Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ ПРИ ЗАДАННЫХ СМЕЩЕНИЯХ НА ГРАНИЦЕ СРЕДЫ

Д. И. Шерман
(Москва)

§ 1. Предположим, что упругая среда заполняет конечную многосвязную область S, лежащую в плоскости $z = x + iy$ и ограниченную контуром L, состоящим из совокупности замкнутых, не пересекающихся и не касающихся друг друга кривых L_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$; из них через L_0 обозначим внешнюю границу области, содержащую внутри себя остальные внутренние кривые L_j $(j = 1, \ldots, m)$. Обход полной границы L, как обычно, будем считать происходящим в положительном направлении относительно области S и нормаль n к ней направим изнутри S во-вне.

Далее, обозначим через S_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$ односвязные области, ограниченные соответственными кривыми L_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$. При этом, очевидно, область S_0 будет бесконечной.

За начало координат возьмем точку, лежащую в области S. Кроме того, пусть $z_j = x_j + iy_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ будут аффиксы некоторых произвольно фиксированных точек, лежащих соответственно в S_j $(j = 1, \ldots, m)$.

Наконец, координаты точек контура L будем считать достаточное число раз дифференцируемыми по дуге s.

Рассмотрим так называемые установившиеся колебания среды. В этом случае, как известно, продольный и поперечный потенциалы $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют в области S уравнениям

$$\triangle\varphi + k_1^2\varphi = 0 \qquad \triangle\psi + k_2^2\psi = 0 \tag{1.1}$$

где $\triangle$ — оператор Лапласа,

$$k_1 = \frac{\lambda}{a}, \qquad k_2 = \frac{\lambda}{b} \tag{1.2}$$

причем λ — частота колебаний, a и b — скорости распространения соответственно продольных и поперечных волн.

На границе L, если на ней заданы компоненты вектора смещения, будем иметь условия

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = f_1(s), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = f_2(s) \tag{1.3}$$

где $f_j(s)$ $(j = 1, 2)$ — известные непрерывные функции дуги s.

Таким образом задача, которой посвящена настоящая статья, заключается в интегрировании уравнений (1.1) при граничных условиях[1] (1.3)

---

[1] Эта задача уже нами рассматривалась в статье [1], где, однако, мы ограничились лишь случаем конечной односвязной области и, кроме того, оставили открытым вопрос о существовании решения. Здесь же, несколько видоизменяя представление для искомых потенциалов, предложенное в указанной статье, мы рассмотрим общий случай конечной или бесконечной многосвязных областей и исследуем также вопрос о существовании решения.

Потенциалы $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ будем искать в виде

$$\varphi(x, y) = \int\limits_L \{\nu_1(s) F_1^{(1)}(x, y; s) + \nu_2(s) F_2^{(1)}(x, y; s)\} ds \tag{1.4}$$

$$\psi(x, y) = \int\limits_L \{\nu_1(s) F_1^{(2)}(x, y; s) + \nu_2(s) F_2^{(2)}(x, y; s)\} ds$$

где плотности $\nu_j(s)$ $(j=1, 2)$ — новые неизвестные функции, подлежащие определению, s — дуга точки $M(\xi, \eta)$, лежащей на L, и

$$F_1^{(1)} = +A \frac{\partial}{\partial x} \frac{dN(k_1 r)}{dn} + B\cos(n, \xi) N(k_1 r) + D\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \frac{\partial N(k_1 r_j)}{\partial x}$$

$$F_2^{(1)} = +A \frac{\partial}{\partial y} \frac{dN(k_1 r)}{dn} + B\cos(n, \eta) N(k_1 r) + D\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \frac{\partial N(k_1 r_j)}{\partial y} \tag{1.5}$$

$$F_1^{(2)} = +A \frac{\partial}{\partial y} \frac{dN(k_2 r)}{dn} - B\cos(n, \eta) N(k_2 r) + D\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \frac{\partial N(k_2 r_j)}{\partial y}$$

$$F_2^{(2)} = -A \frac{\partial}{\partial x} \frac{dN(k_2 r)}{dn} + B\cos(n, \xi) N(k_2 r) - D\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \frac{\partial N(k_2 r_j)}{\partial x}$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \qquad r_j = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}$$

и введены обозначения

$$N(k_j r) = N_0(k_j r) - J_0(k_j r)\log k_j \qquad (j=1,2) \tag{1.6}$$

в которых $J_0(k_j r)$ — функция Бесселя первого рода и нулевого порядка, а $N_0(k_j r)$ отличается от обычной функции Неймана наличием дополнительного множителя $\pi/2$. Далее, $\varepsilon_j = 1$, если точка с аффиксом $t = \xi + i\eta$ лежит на L_j, и $\varepsilon_j = 0$, если эта точка лежит на любой из остальных кривых $L_k (k \neq j)$; наконец,

$$A = -\frac{2}{\pi(k_1^2 + k_2^2)}, \qquad B = \frac{k_1^2 - k_2^2}{\pi(k_1^2 + k_2^2)}, \qquad D = -\frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \tag{1.7}$$

В дальнейшем в зависимости от удобства будем пользоваться представлением функции $N(k_j r)$ в одной из следующих форм:

$$N(k_j r) = \log r + P(k_j r), \qquad N(k_j r) = \left(1 - \frac{k_j^2 r^2}{4}\right)\log r + Q(k_j r) \tag{1.8}$$

где, очевидно, $P(k_j r)$ имеют непрерывные в замкнутой области S частные производные первого порядка по x и y, а $Q(k_j r)$ — непрерывные в той же области частные производные третьего порядка по тем же переменным. Кроме того, как нетрудно видеть:

$$\lim_{k_j \to 0} P(k_j r) = C - \log 2, \qquad \lim_{k_j \to 0} \frac{\partial P(k_j r)}{\partial x} = \lim_{k_j \to 0} \frac{\partial P(k_j r)}{\partial y} = 0$$

$$\lim_{k_j \to 0} \frac{1}{k_j^2} \frac{\partial^2 Q(k_j r)}{\partial x^2} = \lim_{k_j \to 0} \frac{1}{k_j^2} \frac{\partial^2 Q(k_j r)}{\partial y^2} = \frac{1}{2}(1 + \log 2 - C) \qquad (j=1,2)$$

$$\lim_{k_j \to 0} \frac{1}{k_j^2} \frac{\partial^2 Q(k_j r)}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \lim_{k_j \to 0} \frac{1}{k_j^2} \frac{\partial^3 Q(k_j r)}{\partial x^3} = \ldots = \lim_{k_j \to 0} \frac{1}{k_j^2} \frac{\partial^3 Q(k_j r)}{\partial y^3} = 0$$

где C — так называемая постоянная Эйлера.

Вычислим на основании формул (1.4) частные производные от функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ по координатам x и y и, принимая во внимание соотношения (1.8), составим выражения $\partial\varphi / \partial x + \partial\psi / \partial y$ и $\partial\varphi / \partial y - \partial\psi / \partial x$. Затем, перейдем в них к пределу, устремляя точку $M(x, y)$ области S к некоторой точке $M(\xi_0, \eta_0)$, лежащей на L, и полученные предельные значения подставим в граничные равенства (1.3). Тогда будем иметь для определения плотностей $\nu_j(s)$ $(j=1,2)$ систему уравнений Фредгольма

$$\nu_j(s_0) + \int_L \{\nu_j(s) K_j^{(j)}(s, s_0) + \nu_{j+1}(s) K_{j+1}^{(j)}(s, s_0)\} ds = f_j(s_0) \qquad (j=1, 2) \qquad (1.9)$$

в которой индекс 3 нужно заменить на 1, и ядра, являющиеся непрерывными функциями переменных s и s_0, соответственно равны

$$K_1^{(1)} = \frac{1}{\pi}\left[1 + \frac{1}{k_1^2+k_2^2}\left\{k_1^2\left[1-2\left(\frac{\partial r_0}{\partial \xi}\right)^2\right] + k_2^2\left[1-2\left(\frac{\partial r_0}{\partial \eta}\right)^2\right]\right\}\right]\frac{d\log r_0}{dn} -$$

$$-\frac{D}{2}\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j\left\{\frac{k_1^2+3k_2^2}{2} + (k_1^2-k_2^2)\frac{(\xi_0-x_j)^2}{r_{0j}^2} + (k_1^2+k_2^2)\log r_{0j}\right\} + \frac{\partial R_1^{(1)}}{\partial \xi_0} + \frac{\partial R_1^{(2)}}{\partial \eta_0}$$

$$K_2^{(1)} = -\frac{2}{\pi}\,\frac{k_1^2-k_2^2}{k_1^2+k_2^2}\,\frac{\partial r_0}{\partial \xi}\,\frac{\partial r_0}{\partial \eta}\,\frac{d\log r_0}{dn} -$$

$$- D\frac{k_1^2-k_2^2}{2}\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j\frac{(\xi_0-x_j)(\eta_0-y_j)}{r_{0j}^2} + \frac{\partial R_2^{(1)}}{\partial \xi_0} + \frac{\partial R_2^{(2)}}{\partial \eta_0} \qquad (1.10)$$

$$K_1^{(2)} = -\frac{2}{\pi}\,\frac{k_1^2-k_2^2}{k_1^2+k_2^2}\,\frac{\partial r_0}{\partial \xi}\,\frac{\partial r_0}{\partial \eta}\,\frac{d\log r_0}{dn} -$$

$$- D\frac{k_1^2-k_2^2}{2}\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j\frac{(\xi_0-x_j)(\eta_0-y_j)}{r_{0j}^2} + \frac{\partial R^{(1)}}{\partial \eta_0} - \frac{\partial R_1^{(2)}}{\partial \xi_0}$$

$$K_2^{(2)} = \frac{1}{\pi}\left[1 + \frac{1}{k_1^2+k_2^2}\left\{k_1^2\left[1-2\left(\frac{\partial r_0}{\partial \eta}\right)^2\right] + k_2^2\left[1-2\left(\frac{\partial r_0}{\partial \xi}\right)^2\right]\right\}\right]\frac{d\log r_0}{dn} -$$

$$-\frac{D}{2}\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j\left\{\frac{k_1^2+3k_2^2}{2} + (k_1^2-k_2^2)\frac{(\eta_0-y_j)^2}{r_{0j}^2} + (k_1^2+k_2^2)\log r_{0j}\right\} + \frac{\partial R_2^{(1)}}{\partial \eta_0} - \frac{\partial R_2^{(2)}}{\partial \xi_0}$$

причем

$$r_0 = \sqrt{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2}, \qquad r_{0j} = \sqrt{(\xi_0-x_j)^2+(\eta_0-y_j)^2}$$

и, кроме того, положено

$$R_1^{(1)}(x, y; s) = +A\frac{\partial}{\partial x}\frac{dQ(k_1 r)}{dn} + B\cos(n, \xi)\,P(k_1 r) + D\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j\frac{\partial Q(k_1 r_j)}{\partial x}$$

$$R_2^{(1)}(x, y; s) = +A\frac{\partial}{\partial y}\frac{dQ(k_1 r)}{dn} + B\cos(n, \eta)\,P(k_1 r) + D\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j\frac{\partial Q(k_1 r_j)}{\partial y} \qquad (1.11)$$

$$R_1^{(2)}(x, y; s) = +A\frac{\partial}{\partial y}\frac{dQ(k_2 r)}{dn} - B\cos(n, \eta)\,P(k_2 r) + D\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j\frac{\partial Q(k_2 r_j)}{\partial y}$$

$$R_2^{(2)}(x, y; s) = -A\frac{\partial}{\partial x}\frac{dQ(k_2 r)}{dn} + B\cos(n, \xi)\,P(k_2 r) - D\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j\frac{\partial Q(k_2 r_j)}{\partial x}$$

§ 2. Как следует из формул (1.10) и (1.11), ядра $K_1^{(1)}, \ldots, K_2^{(2)}$ являются целыми функциями параметра λ. Будем считать его изменяющимся на плоскости комплексного переменного λ.

Нетрудно убедиться, что резольвента системы (1.9) существует в точке $\lambda = 0$. Действительно, сложив в этом случае ее первое уравнение со вторым, умноженным предварительно на i, и имея в виду равенства, следующие за (1.8) и им аналогичные для функций $Q(k_l r_j)$ $(l = 1, 2;\ j = 1, \ldots, m)$, получим после простых преобразований

$$\varkappa\omega(t_0) + \frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \omega(t)\, d\log\frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\, d\frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} - \tag{2.1}$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\left[\varkappa A_j\{\log(t_0 - z_j) + \overline{\log(t_0 - z_j)} + 2(C - \log 2)\} - \bar{A}_j\frac{t_0 - z_j}{\bar{t}_0 - \bar{z}_j}\right] = \varkappa(f_1 + if_2)$$

где

$$\omega(t) = \nu_1(s) + i\nu_2(s), \qquad A_j = \frac{\varkappa}{2}\int_{L_j}\omega(t)\, ds, \qquad \varkappa = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \tag{2.2}$$

Введя аналитические в области S функции

$$\delta(z) = +\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t - z}\, dt - \sum_{j=1}^{m} A_j \log(z - z_j) \tag{2.3}$$

$$\chi(z) = -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}}{t - z}\, dt - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega'(t)}{t - z}\, dt + \bar{A}_j\{2(C - \log 2) + \varkappa\log(z - z_j)\} + \frac{A_j \bar{z}_j}{z - z_j}$$

запишем уравнение (2.1) в виде

$$\varkappa\delta(t) - t\,\overline{\delta'(t)} - \overline{\chi(t)} = \varkappa(f_1 + if_2) \tag{2.4}$$

Из последнего же равенства следует, что функции $\delta(z)$ и $\chi(z)$ (если они существуют) дают решение плоской статической задачи теории упругости для рассматриваемой среды при некоторых заданных смещениях на ее границе. Эта задача при весьма близкой к (2.3) форме представления для искомых функций была нами исследована ранее в статье [2]. Повторяя почти дословно рассуждения, приведенные в ней, докажем, что уравнение (2.1) всегда имеет единственное решение. Отсюда на основании теоремы Я. Тамаркина [3] сразу заключаем, что система (1.9) также имеет единственное решение почти для всех значений λ, иначе говоря, для всех точек плоскости λ, за исключением, вообще говоря, некоторого множества, не имеющего точки сгущения в любой выделенной на этой плоскости конечной области [1].

[1] Небезынтересно отметить следующее обстоятельство. Как мы установили, $\lambda = 0$ есть обыкновенная точка резольвенты системы (1.9). В то же время выражения (1.4) для функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, которые при $\lambda = 0$ в силу уравнений (1.1) должны быть гармоническими, теряют в этом случае смысл. Последнее, однако, не является неожиданным. В самом деле, нетрудно видеть, что, вообще говоря, не существуют гармонические функции, удовлетворяющие условиям (1.3). Кроме того, следует также иметь в виду, что соответствующая $\lambda = 0$ однородная задача (при $f_1 = f_2 = 0$), для которой гра-

Определив из системы (1.9) при любом из вещественных значений λ, для которых она разрешима, неизвестные $\nu_j(s)$ $(j=1, 2)$, найдем затем по формулам (1.4) искомые продольный и поперечный потенциалы $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$.

Примечание. Предположим, что кривая L_0 удалена в бесконечности и контур L, ограничивающий теперь уже бесконечную область S, состоит из совокупности замкнутых, не пересекающихся и не имеющих общих точек кривых L_j $(j=1,\ldots, m)$.

В этом случае в формулах (1.4) и (1.5) для потенциалов $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ величины ε_j $(j=1,\ldots, m-1)$ возьмем прежними, а $\varepsilon_m=-1$, если точка t лежит на любой из первых $m-1$ кривых L_j $(j=1,\ldots, m-1)$, и $\varepsilon_m=0$, если эта точка лежит на последней кривой L_m. Кроме того, к правым частям первых двух из равенств (1.5), определяющих функции $F_1^{(1)}$ и $F_2^{(1)}$, прибавим соответственно выражения

$$D\varepsilon\frac{\partial J_0(k_1\rho)}{\partial x}, \qquad D\varepsilon\frac{\partial J_0(k_1\rho)}{\partial y} \tag{2.5}$$

где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ и $\varepsilon=0$ либо $\varepsilon=1$ в зависимости от того, лежит ли точка t на кривых L_j $(j=1,\ldots, m-1)$ или на кривой L_m.

Непосредственно ясно, что потенциалы $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, выражаемые указанным образом, удовлетворяют на бесконечности так называемому принципу излучения Зоммерфельда.

Из граничных условий (1.3) при этом также получим для плотностей $\nu_j(s)$ $(j=1, 2)$ систему уравнений Фредгольма с непрерывными ядрами. Обозначим ее через (2.6) и для краткости не будем здесь выписывать.

В частности, при $\lambda=0$ эта система, как легко убедимся, поступая аналогично предыдущему, дает решение плоской статической задачи теории упругости для нашей же среды, заполняющей область S, при смещениях, ограниченных и обращающихся в постоянные величины на бесконечности

ничные равенства (1.3) тождественно совпадают с условиями Коши-Римана, очевидно, не может быть приведена к однородному уравнению Фредгольма второго рода.

Пусть $\Omega_j(x, y)$ $(j=1, 2)$—функции, гармонические в S, принимающие на границе L (соответственно) значения f_j $(j=1, 2)$. Если существуют гармонические функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, удовлетворяющие условиям (1.3), то должны выполняться соотношения

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\Omega_2}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial\Omega_1}{\partial y}-\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}=0$$

В этом случае, определив величину $\omega(t)$ из (2.1) и подставив ее значение в формулы (1.4), найдем, положив в них $\lambda=0$, функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x, y)$. При этом, учитывая, что величина $f_1(t)+if_2(t)$ является контурным значением функции, регулярной от $\bar{z}$ в области S, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt-\sum_{j=1}^{m}A_j\log(z-z_j)=\text{const}$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt=\text{const}, \qquad A_j=0 \qquad (j=1,\ldots, m)$$

Последние равенства позволяют легко установить, что правые части (1.4) остаются непрерывными при $\lambda=0$.

и принимающих некоторые заданные значения на границе L. Видоизменяя незначительно рассуждения, приведенные в упомянутой уже статье, без труда докажем, что в этом случае система (2.6) имеет единственное решение. Отсюда, как выше, заключаем, что система (2.6) будет иметь также единственное решение почти для всех значений параметра.

Поступила в редакцию
22 VI 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

D. I. SHERMAN. – STEADY ELASTIC OSCILLATIONS IN THE CASE OF GIVEN DISPLACEMENTS ON THE BOUNDARY OF THE MEDIUM

Let the elastic medium fill a finite multi-related domain S, in the $z = x + iy$ plane bounded by the contour L. This contour consists of a number of closed (non-intersecting and non-osculating) curves L_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$. The first L_0 indicates the external boundary of the domain. S_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$ denotes a unit-related domain bounded by the corresponding curves. The domain S_0 will be infinite.

A point lying in the domain S is taken as the origin of the coordinates; $z_j = x_j + iy_j$ denote the affixes of arbitrary fixed points in the S_j $(j = 1, \ldots, m)$ domains correspondingly. The coordinates of the points of the contour L are assumed to have successive derivatives in respect to the arc s insofar as is necessary.

The problem is reduced to the integration of equation (1.1) for the boundary conditions (1.3), where $\varphi(x, y)$ and $\psi(x, y)$ are the so-called longitudinal and cross sectional potentials, $f_i(s)$ $(i = 1, 2)$ are the given continuous functions of arc s, and k_j $(j = 1, 2)$ is a constant depending, according to (1.2), on the frequency of oscillation and the elastic properties of the medium.

The sought potentials are taken in the form (1.4), where $\nu_j(s)$ are the unknown densities and $F_k^{(j)}$ $(j, k = 1, 2)$ are determined by formulae (1.5), (1.6), (1.7), (1.8). The system of Fredholm equations (1.9) having continuous nuclei is obtained to determine $\nu_j(s)$. It is established that this system always has a unique solution for $\lambda = 0$. Hence, the Tamarkin theorem[3] indicates that the system may be solved for almost any magnitude of λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерман Д. И. Доклады Академии Наук СССР. Т. XLVIII. № 9. 1945.
2. Шерман Д. И. Доклады Академии Наук СССР. Т. XXVII. № 9. 1940.
3. J. Tamarkin J. Annals of Mathematics. Second ser. Vol. 28. No 2. 1927.