборник «Пластинки и оболочки». 1939.
4. Соколовский. Уравнения равновесия безмоментных оболочек. Прикладная математика и механика. 1939. Т. УП. Вып. 1.
5. Bianchi. Vorlesungen über Differenzialgeometrie.
6. Работнов. Уравнения пограничной зоны в теории оболочек. ДАН. Т. XLVII. Вып. 5.