

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН¹

А. А. И л ь ю ш и н

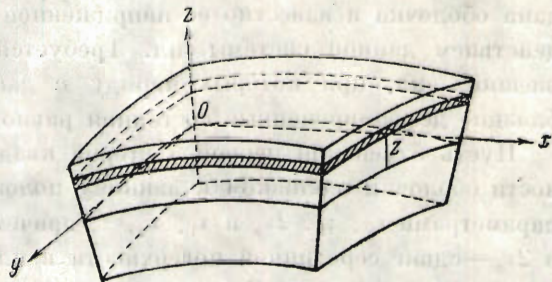
(Москва)

В этой статье развиваются результаты моей работы^[1] «Устойчивость пластин и оболочек за пределом упругости». Дается значительно упрощенный вывод соотношений между силовыми факторами и деформациями, возникающими при потере устойчивости пластин и оболочек. В строгой постановке задача сводится к решению двух совместных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка для величины прогиба и функции напряжений, а в приближенной — к решению одного линейного уравнения типа уравнения Брайана. Приводится решение частных задач о цилиндрической форме потери устойчивости прямоугольной пластинки и об устойчивости равномерно сжатых пластин произвольной формы в плане. Они показывают, что точность приближенных решений является удовлетворительной.

§ 1. Выражения сил и моментов через деформации срединной поверхности

Подвижной трехгранник Дарбу, относительно которого будем изучать состояние элемента оболочки, выберем так, чтобы плоскость xy была касательной к срединной поверхности, а оси x и y направлены по каким-нибудь ортогональным кривым (фиг. 1)

Напряженное состояние элемента определяется тензором напряжений S . Его компоненты Z_x , Z_y , Z_x , малы сравнительно с X_x , Y_y , X_y , т. е. каждый слой элемента оболочки, параллельной срединной поверхности, находится в плоском напряженном состоянии. Интенсивность напряжений этого слоя будет



Фиг. 1

$$\sigma_i = \sqrt{X_x^2 - X_x Y_y + Y_y^2 + 3X_y^2} \quad (1.1)$$

Деформированное состояние элемента определяется компонентами тензора деформаций e_{xx} , e_{yy} , e_{xy} , так как сдвиги e_{xz} , e_{yz} малы, а относительное удли-

¹ Работа доложена на 6-м международном конгрессе по прикладной механике в Париже 22—29 сентября 1946.

Примечание авт. в корректуре

нение e_{zz} может быть найдено из условия неизменяемости объема элемента материала

$$e_{zz} + e_{yy} + e_{xx} = 0 \quad (1.2)$$

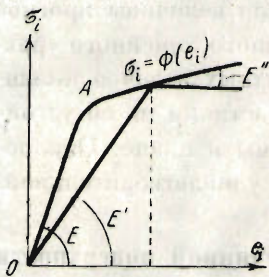
Интенсивность деформаций слоя материала определяется формулой

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_{xx}^2 + e_{xx}e_{yy} + e_{yy}^2 + \frac{1}{4}e_{xy}^2} \quad (1.3)$$

Согласно законам упругости и пластичности материала напряжения и деформации связаны соотношениями

$$S_x \equiv X_x - \frac{1}{2} Y_y = \frac{\sigma_i}{e_i} e_{xx}, \quad S_y \equiv Y_y - \frac{1}{2} X_x = \frac{\sigma_i}{e_i} e_{yy}, \quad X_y = \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{xy} \quad (1.4)$$

Здесь $\sigma_i = \sigma_i(e_i)$ есть определенная для каждого материала функция e_i . Свойства этой функции таковы: в пределах упругости, т. е. при $\sigma_i \leq \sigma'$, где σ' физическая постоянная, всегда имеет место закон Гука $\sigma_i = Ee_i$. За пределом упругости $\sigma_i = \Phi(e_i)$ есть некоторая кривая (фиг. 2).



Фиг. 2

Если в некоторый момент времени происходит бесконечно малое изменение деформированного состояния, т. е. величины e_{xx}, \dots , получают приращения $\delta e_{xx}, \dots$, то приращение напряжений до предела упругости определяется вариациями формул (1.4), полагая $\sigma_i = Ee_i$. За пределом упругости приращение напряжений при $\delta e_i > 0$ определяется вариациями формул (1.4), согласно кривой $\sigma_i = \Phi(e_i)$, а при $\delta e_i < 0$ согласно закону разгрузки вариациями этих формул в предположении, что $\sigma_i = Ee_i$.

Задача об устойчивости оболочки (пластины) ставится следующим образом: дана оболочка и известно ее напряженное и деформированное состояние под действием данной системы сил. Требуется установить критическое значение внешних сил, при которых наряду с данным возможны другие бесконечно близкие деформированные состояния равновесия.

Пусть изменения первой и второй квадратичных форм срединной поверхности оболочки в близком к данному положению равновесия характеризуются параметрами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, 2\varepsilon_3$ и α_1, α_2, τ , причем $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — относительные удлинения и $2\varepsilon_3$ — сдвиг срединной поверхности в плоскости xy , а α_1, α_2, τ — изменения кривизны и кручения. Согласно гипотезе Кирхгофа дополнительные удлинения и сдвиг в слое, расположенном на расстоянии z от срединной поверхности, будут

$$\delta e_{xx} = \varepsilon_1 - z\alpha_1, \quad \delta e_{yy} = \varepsilon_2 - z\alpha_2, \quad \delta e_{xy} = 2\varepsilon_3 - 2z\tau \quad (1.5)$$

Найдем дополнительные напряжения, соответствующие деформациям (1.5). Для этого необходимо провариировать соотношения (1.4). Вариацию величины интенсивности деформаций можно найти, пользуясь (1.5), но проще написать вариацию работы внутренних сил $\sigma_i \delta e_i$ через компоненты напряжений:

$$\sigma_i \delta e_i = X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + X_y \delta e_{xy} \quad (1.6)$$

Введем безразмерные величины

$$X_y^* = \frac{X_x}{\sigma_i}, Y_y^* = \frac{Y_y}{\sigma_i}, X_y^* = \frac{X_y}{\sigma_i}, z_1^* = \frac{h}{2} z_1, z_2^* = \frac{h}{2} z_2, \tau^* = \frac{h}{2} \tau \quad (1.7)$$

где h — толщина оболочки. Тогда согласно (1.1)

$$X_x^{*2} - X_x^* Y_y^* + Y_y^{*2} + 3X_y^{*2} = 1$$

Из (1.6) и (1.5) имеем

$$\delta e_i = \varepsilon - z^* \kappa^* = \varepsilon - z \kappa \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon &= X_x^* \varepsilon_1 + Y_y^* \varepsilon_2^* + 2X_y^* \varepsilon_3 \\ \kappa^* &= X_x^* \kappa_1^* + Y_y^* \kappa_2^* + 2X_y^* \kappa^* \\ \kappa &= X_x^* \kappa_1 + Y_y^* \kappa_2 + 2X_y^* \kappa \end{aligned} \quad (1.9)$$

При вариировании формул (1.4) заметим, что

$$\delta \frac{\sigma_i}{e_i} = -\frac{1}{e_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) \delta e_i$$

причем по свойству кривой $\sigma_i = \Phi(e_i)$ всегда $\sigma_i / e_i \geq d\sigma_i / de_i \geq 0$.

Обозначим через $z_0 = z_0^* h / 2$ координату слоя, для которого при потере устойчивости оболочки интенсивность деформаций не изменяется ($\delta e_i = 0$). Ясно, что

$$z_0 = \frac{z}{z^*}, \quad z_0^* = \frac{z}{z^*} \quad (1.10)$$

Вариации формул (1.4) имеют вид

$$\begin{aligned} \delta S_x &= \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) S_x^* z^* (z^* - z_0^*) + \frac{\sigma_i}{e_i} (\varepsilon_1 - z_1^* z^*) \\ \delta S_y &= \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) S_y^* z^* (z^* - z_0^*) + \frac{\sigma_i}{e_i} (\varepsilon_2 - z_2^* z^*) \\ \delta X_y &= \left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \frac{d\sigma_i}{de_i} \right) X_y^* z^* (z^* - z_0^*) + \frac{2\sigma_i}{3e_i} (\varepsilon_3 - \tau^* z^*) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Все входящие в правые части этих равенств величины, кроме деформаций и искривлений, известны, так как основное напряженное состояние оболочки, устойчивость которой исследуется, предполагается заданным. На фиг. 2 величины E , $E' = \sigma_i / e_i$, $E'' = d\sigma_i / de_i$ показаны как тангенсы углов, причем модуль Юнга есть постоянная, а E' и E'' зависят от напряженного состояния.

Перед потерей устойчивости оболочка может либо полностью находиться за пределом упругости, либо может иметь области упругих, упруго-пластических и чисто пластических деформаций. Если напряженное ее состояние является безмоментным, то область упруго-пластических деформаций, т. е. область, где часть толщи оболочки является упругой, другая же часть пластической, отсутствует. В этой статье мы намерены более подробно остановиться на исследовании устойчивости сжатых пластин, в которых напряженное состояние до потери устойчивости всегда является безмоментным. Поэтому будем предполагать, что и в рассматриваемых ниже оболочках до потери устойчивости область упруго-пластических деформаций отсутствует (это предположение несущественно).

После потери устойчивости область оболочки, где основные напряжения являются упругими, будет, вообще говоря, деформирована упруго, так как

вариации деформаций предполагаются бесконечно малыми. Область же чисто пластических деформаций после потери устойчивости, вообще говоря, распадается на две—одна останется чисто пластической, другая станет упруго-пластической. На фиг. 3 дано некоторое нормальное сечение оболочки и показаны три названные области (пластическая после потери устойчивости область заштрихована).



Фиг. 3

Пусть поверхность $z = z_0$, представляет собой границу между областями, одна из которых будет после потери устойчивости упругой, другая же пластической. Для определенности будем

предполагать, что в области упруго-пластических деформаций зона пластичности примыкает к поверхности оболочки $z = +1/2 h$, а зона упругости, получающаяся в результате разгрузки, к поверхности $z = -1/2 h$.

В области упругих деформаций и в зоне разгрузки ($z \leq z_0$) формулы (1.11) принимают вид

$$\delta S_x = E(\varepsilon_1 - \kappa_1 z), \quad \delta S_y = E(\varepsilon_2 - \kappa_2 z), \quad \delta X_y = \frac{2}{3} E(\varepsilon_3 - \tau z) \quad (1.12)$$

В области пластических деформаций и в зоне нагрузки ($z \geq z_0$) упруго-пластической области эти формулы можно представить в виде¹

$$\begin{aligned} \delta S_x &= (E' - E'') S_x^{*x}(z - z_0) + E'(\varepsilon_1 - \kappa_1 z) \\ \delta S_y &= (E' - E'') S_y^{*x}(z - z_0) + E'(\varepsilon_2 - \kappa_2 z) \\ \delta X_y &= (E' - E'') X_y^{*z}(z - z_0) + \frac{2}{3} E'(\varepsilon_3 - \tau z) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Переходим к выводу выражений для сил и моментов, возникающих в оболочке при потере устойчивости. По определению имеем

$$\begin{aligned} \delta T_1 &= \int_{-1/2 h}^{+1/2 h} \delta X_x dz, & \delta T_2 &= \int_{-1/2 h}^{+1/2 h} \delta Y_y dz, & \delta S &= \int_{-1/2 h}^{+1/2 h} \delta X_y dz \\ \delta M_1 &= \int_{-1/2 h}^{+1/2 h} \delta X_x z dz, & \delta M_2 &= \int_{-1/2 h}^{+1/2 h} \delta Y_y z dz, & \delta H &= \int_{-1/2 h}^{+1/2 h} \delta X_y z dz \end{aligned}$$

В области чисто пластических деформаций согласно (1.13) получим для сил

$$\begin{aligned} \frac{1}{E'h} \left(\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 \right) &= \varepsilon_1 - \lambda' S_x^{*x} \varepsilon & \frac{1}{E'h} \delta S &= \frac{2}{3} \varepsilon_3 - \lambda' X_y^{*z} \varepsilon \\ \frac{1}{E'h} \left(\delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1 \right) &= \varepsilon_2 - \lambda' S_y^{*x} \varepsilon \end{aligned} \quad (1.14)$$

¹ Из (1.12) и (1.13) видно, что вариации $\delta S_x, \dots$ на границе z_0 непрерывны в том случае, если основное напряженное состояние соответствует началу текучести, а также тогда, когда в результате вариации напряженное состояние изменяется пропорционально основному [2].

для моментов

$$\begin{aligned} \frac{4}{3D'} \left(\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) &= -x_1 + \lambda' S_x^* x & \frac{4}{3D'} \delta H &= -\frac{2}{3} \tau + \lambda' X_y^* x \\ \frac{4}{3D'} \left(\delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) &= -x_2 + \lambda' S_y^* x \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$D' = \frac{E'h^3}{9}, \quad \lambda' = \frac{E' - E''}{E'} \quad (1.16)$$

В области чисто упругих деформаций имеют место те же формулы (1.14), (1.15), только следует положить $E' = E'' = E$, $\lambda' = 0$.

Таким образом в рассматриваемых двух областях силы суть линейные функции только удлинений ε_1 , ε_2 и сдвига $2\varepsilon_3$ срединной поверхности, а моменты — линейные функции только искривлений ее.

В области упруго-пластических деформаций напряжения $\delta X_x, \dots$, имеют различные выражения для значений $z \geq z_0$ и $z \leq z_0$. Поэтому интегралы в выражениях сил и моментов приходится разбивать на две части. Например,

$$\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 = \int_{-1/2h}^{+1/2h} \delta S_x z dz = \int_{-1/2h}^{z_0} \delta S_x z dz + \int_{z_0}^{+1/2h} \delta S_x z dz$$

причем для пределов $z_0 \geq z \geq -1/2h$ брать δS_x согласно (1.12), а для пределов $+1/2h \geq z \geq z_0$ согласно (1.13). В результате вычислений получим:

для сил

$$\begin{aligned} \frac{2}{h} \left(\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 \right) &= [E + E' + (E - E') z_0^*] \varepsilon_1 + \\ &+ \frac{1}{2} (1 - z_0^{*2}) (E - E') x_1^* + \frac{1}{2} (E' - E'') S_x^* (1 - z_0^*)^2 z^* \\ \frac{2}{h} \left(\delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1 \right) &= [E + E' + (E - E') z_0^*] \varepsilon_2 + \\ &+ \frac{1}{2} (1 - z_0^{*2}) (E - E') x_2^* + \frac{1}{2} (E' - E'') S_y^* (1 - z_0^*)^2 x^* \\ \frac{2}{h} \delta S &= \frac{2}{3} [E + E' + (E - E') z_0^*] \varepsilon_3 + \\ &+ \frac{1}{3} (1 - z_0^{*2}) (E - E') \tau^* + \frac{1}{2} (E' - E'') X_y^* (1 - z_0^*)^2 x^* \end{aligned} \quad (1.17)$$

для моментов

$$\begin{aligned} \frac{12}{h^2} \left(\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) &= -[E + E' + (E - E') z_0^{*3}] x_1^* + \\ &+ \frac{1}{2} (E' - E'') (1 - z_0^*)^2 (2 + z_0^*) S_x^* x^* - \frac{3}{2} (E - E') (1 - z_0^{*2}) \varepsilon_1 \\ \frac{12}{h^2} \left(\delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) &= -[E + E' + (E - E') z_0^{*3}] x_2^* + \\ &+ \frac{1}{2} (E' - E'') (1 - z_0^*)^2 (2 + z_0^*) S_y^* x^* - \frac{3}{2} (E - E') (1 - z_0^{*2}) \varepsilon_2 \\ \frac{12}{h^2} \delta H &= -\frac{2}{3} [E + E' + (E - E') z_0^{*3}] \tau^* + \\ &+ \frac{1}{2} (E' - E'') (1 - z_0^*)^2 (2 + z_0^*) X_y^* x^* - (E - E') (1 - z_0^{*2}) \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Зависимость между силовыми факторами и деформациями получилась нелинейной, так как входящая в формулы величина z_0^* согласно (1.10) зависит от деформаций, $z_0^* = \varepsilon/\chi$. Отсюда и проистекает вся трудность решения проблемы устойчивости оболочки за пределом упругости.

Для дальнейшего очень существенно, что ордината z_0^* , зависящая как от искривлений α_1, α_2, τ , так и от деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, может быть выражена только через искривления и силы $\delta T_1, \delta T_2, \delta S$. Умножая первое уравнение группы (1.17) на X_x^* , второе на Y_y^* и третье на $3X_y^*$ и складывая результаты, получим

$$\lambda(1-z_0^*)^2 + 4z_0^* - 4 \frac{S_x^* \delta T_1 + S_y^* \delta T_2 + 3X_y^* \delta S}{E h z^*} = 0 \quad (1.19)$$

Вводя обозначение ζ для отношения толщины пластического слоя h_p к толщине оболочки h (фиг. 3)

$$\zeta = \frac{h_p}{h} = \frac{1-z_0^*}{2} \quad (1.20)$$

и решая уравнение (1.19) относительно ζ , получим

$$\zeta = \frac{E - \sqrt{EE''(1+\varphi)}}{E - E''} = \frac{1 - \sqrt{(1-\lambda)(1+\varphi)}}{\lambda} \quad (1.21)$$

где

$$\varphi = \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{S_x^* \delta T_1 + S_y^* \delta T_2 + 3X_y^* \delta S}{E h z^*}, \quad \lambda = \frac{E - E''}{E} = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \quad (1.22)$$

Формулы (1.17), (1.18) значительно упрощаются (сохраняя, впрочем, принципиальную сложность), если рассматривать начало текучести, т. е. предполагать, что материал оболочки перед потерей устойчивости лишь очень немного вышел за предел упругости. В этом случае

$$E' = E, \quad \lambda' = \lambda = \frac{E - E''}{E}$$

Поэтому в обозначениях (1.20) соответствующие формулы примут вид: для сил

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \left(\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 \right) &= \varepsilon_1 + \frac{\lambda h}{2} S_x^* \zeta^2 \chi \\ \frac{1}{Eh} \left(\delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1 \right) &= \varepsilon_2 + \frac{\lambda h}{2} S_y^* \zeta^2 \chi \\ \frac{1}{Eh} \delta S &= \frac{2}{3} \varepsilon_3 + \frac{\lambda h}{2} X_y^* \zeta^2 \chi \end{aligned} \quad (1.23)$$

для моментов

$$\begin{aligned} \frac{4}{3D} \left(\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) &= -\alpha_1 + \lambda S_x^* \zeta^2 (3 - 2\zeta) \chi \\ \frac{4}{3D} \left(\delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) &= -\alpha_2 + \lambda S_y^* \zeta^2 (3 - 2\zeta) \chi \\ \frac{4}{3D} \delta H &= -\frac{2}{3} \tau + \lambda X_y^* \zeta^2 (3 - 2\zeta) \chi \end{aligned} \quad (1.24)$$

где D —обычная цилиндрическая жесткость при значении коэффициента Пуассона, равном половине.

§ 2. Устойчивость сжатых пластинок

Обозначая прогиб пластинки при потере устойчивости $w(x, y)$ и проекции перемещения точки срединной плоскости в результате потери устойчивости на направление осей x и y соответственно $u(x, y)$, $v(x, y)$, имеем выражения для кривизн χ_1 , χ_2 , τ и деформаций ε_1 , ε_2 , ε_3

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \chi_2 &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \tau &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Силы, действующие в срединной плоскости пластинки перед потерей устойчивости, можно записать в следующем виде:

$$T_1 = h\sigma_x X_x^*, \quad T_2 = h\sigma_y Y_y^*, \quad S = h\tau X_y^*$$

А их проекцию на ось z после потери устойчивости в виде

$$T_1 \chi_1 + T_2 \chi_2 + 2S\tau = h\sigma_z$$

Поэтому условие равновесия всех сил, приложенных к элементу в проекции на ось z , даст

$$\frac{\partial^2 \delta M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \delta H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_2}{\partial y^2} + h\sigma_z = 0 \quad (2.2)$$

Условия равновесия сил, лежащих в срединной плоскости, после потери устойчивости будут

$$\frac{\partial \delta T_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta S}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \delta T_2}{\partial y} + \frac{\partial \delta S}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

Наконец, условие совместности деформаций имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.4)$$

Совокупность дифференциальных уравнений (2.2), (2.3) и (2.4) необходима и достаточна для решения задач устойчивости, если поставить соответствующие граничные условия. В самом деле, согласно (1.14) или (1.24) и (1.20) деформации ε_1 , ε_2 , ε_3 можно выразить через силы δT_1 , δT_2 , δS и кривизны χ (прогиб w), после чего моменты δM_1 , δM_2 , δH станут функциями тех же четырех аргументов. Таким образом задача сводится к четырем дифференциальным уравнениям с четырьмя неизвестными функциями, причем (2.2)—типа уравнения Брайана, а (2.3) и (2.4)—типа уравнений плоской задачи.

Для области чисто пластических деформаций пластинки (т. е. такой, где пластическое по всей толщине состояние до потери устойчивости переходит также в пластическое после потери устойчивости) система дифференциальных уравнений разбивается на две независимых. Для простоты рассмотрим лишь случай начала текучести. Внося значения δM_1 , δM_2 , δH согласно (1.15) в (2.2), получим дифференциальное уравнение типа Брайана для прогиба w

$$\nabla^4 w - \frac{h\sigma_z}{D} w = \frac{3}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} X_x^* + \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y_y^* + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} X_y^* \right) \chi \quad (2.5)$$

где в соответствии с (1.9) и (2.1)

$$\chi = X_x^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Y_y^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2X_y^* \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.6)$$

Два граничных условия, налагаемые на прогиб w , совпадают с обычными граничными условиями для уравнения Брайана.

Разрешая уравнения (1.14) относительно деформаций, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{Eh} \left(\delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 \right) + \frac{\lambda S_x^*}{(1-\lambda)Eh} (S_x^* \delta T_1 + S_y^* \delta T_2 + 3X_y^* \delta S) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{Eh} \left(\delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1 \right) + \frac{\lambda S_y^*}{(1-\lambda)Eh} (S_x^* \delta T_1 + S_y^* \delta T_2 + 3X_y^* \delta S) \\ 2\varepsilon_3 &= \frac{3}{Eh} \delta S + \frac{3\lambda X_y^*}{(1-\lambda)Eh} (S_x^* \delta T_1 + S_y^* \delta T_2 + 3X_y^* \delta S) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Уравнениям (2.3) удвлетворим, вводя функцию напряжений F

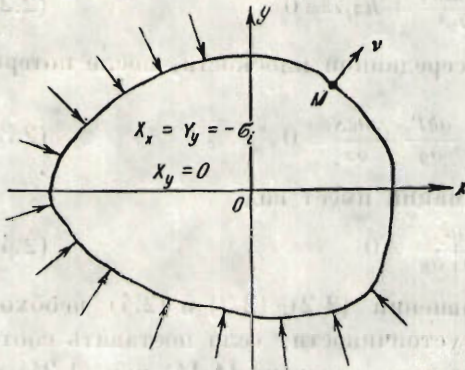
$$\frac{\delta T_1}{Eh} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \frac{\delta T_2}{Eh} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\delta S}{Eh} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2.8)$$

после чего, обозначая выражение, аналогичное (2.6):

$$t = S_x^* \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + S_y^* \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 3X_y^* \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2.9)$$

получим условие совместности деформаций в виде

$$\nabla^4 F = - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} S_x^* + \frac{\partial^2}{\partial x^2} S_y^* - 3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} X_y^* \right) \frac{\lambda}{1-\lambda} t \quad (2.10)$$



Фиг. 4

Чтобы написать граничные условия для этого уравнения, необходимо подсчитать вариации нормальной δT_ν и касательной δS_ν сил на некотором криволинейном контуре, проведенном в срединной плоскости пластинок.

Если внешняя нормаль ν и касательная s к этому контуру образуют систему координат такую, что путем вращения можно совместить положительное направление оси ν с y , а s с x , и если угол нормали с осью x обозначить через α (фиг. 4), то интересующие нас величины имеют известные выражения:

$$\begin{aligned} \delta T_\nu &= \frac{\delta T_1 + \delta T_2}{2} + \frac{\delta T_1 - \delta T_2}{2} \cos 2\alpha + \delta S \sin 2\alpha \\ \delta S_\nu &= \frac{\delta T_1 - \delta T_2}{2} \sin 2\alpha - \delta S \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (2.11)$$

Чисто пластическая область пластинки может быть ограничена контуром, часть которого совпадает с границей пластинки, другая же часть примыкает к упруго-пластической области. При формулировке задачи устойчивости в первой области граничные условия имеют вид

$$\delta T_\nu = \delta S_\nu = 0 \quad (2.12)$$

на второй же величине δT_ν , δS_ν должны быть непрерывны.

Легко показать, что при потере устойчивости вся пластинка не может остаться в чисто пластическом состоянии, т. е. что область упруго-пластических деформаций обязательно существует. В самом деле, допуская обратное, мы будем иметь однородные граничные условия (2.12) на всем внешнем контуре пластинки. Но дифференциальные уравнения (2.3) и (2.4) при усло-

виях (2.7) будут также линейными и однородными и потому имеют единственное решение

$$\delta T_1 = \delta T_2 = \delta S = 0$$

Из (2.7) следует, что и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, откуда на основании (1.9) и (1.10) вытекает $z_0 = 0$. Но $z = z_0$ есть граница между упругой и пластической зонами по толщине пластинки и условие $z_0 = 0$ означает, что срединная плоскость есть как раз эта граница. Значит, данная область пластинки является не чисто пластической, а упруго-пластической, что противоречит предположению.

Таким образом при потере устойчивости пластинки за пределами упругости она либо полностью переходит в упруго-пластическое состояние, либо в ней останутся чисто пластические области, однако не распространяющиеся на всю пластинку.

В области упруго-пластических деформаций пластинки уравнение (2.2) на основании выражений (1.24) преобразуется к виду

$$\nabla^4 w - \frac{h\sigma_1}{D} x = \frac{3}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} X_x^* + \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y_y^* + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} X_y^* \right) \zeta^2 (3 - 2\zeta) x \quad (2.13)$$

причем, как и в уравнениях (2.5), (2.10), оператор, стоящий в круглых скобках правой части, относится к множителю, стоящему справа от него.

Условие совместности деформаций (2.4) на основании (1.23) принимает вид

$$\nabla^4 F = \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} S_x^* + \frac{\partial^2}{\partial x^2} S_y^* - 3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} X_y^* \right) \zeta^2 x \quad (2.14)$$

где функция напряжений F определена согласно формулам (2.8). Величина ζ , равная отношению толщины h_p пластического слоя к толщине пластинки, входит в уравнения (2.13) и (2.14), поэтому они оказываются совместными; эта величина выражается формулой (1.21), причем функция φ , если воспользоваться обозначением (2.9), равна

$$\varphi = \frac{2}{h} \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{t}{z} \quad (2.15)$$

Уравнения (2.13), (2.14) совпадают с соответствующими уравнениями (2.5) и (2.10) на границе чисто пластической и упруго-пластической областей. В самом деле, на этой границе, кроме непрерывности величин сил δT_y , δS_y , моментов δM_y , $\delta H_y'$ (где $\delta H_y'$ есть приведенный крутящий момент согласно граничным условиям Кирхгофа), прогиба w и наклона касательной плоскости, должно иметь место еще условие

$$h_p = h, \quad \text{или} \quad \zeta = 1 \quad (2.16)$$

Из (1.21) при этом условии имеем $\varphi = -\lambda$ и $t = -(1-\lambda)zh/2$, после чего отмеченное совпадение уравнений нетрудно доказать.

Граничными условиями для уравнений (2.13), (2.14) на части контура упруго-пластической области, совпадающей с контуром пластинки, являются обычное требование $\delta T_y = \delta S_y = 0$ и два условия, налагаемые на прогиб w .

Условие (2.16) или

$$t = -(1-\lambda)zh/2 \quad (2.17)$$

представляет собой уравнение границы между чисто пластической и упруго-пластическими областями.

Возможность возникновения наряду с упруго-пластической также чисто пластической области вытекает из того, что величина ζ согласно (1.21) и (2.15) может принимать значения, не лежащие в интервале $1 \geq \zeta \geq 0$. Ниже приводятся некоторые примеры точных решений задач устойчивости пластинок и, в частности, задачи о сжатии свободно опертой по двум сторонам пластинки; края пластинки вблизи свободных опор после потери устойчивости остаются в чисто пластическом состоянии.

§ 3. Примеры точных решений задачи устойчивости пластинок

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (2.13) и (2.14) в упруго-пластической области и (2.5), (2.10) в пластической при неопределенной границе между ними, определяемой соотношением (2.16), связано с значительными математическими трудностями. Как было указано в § 1, задача устойчивости упрощается, когда вариации сил, лежащих в серединной плоскости, всюду равны нулю. В этом случае относительная толщина пластического слоя ζ оказывается известной функцией координат, так как согласно (1.28) $\varphi = 0$ и, следовательно,

$$\zeta = \frac{1}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - \lambda}) \quad (3.1)$$

Если еще напряженное состояние пластинки перед потерей устойчивости является однородным, величина ζ будет постоянна, так как в (1.23) $d\sigma_i/de_i$ будет одинаково для всей пластинки.

Приближенным решением задачи устойчивости мы называли такое, при котором вариации сил δT_1 , δT_2 , δS тождественно равны нулю. При этом удовлетворяются уравнения равновесия (2.3) и граничные условия (2.12), но, за исключением частных случаев, не удовлетворяется условие совместности (2.4). Несомнимая простота такого решения определяется тем, что в основном уравнении (2.13) величина ζ известна и выражается формулой (3.1), вследствие чего это уравнение становится линейным с постоянными или переменными коэффициентами. В развернутом виде оно очень напоминает уравнение упругой устойчивости анизотропных пластинок.

Точные решения системы (2.13), (2.14) представляют несомненный самостоятельный интерес, но для нас они существенны еще и потому, что позволяют оценить степень точности приближенных решений.

Мы укажем некоторый класс точных решений задачи устойчивости для равномерно сжатых пластинок произвольной формы и решения для прямоугольных пластинок в тех случаях, когда возможна цилиндрическая форма потери устойчивости.

1. *Устойчивость равномерно сжатых пластинок произвольной формы в плане* (фиг. 4). В этом случае напряженное состояние пластинок перед потерей устойчивости является однородным и определяется формулами

$$X_x = Y_y = -\sigma_i, \quad X_y = 0 \quad (3.2)$$

где σ_i — сжимающее напряжение по контуру и одновременно интенсивность напряжений в любой точке пластинки. Приведенные напряжения согласно

(1.7) и (1.4) будут

$$X_x^* = Y_y^* = -1, \quad X_y^* = 0, \quad S_x^* = S_y^* = -\frac{1}{2} \quad (3.3)$$

Величины x и t согласно (2.6) и (2.9) имеют выражения

$$x = -\nabla^2 w, \quad t = -\frac{1}{2} \nabla^2 F \quad (3.4)$$

Уравнение (2.14) принимает вид

$$\nabla^2 \left(t - \frac{\lambda h}{8} \zeta^2 x \right) = 0 \quad (3.5)$$

Опуская гармоническую функцию, получаем класс точных решений

$$t = \frac{\lambda h}{8} \zeta^2 x \quad (3.6)$$

вследствие чего величина φ (2.15) выражается через ζ и из (1.2) находим, что

$$\zeta = \frac{k}{3\lambda} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3\lambda}{k}} \right) = \text{const} \quad (3.7)$$

Основное дифференциальное уравнение устойчивости (2.13) теперь становится линейным с постоянными коэффициентами и имеет простой вид

$$\left[1 - \frac{3\lambda}{4} \zeta^2 (3 - 2\zeta) \right] \nabla^4 w + \frac{h\sigma_t}{D} \nabla^2 w = 0 \quad (3.8)$$

Его решение хорошо изучено для различных видов контура и различных граничных условий, хотя бы в связи с изучением упругой устойчивости равномерно сжатых пластин.

Значение ζ (3.7) мало отличается от приближенного (3.1) и характеризует степень отклонения точных решений от приближенных.

В общем случае из (3.5) имеем

$$t = \frac{\lambda h}{8} (x \zeta^2 + \Gamma_1) \quad (3.9)$$

где Γ_1 — произвольная гармоническая функция. Для сплошной круглой пластинки, например, Γ_1 — постоянная величина. Согласно (2.15) и (1.21) теперь получаем выражение ζ через x

$$\zeta = \frac{k}{3\lambda} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3\lambda}{k} + \frac{3\lambda^2 \Gamma_1}{16x}} \right) \quad (3.10)$$

после чего уравнение (2.13), имеющее в данном случае вид

$$\nabla^2 \left[1 - \frac{3\lambda}{4} \zeta^2 (3 - 2\zeta) \right] x + \frac{h\sigma_t}{D} x = 0 \quad (3.11)$$

содержит уже одну только искомую функцию x . Учитывая соотношения (3.4), оно может быть еще раз проинтегрировано

$$\left[1 - \frac{3\lambda}{4} \zeta^2 (3 - 2\zeta) \right] \nabla^2 w + \frac{h\sigma_t}{D} w = \Gamma_2 \quad (3.12)$$

где Γ_2 — новая гармоническая функция, для сплошной круглой пластинки, представляющая собой также постоянную величину, поскольку в центре прогиб w и $\nabla^2 w$ должны быть конечны. Учитывая (3.10), уравнение (3.12)

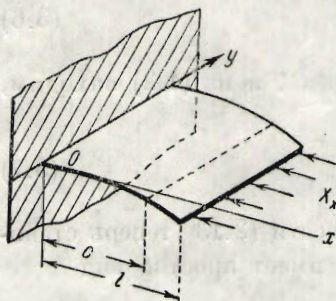
может быть разрешено относительно $\nabla^2 w$, после чего задача сводится к интегрированию только одного линейного относительно производных дифференциального уравнения второго порядка (для круглых пластинок)

$$\nabla^2 w = \Phi(w, \Gamma_1, \Gamma_2).$$

Функция напряжений F определяется теперь, согласно (3.9) и (3.4), дифференциальным уравнением Пуассона

$$\nabla^2 F = -\frac{\lambda h}{4} (z^2 + \Gamma_1) \quad (3.13)$$

Как видим, задача устойчивости для круглых пластинок сравнительно просто может быть решена до конца. Детали подобного расчета будут выяснены ниже на примере прямоугольной пластинки, сжатой в одном направлении.



Фиг. 5

2. Устойчивость прямоугольной пластинки при условии плоской деформации (фиг. 5). Такой случай имеет место, если прямоугольная пластинка ширины l сжимается в направлении оси x , причем размер ее b в направлении оси y не может удлиняться вследствие наличия ограничивающих стенок, расположенных в плоскостях $y=0$ и $y=b$. Плоскость $x=0$, изображенная на фиг. 5, где $C=2c$ и $L=2l$, будет, очевидно, плоскостью симметрии деформаций.

Форма потери устойчивости предполагается цилиндрической. В таком случае по условию задачи имеем напряжения перед потерей устойчивости

$$\begin{aligned} X_x &= -p, & Y_y &= \frac{1}{2} X_x, & X_y &= 0, & \sigma_i &= \frac{\sqrt{3}}{2} p \\ X_x^* &= -\frac{2}{\sqrt{3}}, & Y_y^* &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, & S_x^* &= -\frac{\sqrt{3}}{2}, & S_y^* &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

После потери устойчивости

$$w = w(x), \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$$

Из уравнений (1.24) имеем

$$\delta S = 0, \quad \delta T_2 = \frac{1}{2} \delta T_1$$

Так как согласно уравнениям равновесия $\delta T_1 = \text{const}$, а $\delta T_1 = 0$ из условия на краю $x=l/2$, то мы имеем случай $\delta T_1 = \delta T_2 = \delta S = 0$. Приближенное решение, отмеченное в начале § 3, в данном случае, следовательно, является точным.

Относительная толщина пластического слоя ζ постоянна и определяется формулой (3.1). Уравнение устойчивости (2.13) принимает вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{hp}{D[1-\lambda\zeta^2(3-2\zeta)]} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.15)$$

Если ввести в рассмотрение относительный модуль Кармана, обобщенное выражение которого суть

$$K = \frac{4}{(\sqrt{E} + \sqrt{d\sigma_i/d\epsilon_i})^2} \frac{d\sigma_i}{d\epsilon_i} = \frac{4(1-\lambda)}{(1 + \sqrt{1-\lambda})^2} \quad (3.16)$$

то из (3.1) получим

$$\lambda = \frac{4(1-\sqrt{k})}{(2-\sqrt{k})^2}, \quad \zeta = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{k} \quad (3.17)$$

после чего можем упростить выражение параметра в уравнении (3.15)

$$\gamma^2 = \frac{hp}{D[1-\lambda\zeta^2(3-2\zeta)]} = \frac{hp}{Dk} \quad (3.18)$$

Так как до предела упругости $k=1$, а на площадке текучести материала $k=0$, и так как характеристические значения параметра γ в упругой и пластической задачах одинаковы, то из (3.18) вытекает, что критическое напряжение, соответствующее площадке текучести, равно нулю.

Интересно отметить, что задача Кармана может рассматриваться как предельный случай устойчивости сжатой в одном направлении прямоугольной пластинки, размер b которой весьма мал, причем параметр γ будет иметь выражение

$$\gamma^2 = \frac{4hp}{3kD}$$

и, следовательно, на площадке текучести материала критическое напряжение будет равно нулю. Как видно из предыдущего и следующего примеров точных решений, полная потеря несущей способности пластинок, получающаяся в задаче Кармана, вообще говоря, не имеет места. Это обстоятельство нами уже отмечалось [1].

3. Устойчивость прямоугольной пластинки, сжатой в одном направлении (фиг. 5). Будем рассматривать цилиндрические формы потери устойчивости прямоугольной пластинки, достаточно длинной в направлении оси y , предполагая, что сжимающее напряжение приложено только вдоль оси x . В этом случае

$$\begin{aligned} X_x &= -\sigma_i, & Y_y &= X_y = 0 \\ S_x^* &= -1, & S_y^* &= \frac{1}{2}, & X_x^* &= -1, & Y_y^* &= X_y^* = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

По условию задачи всякое поперечное сечение пластинки плоскостью $y = \text{const}$ после потери устойчивости остается плоским, и потому имеем

$$\varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_2 = \text{const} \quad (3.20)$$

на основании чего из (1.24) $\delta S = 0$. Кроме того, из граничного условия $\delta T_1 = 0$ на краях $x = \pm 1/2 l$ и, следовательно, из уравнения (2.3) следует, что $\delta T_1 = 0$ всюду.

Так как никаких сил вдоль оси y не приложено, то должно выполняться условие

$$\int_{-1/2 l}^{+1/2 l} \delta T_2 dx = 0 \quad (3.21)$$

Из второго уравнения системы (2.14) имеем

$$\frac{d^2 F}{dx^2} \equiv \frac{\delta T_2}{Eh} = \varepsilon_2 - \frac{\lambda h}{4} \zeta^2 x_1 \quad (3.22)$$

так как $x = -x_1$. Нетрудно убедиться, что (3.22) есть интеграл уравнения (2.14). Функция φ , через которую согласно (1.21) определяется вели-

чина ζ , в данном случае имеет вид

$$\varphi = -\frac{\lambda \delta T_2}{(1-\lambda) E h^2 z_1} = -\frac{\lambda \varepsilon_2}{(1-\lambda) h z_1} + \frac{\lambda^2}{4(1-\lambda)} \zeta^2 \quad (3.23)$$

Изгибающий момент в произвольном сечении равен

$$\delta M_1 = -D \left[1 - \frac{3}{4} \lambda \zeta^2 (3 - 2\zeta) \right] z_1 \quad (3.24)$$

и поэтому граничные условия на сторонах $x = \pm 1/2 l$ суть $z_1 = 0$.

Из формулы (3.23) ясно, что z_1 не может равняться нулю в упруго-пластической области, так как $\varepsilon_2 \neq 0$ (последнее вытекает из того, что величина $\zeta^2 z_1$ знакопостоянна и именно положительна вдоль всей пластинки и потому условие (3.24) требует $\varepsilon_2 \neq 0$). Таким образом упруго-пластическая область не доходит до краев пластинки и заканчивается в сечениях $x = \pm 1/2 c$. Примыкающие к краям области будут целиком пластические. В самом деле, так как величина $\zeta^2 z_1$ положительна, то и ε_2 положительна. Из (2.7) следует, что в чисте пластической и чисто упругой областях сила δT_2 имеет тот же знак, что и ε_2 , т. е. является растягивающей. Но если к пластинке, сжатой за пределом упругости в одном направлении (x), приложить растягивающую силу в другом (y), то она останется в пластическом состоянии. Формально в этом можно убедиться путем вычисления величины δe_i согласно (1.8), которая на концах равна $-\varepsilon_1$; но удлинение ε_1 согласно (2.7) отрицательно, и потому величина δe_i будет положительной, т. е. пластическая деформация до потери устойчивости остается пластической и после.

Из (1.24) и (3.23) теперь имеем

$$\frac{h z_1}{4 \varepsilon_2} = \frac{1}{p(\zeta)}, \quad p(\zeta) = -4 + 8\zeta - 3\lambda \zeta^2 \quad (3.25)$$

Отсюда находим нижнюю границу величины ζ ($p > 0$).

$$1 \geq \zeta > \frac{4}{3\lambda} \left((1 - \sqrt{1 - \frac{3}{4} \lambda}) \right) \quad (3.26)$$

Основное дифференциальное уравнение устойчивости (2.13) принимает вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[1 - \frac{3}{4} \lambda \zeta^2 (3 - 2\zeta) \right] z_1 + \frac{h \sigma_i}{D} z_1 = 0 \quad (3.27)$$

Вводя обозначения

$$Q(\zeta) = 4 - 9\lambda \zeta^2 + 6\lambda \zeta^3, \quad \xi = \frac{2x}{l}, \quad \alpha = \frac{c}{l} \quad (3.28)$$

уравнение (3.27) представим в виде

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \frac{Q}{P} + \frac{\mu^2}{P} = 0 \quad (3.29)$$

где μ — основной параметр, определяющий критическое напряжение

$$\mu^2 = \frac{h l^2 \sigma_i}{D} \quad (3.30)$$

Интеграл уравнения (3.29) можно получить в квадратурах. Вводя обозначение

$$R(\zeta) = 2 \frac{4 - 12\zeta + 12\zeta^2 - 3\lambda \zeta^3}{(4 - 8\zeta + 3\lambda \zeta^2)^2} \quad (3.31)$$

получаем последовательно

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 \left(\frac{Q}{P} \right)' = \mu^2 C_1 - \mu^2 R, \quad \mu \sqrt{2} \xi = c_2 - \int \frac{P dR}{\sqrt{C_1 - R}} \quad (3.32)$$

в чем штрих наверху означает производную по ζ .

В чисто пластической области согласно результатам § 2 и (3.19) имеем для силы δT_2 и для момента δM_1 :

$$\frac{\lambda T_2}{Eh} = \frac{4(1-\lambda)}{4-3\lambda}, \quad \delta M_1 = -D \left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right) x_1 \quad (3.33)$$

Основное дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 x_1}{d\xi^2} + \frac{\mu^2}{4-3\lambda} x_1 = 0 \quad (3.34)$$

Решение последнего уравнения, удовлетворяющее условию $x_1 = 0$ на конце $\zeta = 1$, запишем в виде

$$x_1 = \varepsilon_2 C_3 \sin \frac{\mu(1-\xi)}{\sqrt{4-3\lambda}} \quad (3.35)$$

причем вследствие симметрии прогиба относительно плоскости $x = 0$ в дальнейшем будем рассматривать лишь правую половину пластинки ($x \geq 0$).

Для определения пяти неопределенных постоянных, а именно трех произвольных постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3 , координаты границы областей α и критического числа μ , мы можем, кроме уравнения (3.21), написать еще четыре условия:

Условие симметрии

$$\xi = 0, \quad \frac{d\zeta}{d\xi} = 0 \quad (3.36)$$

Условие наличия границы областей

$$\xi = \alpha, \quad \zeta = 1 \quad (3.37)$$

Два условия непрерывности: момента и перерезывающей силы, которые согласно (3.25) и (3.35) принимают вид

$$C_3 \sin \frac{\mu(1-\alpha)}{\sqrt{4-3\lambda}} = \frac{4}{h(4-3\lambda)}, \quad \frac{\mu C_3}{\sqrt{4-3\lambda}} \cos \frac{\mu(1-\alpha)}{\sqrt{4-3\lambda}} = \frac{4P'(1)}{hP^2(1)} \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_\alpha \quad (3.38)$$

Постоянная ε_2 несущественна и в указанные условия не входит, поскольку от нее не зависят отношения $\delta T/\varepsilon_2$ и x_1/ε_2 .

Выполняя указанные условия и вводя новую неизвестную ζ_0 — относительную толщину пластического слоя в сечении $x = 0$, получим для величин $1-\alpha$ (относительная длина чисто пластического участка) и μ следующие формулы:

$$\mu = \frac{\lambda M}{(1-\lambda)\sqrt{2}}, \quad 1-\alpha = \frac{4-3\lambda}{\lambda} \frac{L}{M} \quad (3.39)$$

где L и M суть интегралы:

$$L = \int_{R(1)}^{R(\zeta_0)} \frac{1-2\zeta + \lambda\zeta^2}{\sqrt{R(\zeta_0) - R(\zeta)}} dR, \quad M = \int_{R(1)}^{R(\zeta_0)} \frac{(1-\zeta)^2 dR}{\sqrt{R(\zeta_0) - R(\zeta)}} \quad (3.40)$$

причем величина ζ_0 определяется соотношением

$$\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\sqrt{4-3\lambda}}{(1-\lambda)\sqrt{2}} L \right) = 2(4-3\lambda) [R(\zeta_0) - R(1)]. \quad (3.41)$$

Как уже установлено, величина $1-\alpha$ положительна, поэтому интеграл L должен быть положителен, а для этого необходимо $1-2\zeta_0 + \lambda\zeta_0^2 > 0$, т. е.

$$\zeta_0 < \frac{1}{\lambda} (1 - \sqrt{1-\lambda}) \quad (3.42)$$

Учитывая оценку (3.26), справедливую и для ζ_0 , видим, что эта величина заключена в узких пределах и близка к приближенному значению (3.4). Отсюда вытекает, что и критическая сила будет мало отличаться от приближенного ее значения.

4. *Приближенное решение задачи для пластинок, напряженное состояние которых перед потерей устойчивости является однородным.* В этом случае компоненты напряжения X_x , Y_y , X_y и интенсивность напряжения σ_1 постоянны всюду; постоянной будет и величина λ , а поэтому согласно (3.4) и величина ζ .

Оси координат x , y в рассматриваемом случае можно выбрать так, чтобы напряжение X_y было равно нулю (главные оси напряжений). Основное уравнение устойчивости (2.13) принимает вид

$$\left[1 - \frac{3}{4}(1-k)X_x^{*2}\right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \left[1 - \frac{3}{4}(1-k)X_x^* Y_y^*\right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \left[1 - \frac{3}{4}(1-k)Y_y^{*2}\right] \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{h\sigma_1}{D} \left(X_x^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Y_y^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0$$

причем обобщенный модуль Кармана k введен здесь согласно формулам (3.16) и (3.17), так как имеет место соотношение

$$k\zeta^2(3-2\zeta) = 1-k$$

Коэффициенты в уравнении (3.43) все положительны, так как наибольшее значение каждой из величин X_x , Y_y по модулю равно $2/\sqrt{3}$ и $1 \geq k \geq 0$.

Таким образом поставленная задача решается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами типа уравнения Брайана и по трудности мало отличается от соответствующей упругой задачи.

Поступила в редакцию
29 VIII 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

A. A. ILYUSHIN. — ELASTICO-PLASTIC STABILITY OF PLATES

This work develops the results presented in the author's previous paper^{1,2} "Stability of Plates and Shells Beyond the Elasticity Limit". Outlined here is a more simplified method of obtaining the relationships between stresses and strains arising in plates owing to loss of stability.

In its most rigorous form the problem is reduced to two simultaneous non linear partial differential equations of the fourth order leading to a determination of the deflection and stress function. In its approximate form the problem is reduced to a linear equation similar to that of Bryan.

At the end of the work the solution is given of the following problems: cylindrical form of the loss of stability of rectangular plates; and, stability of uniformly compressed plates having arbitrary shape in plane. The solution reveals that the accuracy obtained by the approximate method is fully satisfactory.

ЛИТЕРАТУРА

- Ильюшин А. А. Устойчивость пластинок и оболочек за пределом упругости. Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII.
- Ильюшин А. А. К теории малых упруго-пластических деформаций. Прикладная математика и механика. 1946. Т. X (стр. 347).