

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ¹

Г. С. Шапиро

(Москва)

Одномерная теория продольных колебаний упругих стержней создана работами Д. Бернулли, Эйлера, Пуассона, Коши и Навье. Строгое решение для бесконечного кругового цилиндра, полученное при помощи интегрирования трех дифференциальных уравнений теории упругости и удовлетворяющее граничным условиям на боковой поверхности цилиндра, было дано около 70 лет назад Похгаммером^[1]. Рассматривая стоячие продольные волны и пользуясь разложением по степеням безразмерного параметра c/λ , где c — радиус цилиндра, λ — длина волны, Похгаммер нашел приближенное выражение для скорости распространения колебаний

$$v = \frac{\lambda}{T} = A \left(1 - B \frac{c^2}{\lambda^2} \right)$$

где A и B — постоянные, зависящие от модуля упругости и коэффициента Пуассона.

Если длина волны велика по сравнению с радиусом цилиндра, одномерная теория продольных колебаний должна давать надежные результаты. Последнее имеет место для часто встречающихся в технике колебаний с периодом свыше десятитысячных долей секунды и размерами поперечных сечений металлических стержней порядка метра и менее. Сравнительно недавно проведенные эксперименты Fanning and Basset^[2] над ударом стержней показали хорошее совпадение данных опыта с результатами одномерной теории.

Однако, если длина волны соизмерима с радиусом цилиндра, одномерная теория продольных колебаний становится неприменимой.

Опубликованные до настоящего времени исследования одномерных колебаний относятся к стержням, материал которых следует закону Гука. Лишь в недавно появившейся работе Х. А. Рахматулина^[3] рассмотрена задача о распространении «волны разгрузки» в полубесконечном стержне, деформации которого выходят за пределы упругости.

Ниже приведена дальнейшая разработка одномерной задачи о продольных колебаниях стержней, материал которых не подчиняется закону Гука, и задачи о неупругих продольных колебаниях. При этом использованы некоторые методы решения краевых задач для квазилинейных уравнений

¹ Доложено на совещании по теории упругости, строительной механике и теории пластичности в Институте механики Академии Наук СССР 25 — 28 марта 1946 г.

гиперболического типа, разработанные Ф. И. Франклем и И. А. Кибелем в газовой динамике^[4],^[5], С. А. Христиановичем в теоретической гидравлике^[6] и теории пластичности^[7] и В. В. Соколовским в статике сыпучей среды^[8].

Работа разделяется на две части. В первой, в § 1—3, рассмотрены нелинейные и линейные упругие колебания, во второй, в § 4—5, неупругие колебания.

В § 1—3 некоторые результаты, полученные С. А. Христиановичем для неустановившихся движений в каналах и реках, без существенных изменений перенесены на нелинейные продольные упругие колебания стержней. Здесь рассмотрены задачи о распространении волн одного направления (§ 1), об отражении волн при наличии скачкообразного изменения сечения и модуля упругости стержня (§ 2), о стержнях переменного сечения (§ 3). В § 3 рассмотрены в качестве примера упругие линейные колебания конического стержня, причем в частном случае получены результаты Гюгоньо-Зеберта^[9] и А. Н. Крылова^[10] для цилиндрического стержня. В § 2 и 3 отмечена ошибочность соответствующего решения, предложенного для линейных упругих колебаний L. Donnell^[11].

Во второй части работы рассмотрены продольные колебания при наличии пластических деформаций. Как показал Х. А. Рахматулин^[3], рассматривавший колебания полубесконечного стержня, в плоскости xt существует линия (волна разгрузки), делящая эту плоскость на две части. В одной части имеет место нагружение частиц стержня, а в другой — их разгружение. В работе Рахматулина задача решается обратным методом: по заданной волне разгрузки определяются давления на конце стержня. Представляющая больший интерес прямая задача (по заданному на конце стержня давлению определить напряжения и скорости любого сечения) решена Рахматулиным для частного случая, мгновенно возросшего и падающего затем во времени по закону полинома давления. Материал стержня предположен линейно упрочняющимся (схема Прадтля). Для указанного практически интересного частного случая Рахматулиным получено точное решение в конечном виде. В разделе II содержится дальнейшее развитие результатов Рахматулина, полученное методом построения сеток характеристик. Применение этого метода позволило решить прямую задачу о распространении волны разгрузки, а также, при некоторых ограничениях — задачу о стержне конечных размеров (§ 5). Математически задача сводится к решению двух систем гиперболических уравнений разного типа, причем граница соответствующих областей — волна разгрузки — заранее неизвестна. Сходная задача для двух систем дифференциальных уравнений гиперболического типа, но с иными граничными условиями впервые рассматривалась В. В. Соколовским^[8]. Однако в отличие от решения В. В. Соколовского здесь приходится решать специальную краевую задачу, которая непосредственно не сводится к известным краевым задачам теории гиперболических уравнений (задаче Коши, Гурса или смешанной)¹.

¹ Используя прием, примененный В. В. Соколовским^[12], можно привести задачу к определению интегралов уравнений (4.5) по их значениям вдоль двух кривых^[13].

I. Упругие нелинейные и линейные колебания стержней

§ 1. Постановка задачи и вывод уравнения колебаний при наличии нелинейной зависимости напряжений от деформации принадлежит Hugoniot^[14]. Независимо от него позднее то же было сделано L. Donnell^[14]. В работе X. Рахматулина^[3] впервые рассмотрена задача о распространении воли одного направления (волн Римана).

В случае нелинейной зависимости напряжений σ от деформаций ε (эта зависимость предполагается известной из опыта) X. А. Рахматулиным^[3] получено уравнение колебаний в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

Вместо уравнения (1.1) будем рассматривать эквивалентную ему систему двух уравнений первого порядка

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \left(a = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} \right) \quad (1.2)$$

Здесь u — смещение, $v = \partial u / \partial t$ — скорость, $\varepsilon = \partial u / \partial x$ — деформация, a — скорость звука.

Уравнения (1.2) представляют систему квазилинейных гиперболических уравнений. Системы этого типа изучались в газовой динамике^{[4],[5]}, теоретической гидравлике^[6], теории пластичности^[7] и статике сыпучей среды^[8].

Большая часть результатов, полученных С. А. Христиановичем для распространения длинных волн в каналах и реках^[6], переносится без существенных изменений на нелинейные упругие колебания стержней. Напомним некоторые из этих результатов.

Решением уравнений (1.2) будем называть функции $v(x, t)$, $\varepsilon(x, t)$, удовлетворяющие этим уравнениям, определенные в некоторой замкнутой области переменных x , t и имеющие в этой области непрерывные производные первого порядка, а движение, отвечающее такому решению, назовем волной.

Дифференциальные уравнения (1.2) имеют два семейства характеристик, определяемые уравнениями:

для первого семейства

$$v - \lambda(\varepsilon) = \xi, \quad dx = a dt \quad (1.3)$$

для второго семейства

$$v + \lambda(\varepsilon) = \eta, \quad dx = -a dt \quad (1.4)$$

где

$$\lambda(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon a(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1.5)$$

Принимая за независимые переменные ξ и η , а за неизвестные функции x и t , вместо (1.2) получим

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = a \frac{\partial t}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = -a \frac{\partial t}{\partial \xi} \quad (1.6)$$

Решение системы (1.6) имеет смысл, если детерминант

$$\Delta = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, t)} = 2a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0 \quad (1.7)$$

Тождество $\Delta \equiv 0$ имеет место в трех случаях.

1) $\xi \equiv \text{const}$, $\eta \equiv \text{const}$; из (1.3) и (1.4) находим, что при этом $\varepsilon \equiv \text{const}$ и $v \equiv \text{const}$, т. е. имеем область постоянных деформаций и скоростей.

2) $\eta \equiv \text{const}$. Интегралы уравнений (1.2) в этом случае имеют вид

$$\eta = v + \lambda(\varepsilon) \equiv \text{const}, \quad x = at + \varphi(\varepsilon) \quad (1.8)$$

Здесь $\varphi(\varepsilon)$ — произвольная функция, определяемая из условий на конце стержня. Решение (1.8) дает волну, фронт которой перемещается в положительном направлении оси x (прямую волну) и сопрягается с областью постоянных скоростей и деформаций. Если в сечении $x=0$ задан закон изменения деформации по времени

$$\varepsilon = F(t) \quad (1.9)$$

то уравнение прямой волны, отвечающей (1.9), будет

$$v = \lambda(\varepsilon^0) - \lambda(\varepsilon) + v^0, \quad x = a[t - t_0(\varepsilon)] \quad (1.10)$$

причем $\lambda(\varepsilon^0)$ и v^0 — постоянные, относящиеся к области постоянной деформации, $t_0(\varepsilon)$ — функция, обратная (1.9).

Для решения (1.8) уравнения характеристик первого семейства прямолинейны и имеют вид

$$x = at + \varphi(\varepsilon), \quad \varepsilon = \text{const}, \quad (1.11)$$

Уравнения (1.11) дают закон распространения фронта, отделяющего прямую волну от области постоянной деформации. Характеристики второго семейства дают закон распространения фронта встречной волны, возникающей при встрече прямой и обратной волн или при отражении прямой волны.

3) $\xi \equiv \text{const}$. Этот случай подобен предыдущему, однако здесь фронт волны перемещается в отрицательном направлении по оси x (обратная волна).

Интегралы уравнений одномерного неустановившегося движения газа, отвечающие прямой и обратной волнам (или волнам одного направления), впервые изучались Риманом. Для задачи о продольных колебаниях стержней эти интегралы были использованы Х. А. Рахматулиным^[3]. Мы не останавливаемся здесь на задачах о волнах, возникающих при встрече прямой и обратной волн, и о разрушении волн. Первая из них решается так же, как соответствующая задача теоретической гидравлики (см. [6], § 12), вторая же требует специального рассмотрения. Отметим лишь, что если $a(\varepsilon)$ есть убывающая функция [$a'(\varepsilon) < 0$], что имеет место для большинства металлов, то при прямой волне, отвечающей нагружению стержня [$t_0'(\varepsilon) > 0$], волна не разрушается, а при волне, отвечающей нагружению стержня [$t_0'(\varepsilon) < 0$], волна начнет разрушаться в момент времени

$$t = t_0 + \frac{a}{a'} t_0'(\varepsilon) \quad (1.12)$$

Действительно, продифференцируем второе уравнение (1.10) по x и из полученного выражения определим производную

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{a' [t - t_0(\varepsilon)] - at_0'(\varepsilon)}$$

Приравнявая знаменатель нулю, приходим к (1.12).

§ 2. Рассмотрим задачу об отражении волны, возникающем при скачкообразном изменении поперечных сечений и модуля упругости стержня (фиг. 1).

Будем обозначать величины, относящиеся к части стержня, расположенного левее сечения aa , индексами 1, а правее — индексами 2. Поместим в сечении aa начало координат, направив ось x вправо.

Предположим, что в части 1 распространяется прямая волна. Подойдя к сечению aa , она отразится и в то же время вызовет в части 2 новую прямую волну. Для простоты предположим стержень в начальный момент не напряженным.

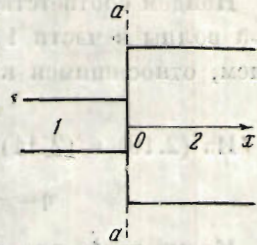
Не учитывая местных напряжений, возникающих вблизи сечения aa , можем получить приближенное решение, используя для сечения aa следующие уравнения:

а) уравнение неразрывности $u_1 = u_2$, откуда следует

$$v_1 = v_2 \quad (2.1)$$

б) равенство сил действия и противодействия

$$\sigma_1 \omega_1 = \sigma_2 \omega_2 \quad (2.2)$$



Фиг. 1.

Через σ и ω обозначены напряжения и площади поперечных сечений стержня. Предполагается, что зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ задана.

в) уравнение прямой волны для части 2 стержня

$$v_2 = -\lambda_2(\varepsilon_2) \quad (2.3)$$

Сравнивая (2.1) и (2.3), имеем

$$v_1 = -\lambda_2(\varepsilon_2) \quad (2.4)$$

Исключая из (2.3) и (2.4) ε_2 , получаем зависимость между ε_1 и v_1

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(v_1) \quad (2.5)$$

В плоскости $\xi\eta$ уравнению (2.5) отвечает некоторая кривая $\eta = \Psi(\xi)$, вдоль которой задано $x = 0$. Так как значения x и t известны вдоль отрезка характеристики $\eta = 0$, то приходим к смешанной задаче для уравнений (1.6)¹.

Остановимся в качестве примера на случае степенной зависимости напряжений от деформаций

$$\sigma = E_0 \varepsilon^{\frac{1}{n}} \quad (2.6)$$

Здесь E_0 — постоянная. Предполагаем $n \geq 1$, при $n = 1$ имеет место закон Гука. Будем считать стержень однородным.

Согласно (1.3) и (2.6) имеем

$$a(\varepsilon) = \sqrt{\frac{E_0}{\rho} \frac{1}{V^n} \varepsilon^{\frac{1-n}{n}}}, \quad \lambda(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon a(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2a_0 \sqrt{n}}{n+1} \varepsilon^{\frac{n+1}{2n}} \quad (2.7)$$

Условия (2.3) и (2.7) дают

$$\varepsilon_1 = \alpha \varepsilon_2 \quad \left(\alpha = \left[\frac{\omega_2}{\omega_1} \right]^n \right) \quad (2.8)$$

¹ Подробнее см. [6], § 16.

Из (2.4) и (2.8) находим

$$v_1 = -\alpha^{-\frac{1+n}{2n}} \lambda(\varepsilon_1) \quad (2.9)$$

В плоскости $\xi\eta$ уравнению (2.9) отвечает прямая

$$\eta = \frac{\Omega - 1}{\Omega + 1} \xi \quad \left(\Omega = \left[\frac{\omega_1}{\omega_2} \right]^{\frac{n+1}{2}} \right) \quad (2.10)$$

Величины деформаций ε и скоростей v для сечения aa , относящиеся к части 1 стержня, снабдим в дальнейшем индексом a .

Найдем соответствие между ε_a , v_a и деформациями ε_1 и скоростями v_1 прямой волны в части 1 стержня. Для этого решаем (2.10) совместно с уравнением, относящимся к прямой волне в части 1:

$$\xi = -2\lambda(\varepsilon_1) \quad (2.11)$$

Из (2.10) и (2.11) имеем

$$\eta = -2 \frac{\Omega - 1}{\Omega + 1} \lambda(\varepsilon_1) \quad \text{или} \quad \eta - \xi = \frac{4}{\Omega + 1} \lambda(\varepsilon_1) \quad (2.12)$$

Кроме того, для сечения aa

$$\eta - \xi = 2\lambda(\varepsilon_a) \quad (2.13)$$

Сравнивая (2.12) и (2.13), находим

$$\varepsilon_a = \left(\frac{2}{1 + \Omega} \right)^{\frac{2n}{1+n}} \varepsilon_1 \quad (2.14)$$

Тем же путем для v_a получаем

$$v_a = \frac{2\Omega}{1 + \Omega} v_1 \quad (2.15)$$

Для заделанного и свободного концов стержня соответственно будет

$$\Omega = 0, \quad v_a = 0, \quad \varepsilon_a = 2^{\frac{2n}{1+n}} \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad \Omega = \infty, \quad v_a = 2v_1, \quad \varepsilon_a = 0 \quad (2.16)$$

Для закона Гука $n = 1$ и при заделке получается известный результат:

$$\varepsilon_a = 2\varepsilon_1 \quad (2.17)$$

Соотношения (2.14) — (2.17) позволяют определить максимальные скорости и деформации в месте резкого изменения сечений стержня. При этом ε_1 и v_1 следует считать максимальными деформацией и скоростью прямой волны.

Задачу об отражении для случая стержней, материал которых следует закону Гука, рассматривала L. Donnell [11]. Однако результаты этой работы ошибочны, так как вместо условия равенства сил (2.2) Donnell требует равенства напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$.

Приведенному решению отвечает задача о «соответствующих» глубинах и скоростях, рассмотренная С. А. Христиановичем [6].

§ 3. Рассмотрим продольные колебания стержней переменной сечения. Уравнение колебаний в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial(\omega v)}{\partial x} = \rho \omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\omega = \omega(x)) \quad (3.1)$$

Уравнение второго порядка (3.1) заменяем системой двух уравнений первого порядка

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\omega'}{\omega} \sigma = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Или, пользуясь (1.2)

$$a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\omega'}{\omega} \sigma(\varepsilon) = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.2)$$

Дифференциальные уравнения характеристик будут:
для первого семейства

$$dv = a d\varepsilon + \frac{1}{\rho} \frac{\omega'}{\omega} \sigma(\varepsilon) dx, \quad dx = a dt \quad (3.3)$$

для второго семейства

$$dv = -a d\varepsilon + \frac{1}{\rho} \frac{\omega'}{\omega} \sigma(\varepsilon) dx, \quad dx = -a dt \quad (3.4)$$

Уравнения (3.3), (3.4) в общем случае не имеют интегрируемых комбинаций. Для их решения используем метод конечных разностей.

Остановимся на случае упругих линейных колебаний. В этом случае дифференциальные уравнения характеристик (3.3) и (3.4) можно представить в виде:

для первого семейства

$$dv^* = d\varepsilon + p(x^*) \varepsilon dx^*, \quad dx^* = dt^* \quad (3.5)$$

для второго семейства

$$dv^* = -d\varepsilon + p(x^*) \varepsilon dx^*, \quad dx^* = -dt^* \quad (3.6)$$

Здесь введены безразмерные координаты $x^* = x/l$, $t^* = at/l$, функция $p(x^*) = l\omega'/\omega$, причем l есть характерная величина для длины. В плоскости x^*t^* характеристики прямолинейны, в плоскости εv^* криволинейные характеристики заменяем отрезками прямых. Вместо уравнений (3.5) и (3.6) воспользуемся уравнениями в конечных разностях

$$v^* - v_+^* = \varepsilon - \varepsilon_+ + \bar{p}_{\varepsilon_+} (x^* - x_+^*), \quad x_-^* - x^* = t_-^* - t^* \quad (3.7)$$

$$v^* - v_-^* = \varepsilon - \varepsilon_- + \bar{p}_{\varepsilon_-} (x^* - x_-^*), \quad x^* - x_-^* = t^* - t_-^* \quad (3.8)$$

Индекс плюс относится к первому, а минус ко второму семейству характеристик, \bar{p} есть среднее значение функции $p(x^*)$ соответственно в интервалах $x - x_+^*$ или $x^* - x_-^*$.

Отметим, что при $\omega = \text{const}$ (стержень постоянного сечения) уравнения (3.7) и (3.8) дают точное решение задачи.

Задачей о продольных колебаниях стержня переменного сечения занимался L. Donnell^[11]. Рассматривая стержень составленным из n ступеней, в пределах каждой из которых сечение остается постоянным, и делая число $n \rightarrow \infty$, Donnell приходит к ошибочному решению, основанному на его неправильных результатах для задачи об отражении (см. выше § 2).

В качестве примера приложения формул (3.7), (3.8) рассмотрим задачу о продольных колебаниях конического стержня. Предположим, что деформации большего основания конуса заданы, второй конец конуса будем считать свободным. Считая характерной длиной длину конуса l и принимая остальные обозначения согласно фиг. 2, получаем для $p(x^*)$ выражение

$$p(x^*) = -\frac{2k}{1 - kx^*} \quad \left(k = \frac{l}{h}\right) \quad (3.9)$$

Определим деформации и скорости на фронте волны при $t^* < 1$, считая

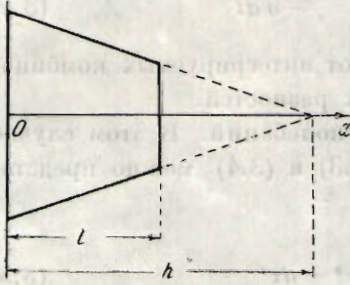
деформации ε_0 бóльшего основания конуса постоянными. На фронте волны деформации и скорости связаны соотношением

$$\varepsilon = -v^* \quad (3.10)$$

Пользуясь (3.7), (3.8), вычислим¹ для частного значения $k=0,5$ величины деформаций, внесенные на табл. 1 в графу «Приближенное решение».

Таблица 1

x^*	Приближенное решение	Точное решение	Решение Donnell
0.000	1.00	1.00	1.00
0.125	1.06	1.06	0.92
0.250	1.14	1.14	0.87
0.375	1.23	1.23	0.81
0.500	1.32	1.33	0.75
0.625	1.43	1.45	0.69
0.750	1.57	1.60	0.63
0.875	1.74	1.77	0.56
1.000	2.05	2.00	0.50



Фиг. 2.

Для оценки точности результатов, которые в этом случае дает приближенный метод, приведем точное решение задачи.

Уравнение продольных колебаний конического стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{h-x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

с помощью подстановки

$$u = \frac{\varphi(at-x) + \psi(at+x)}{h-x} \quad (3.12)$$

как известно, интегрируется в конечном виде. Произвольные функции φ и ψ определяются из начальных условий

$$u=0, \quad \varepsilon=0 \quad \text{при } t=0 \quad (3.13)$$

и условий на концах

$$\varepsilon = \varepsilon_0(t) \quad \text{при } x=0; \quad \varepsilon=0 \quad \text{при } x=l \quad (3.14)$$

Из условий (3.13) находим

$$\psi(+z)=0, \quad \psi'(+z)=0 \quad (0 < z < l) \quad (3.15)$$

$$\varphi(-z)=0, \quad \varphi'(-z)=0 \quad (0 < z < l) \quad (3.16)$$

Используя первое из условий (3.14), а также (3.15), для интервала $0 < z < l$ находим

$$\varphi'(z) - \frac{1}{h} \varphi(z) + k\varepsilon_0 \left(\frac{z}{a} \right) = 0 \quad (3.17)$$

Отсюда

$$\varphi(z) = -h \exp \frac{z}{h} \int_0^z \exp \frac{-z}{h} \varepsilon_0 \left(\frac{z}{a} \right) dz \quad (3.18)$$

¹ Все вычисления здесь и в дальнейшем выполнены на 25-см логарифмической линейке.

Деформации для интервала $l > at > x$

$$\varepsilon = \frac{h}{h-x} \varepsilon_0 \left(t - \frac{x}{a} \right) - \frac{x}{(h-x)^2} \int_0^{at-x} \exp \frac{-z}{h} \varepsilon_0 \left(\frac{z}{a} \right) dz \quad (3.19)$$

Делая в (3.19) $h \rightarrow \infty$, находим для цилиндрического стержня

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(t - \frac{x}{a} \right) \quad (3.20)$$

Решение (3.20) было получено впервые Гюгонно и Зебертом^[9] и независимо от них позднее А. Н. Крыловым^[10]. Используя последовательно первое и второе из условий (3.14), можно определить функции φ и ψ в любом интервале изменения z .

Для интересующего нас случая постоянной деформации из (3.18) получаем

$$\varphi(z) = h^2 \varepsilon_0 \left(\frac{z}{a} \right) \left(1 - \exp \frac{z}{h} \right) \quad (3.21)$$

Отсюда для деформаций имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{x}{h} \right)^{-2} \left[1 - \frac{x}{h} \exp \frac{at-x}{h} \right] \quad (3.22)$$

На фронте волны $x = at$, переходя к безразмерным величинам, имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 - kx^*)^{-1} \quad \left(x^* = \frac{x}{l}, k = \frac{l}{h} \right) \quad (3.23)$$

Значения деформации, вычисленные по точной формуле (3.23), помещены в соответствующей графе табл. 1. Там же в последней графе приведены величины деформаций, найденные по ошибочной формуле Donnell^[11]

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 - kx^*) \quad (3.24)$$

По Donnell, деформации вдоль фронта волны по мере уменьшения сечений стержня убывают. В действительности имеет место эффект возрастания деформаций по мере уменьшения сечений стержня.

III. Неупругие колебания стержней

Постановка задачи о неупругих продольных колебаниях стержней принадлежит Х. А. Рахматулину^[3], показавшему, что в случае, когда на конце полубесконечного стержня мгновенно возникло достаточно большое давление, убывающее затем монотонно во времени, плоскость xt делится кривой — «волной разгрузки» — на две части, в одной из которых происходит разгрузка, а в другой нагружение частиц стержня (x — лагранжева координата).

Для практически интересного частного случая давления, убывающего по закону полинома и линейного упрочнения материала, Рахматулиным найдено точное решение задачи в замкнутом виде. В общем случае — нелинейного упрочнения и произвольно меняющегося на конце стержня давления — Рахматулиным предложен обратный метод решения: задаваясь видом кривой разгрузки, определять соответствующее давление на конце стержня.

Излагаемый ниже метод построения сеток характеристик позволяет решить прямую задачу — по заданному на конце стержня давлению опре-

делить деформации и скорости частиц стержня, а также при известных ограничениях решить задачу о стержне конечной длины.

§ 4. Задача Рахматулина математически сводится к решению двух гиперболических уравнений разного типа, причем граница соответствующих областей — волна разгрузки — заранее неизвестна.

В области нагружения справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

а в области разгрузки, как показал Х. А. Рахматулин, уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x) \quad (4.1)$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} - a_0^2 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} \quad (4.2)$$

Индексом нуль отмечены величины, относящиеся к волне разгрузки.

Напряжения и деформации связаны в области разгрузки уравнением (фиг. 3)

$$\sigma = \sigma_0 - E(\varepsilon_0 - \varepsilon)$$

Вместо уравнений (4.1), (4.1) будем рассматривать две системы уравнений: в области нагружки

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.2)$$

в области разгрузки

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \varphi(x), \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.3)$$

Введем в рассмотрение упругую деформацию ε_* , связанную с полной деформацией ε соотношением

$$\varepsilon_* = \varepsilon + \frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon_0 \quad (4.4)$$

Вместо системы (4.3) получим

$$\frac{\partial v_*}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial \varepsilon_*}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon_*}{\partial t} = \frac{\partial v_*}{\partial x} \quad (4.5)$$

Для удобства здесь обозначено $v_* = v$.

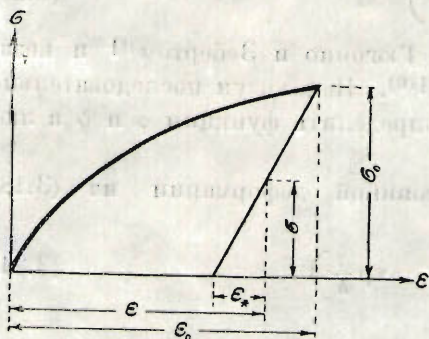
Задача решения двух систем дифференциальных уравнений гиперболического типа, границы соответствующих областей между которыми заранее неизвестны, впервые рассматривалась В. В. Соколовским. Однако в отличие от решения В. В. Соколовского здесь приходится решать специальную краевую задачу, которая непосредственно не сводится к известным крайним задачам теории гиперболических уравнений¹.

Введем плоскость характеристик $\xi_* \eta_*^2$, положив,

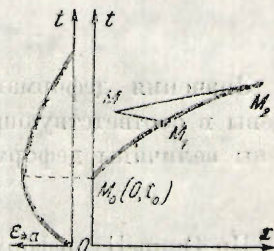
$$\xi_* = v_* - a_0 \varepsilon_*, \quad \eta_* = v_* + a_0 \varepsilon_* \quad (4.6)$$

¹ См. сноску на стр. 598.

² Плоскость $\xi_* \eta_*$ введена впервые (но иным путем) В. В. Соколовским [8].



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Остановимся сначала на «обратном» методе Рахматулина — определении по заданной волне нагрузки давления, приложенного на конце полубесконечного стержня.

Пусть в полубесконечном стержне распространяется прямая волна. В плоскости $\xi\eta$ эта волна изображается отрезком оси ξ :

$$\xi = -2\lambda(\varepsilon) \quad (4.7)$$

Предполагаем переход от нагрузки к разгрузке непрерывным, тогда на волне разгрузки

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad v = v_0, \quad \varepsilon_* = \frac{\sigma_0(\varepsilon)}{E}$$

В плоскости $\xi_*\eta_*$ граничной линией, отвечающей (4.7), будет кривая

$$\xi_{*0}(\varepsilon_0) = -\lambda(\varepsilon_0) - a_0 \frac{\sigma(\varepsilon_0)}{E}, \quad \eta_{*0}(\varepsilon_0) = -\lambda(\varepsilon_0) + a_0 \frac{\sigma(\varepsilon_0)}{E} \quad (4.8)$$

Если в плоскости xt задан вид волны разгрузки, то вдоль кривой (4.8) известны x и t и мы приходим к задаче Коши для системы (4.5). Пусть волна разгрузки имеет вид, представленный на фиг. 4, а граничная линия в плоскости $\xi_*\eta_*$, отвечающая этой волне, — вид согласно фиг. 5. Для определения деформаций в точке $M(x, t)$ проводим из этой точки характеристики положительного и отрицательного направлений, пересекающие волну разгрузки в точках $M_1(x_1, t_1)$ и $M_2(x_2, t_2)$. В плоскости $\xi_*\eta_*$ точкам M_1 и M_2 отвечают точки m_1 и m_2 ; проводя через них характеристики $\xi_* = \text{const}$ и $\eta_* = \text{const}$, получаем точку $m(\xi_{*2}, \eta_{*1})$, соответствующую точке $M(x, t)$ плоскости xt .

Для точки m имеем

$$\eta_* = v_* + a_0 \varepsilon_* = \eta_{*1}(\varepsilon_0) = -\lambda(\varepsilon_0(x_2)) + \frac{a_0}{E} \sigma(\varepsilon_0(x_1))$$

$$\xi_* = v_* - a_0 \varepsilon_* = \xi_{*2}(\varepsilon_0) = -\lambda(\varepsilon_0(x_2)) - \frac{a_0}{E} \sigma(\varepsilon_0(x_2))$$

Отсюда

$$\varepsilon_* = \frac{1}{2a_0} \{ \lambda(\varepsilon_0(x_2)) - \lambda(\varepsilon_0(x_1)) \} + \frac{1}{2E} \{ \sigma(\varepsilon_0(x_1)) + \sigma(\varepsilon_0(x_2)) \} \quad (4.9)$$

Согласно (4.4) для полной деформации получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_0(x) - \frac{\sigma_0(x)}{E} + \frac{1}{2a_0} \{ \lambda(\varepsilon_0(x_2)) - \lambda(\varepsilon_0(x_1)) \} + \frac{1}{2E} \{ \sigma(\varepsilon_0(x_1)) + \sigma(\varepsilon_0(x_2)) \} \quad (4.10)$$

Формула (4.10) иным путем впервые получена Х. А. Рахматулиным [3].

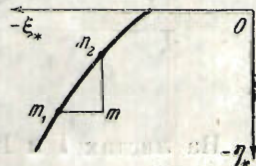
Найдем вид граничных кривых (4.8) для некоторых частных случаев зависимости напряжений от деформаций.

а) Степенное упрочнение

$$\sigma = E_0 \varepsilon^n \quad (2.6)$$

В этом случае

$$\xi_{*0}(\varepsilon_0) = -\frac{2a_0 \sqrt{n}}{n+1} \varepsilon_0^{\frac{1+n}{2n}} - a_0 \varepsilon_0^{\frac{1}{n}}, \quad \eta_{*0} = -\frac{2a_0 \sqrt{n}}{n+1} \varepsilon_0^{\frac{1+n}{2n}} + a_0 \varepsilon_0^{\frac{1}{n}} \quad (4.11)$$



Фиг. 5.

Исключая из (4.11) ε_0 , получаем уравнение, связывающее ξ_{*0} и η_{*0} , в виде

$$\gamma(\eta_{*0} + \xi_{*0}) = -(\eta_{*0} - \xi_{*0})^{\frac{n+1}{2}} \quad \left(\gamma = \frac{4a_0 \sqrt{n}}{(n+1)(2a_0)^2} \right) \quad (4.12)$$

Положим, например, $n=3$, тогда

$$(\eta_{*0} - \xi_{*0})^2 + \gamma(\eta_{*0} + \xi_{*0}) = 0 \quad (4.13)$$

Сделав подстановку

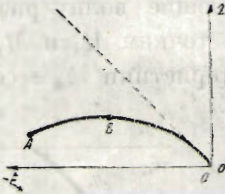
$$\xi_*' = -\frac{\xi_{*0} + \eta_{*0}}{2}, \quad \eta_*' = \pm \frac{\xi_{*0} - \eta_{*0}}{\sqrt{2}}$$

Уравнение (4.12) преобразуем к виду

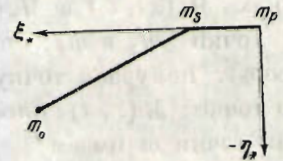
$$\eta_*'^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \xi_*' \quad (4.14)$$

Таким образом, уравнение (4.13) представляет параболу второй степени с осью симметрии $\xi_* = \eta_*$. Из (4.11) следует, что мы должны рассматривать ветвь параболы, лежащую в области отрицательных значений ξ_* . Парабола переходит через максимальные значения η_* при $\varepsilon_0 = 1/27$.

Если деформации стержня превышают $1/27$, то для получения однозначного решения необходимо в плоскости $\xi_* \eta_*$ использовать многолистные поверхности, предложенные С. А. Христиановичем [6, 7].



Фиг. 6.



Фиг. 7.

На листах I и III (фиг. 6) имеем задачу Коши, так как на кривой OBA заданы значения x и z . На листах II и IV имеем задачу Гурса.

б) Линейное упрочнение

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_s + E'(\varepsilon - \varepsilon_s) & \text{при } \varepsilon > \varepsilon_s \\ E\varepsilon & \text{при } \varepsilon < \varepsilon_s \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\quad \quad \quad (4.16)$$

При $\varepsilon_0 > \varepsilon_s$

$$\xi_{*0} = -\frac{a_0}{\mu} [(1 + \mu)\varepsilon_0 - (1 - \mu)\varepsilon_s], \quad \eta_{*0} = -a_0 \frac{1 - \mu}{\mu} (\varepsilon_0 - \varepsilon_s) \quad (4.17)$$

причем

$$\mu = \sqrt{\frac{E}{E'}} \quad (4.18)$$

При $\varepsilon_0 < \varepsilon_s$

$$\xi_* = \xi, \quad \eta_{*0} = 0 \quad (4.19)$$

Исключая из (4.17) ε_0 , получаем в области $\xi_* \eta_*$ уравнение граничной линии, отвечающей волне разгрузки в виде отрезков прямых $m_0 m_s$ и $m_s m_p$ (фиг. 7):

$$\eta_{*0} = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} (\xi_{*0} + 2a_0 \varepsilon_s) \quad \text{при } \varepsilon_0 > \varepsilon_s \quad (4.20)$$

$$\eta_{*0} = 0 \quad \text{при } \varepsilon_0 < \varepsilon_s \quad (4.21)$$

§ 5. Переходим к решению прямой задачи об определении деформаций и скоростей в стержне по заданному на его конце давлению. Упрочнение будем считать линейным, но метод решения может быть легко обобщен и на случай нелинейного упрочнения.

Особенность решения поставленной задачи состоит в том, что последняя не приводится непосредственно к известным краевым задачам теории гиперболических уравнений — к задаче Гурса, Коши или смешанной.

Действительно, в плоскости $\xi_* \eta_*$ волна разгрузки изображается прямой (4.20). Так как волна разгрузки пересекает волны Римана, то на прямой (4.20) задана зависимость между x и t в виде

$$x = a_1 [t - t_0(\varepsilon)] \quad (4.11)$$

На отрезке прямой $x = 0$ задано

$$\varepsilon_{*0}(t) = \frac{\eta_* - \xi_*}{2a_0}$$

но неизвестно v_* , а поэтому неизвестна кривая в плоскости $\xi_* \eta_*$, отвечающая этой прямой. Точке $M_0(0, t_0)$ (фиг. 4), соответствующей началу уменьшения деформаций на конце стержня, отвечает точка m_0 плоскости $\xi_* \eta_*$ (фиг. 7). Для нахождения решения определим приращение $d\varepsilon_{*0}$ вдоль волны разгрузки в точке $M_0(0, t_0)$. Деформации $\varepsilon_{*0}(t)$ на конце полубесконечного стержня считаем заданными

$$\varepsilon_{*0}(t) = \frac{\sigma_{*0}(t)}{E}$$

Мы предполагаем, что $\varepsilon_{*0}'(t)$ не обращается тождественно в нуль в рассматриваемом интервале изменения t и существует при $t > t_0$.

Будем считать, что вблизи точки $M_0(0, t_0)$ имеют место разложения

$$\varepsilon_{*0}(t) = \varepsilon_{*0}(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1 + (t - t_0)^2\varepsilon_2 + \dots \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_{*0}(x) = \varepsilon_{*0}(0) + b_1x + b_2x^2 + \dots \quad (5.2)$$

и что волну разгрузки можно представить уравнением

$$x = (t - t_1)c_1 + (t - t_0)^2c_2 + \dots \quad (5.3)$$

Сохраним в разложениях (5.1)–(5.3) линейные члены. Равенство (4.9) для конца стержня $x = 0$ напшем в виде

$$\varepsilon_{*0} = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_{*0}(x_1) + \varepsilon_{*0}^n(x_2) + \frac{1}{\mu_1} \left[\varepsilon_{*0}(x_2) - \varepsilon_{*0}(x_1) \right] \right\}$$

Подставляя в это равенство значения

$$\varepsilon_{*0}(0) = \varepsilon_{*0}(t_0) = \varepsilon_{* \max}, \quad x_1 = \frac{c_1}{1 + \mu_1} (t - t_0), \quad x_2 = \frac{c_1}{1 - \mu_1} (t - t_0)$$

и пользуясь разложениями (5.1) — (5.3), находим

$$\varepsilon_{*0} = \varepsilon_{* \max} + \frac{\mu(1 - \mu_1^2)}{\mu + \mu_1} \varepsilon_1 (t - t_0) \quad \left(\mu_1 = \frac{c_1}{a_0} \right)$$

Искомое приращение упругой деформации вдоль волны разгрузки будет

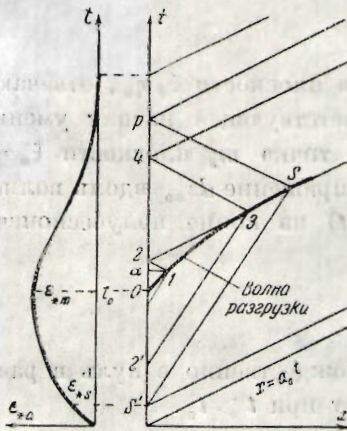
$$d\varepsilon_{*0} = \frac{\mu(1 - \mu_1^2)}{\mu + \mu_1} \varepsilon_1 dt = \frac{d\varepsilon_{*0}}{dt} dt \quad (5.4)$$

Так как значение μ_1 неизвестно, величину $d\varepsilon_{*0}$ по (5.4) можно получить лишь при условии, что в точке $M_0(0, t_0)$, $d\varepsilon_{*a}/dt = 0$. В частном случае мгновенно возросшей и падающей затем во времени деформации волна разгрузки, как показал Рахматулин, есть прямая $x = a_1 t$. В этом случае требование равенства нулю производной в точке $M_0(0, 0)$ является излишним, так как $\mu_1 = \mu = \sqrt{E'/E}$ и можно пользоваться (5.4).

Приведенный метод определения $d\varepsilon_{*0}$ по существу совпадает с методом, пользуясь которым Х. А. Рахматулин получил в замкнутой форме решение задачи о колебаниях стержня, деформации конца которого мгновенно возросли, а затем падают по закону полинома.

Предлагаемый метод решения состоит в следующем.

а) Случай, когда деформации конца стержня постепенно возрастают,



Фиг. 8.

а затем монотонно убывают (фиг. 8, 9, на которых, как и на следующих фигурах, в обозначениях точек опущены буквы M для плоскости xt и буквы m для плоскости $\xi_* \eta_*$).

Предполагается, что в момент времени $t = t_0$ производная $d\varepsilon_{*a}/dt = 0$. Чтобы получить решение, в плоскости xt берем на оси t точку $M_a(0, t_a)$, близкую к точке $M_0(0, t_0)$, так, чтобы с принятой степенью точности можно было считать $\varepsilon_{*a}(t) = \varepsilon_{*a}(t_a)$, причем $t_a > t_0$. Из точки M_a проводим линию, параллельную оси x до пересечения с прямой $x = a_1(t - t_0)$ в точке M_1 . Точка M_1 принадлежит волне разгрузки. Отвечающая ей точка m_1 плоскости $\xi_* \eta_*$ совпадает с точкой m_0 . Далее, из

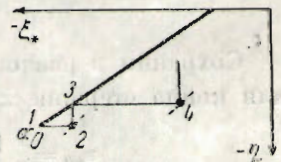
точки M_1 проводим характеристику отрицательного направления до пересечения в точке M_2 с осью $x = 0$. В точке M_2 известно ε_{*a2} , определяющее в плоскости $\xi_* \eta_*$ прямую:

$$\varepsilon_{*a2} = \frac{1}{\pm a_0} (\eta_* - \xi_*) \tag{5.5}$$

Точка m_2 , отвечающая M_2 , находится, как пересечение (5.5) с характеристикой $\dot{\eta}_* = \text{const}$, проведенной через точку m_1 . Проведя через точку m_2 характеристику $\xi_* = \text{const}$, находим ее пересечение в точке m_3 с прямой (4.20), изображающей волну разгрузки. Пользуясь (4.6), определяем деформацию, соответствующую точке m_3 . Обращая функцию $\varepsilon_a^*(t)$, находим момент времени t_2' из уравнения $\varepsilon_{*a}(t) = \varepsilon_{*a2}$. Чтобы получить в плоскости xt точку M_3 , проводим из M_2 характеристику первого семейства и волну Римана $x = a_1(t - t_2')$ из точки M_2' . Их пересечение дает точку M_3 . Дальнейшие построения очевидны.

б) Случай, когда деформации конца стержня мгновенно возрастают, а затем монотонно убывают (фиг. 10).

Из точки $M_a(0, t_a)$, близкой к точке $M_0(0, 0)$, проводим линию, параллельную оси x до пересечения в точке M_1 с волной разгрузки $x = a_1 t$.

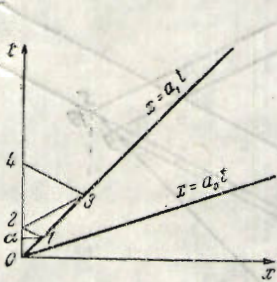


Фиг. 9.

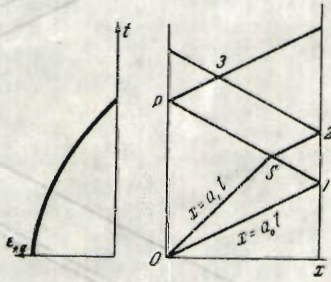
Деформацию в точке M_1 можно найти, пользуясь (5.4), из соотношения

$$\varepsilon_{*01} = \varepsilon_* \max - \Delta\varepsilon_{*0}$$

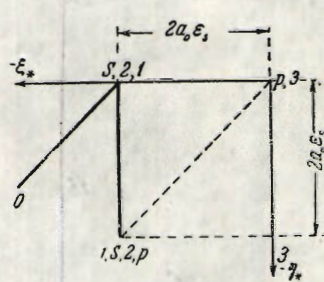
Таким путем находится точка m_1 , отвечающая точке M_1 . Дальнейшие построения остаются теми же, как в предыдущем случае. Нетрудно проследить, как меняются деформации какой-либо частицы стержня в упругой или в пластической области. В обеих областях частицы сначала мгновенно приобретают деформацию ε_s , затем в течение некоторого времени она остается постоянной. Далее, частицы, лежащие в пластической области, в случае «а» постепенно, а в случае «б» скачком приобретают свою максимальную деформацию ε_0 , которая, постепенно уменьшаясь, становится равной остаточной деформации. В упругой области ε , убывая, становится равной нулю.



Фиг. 10



Фиг. 11



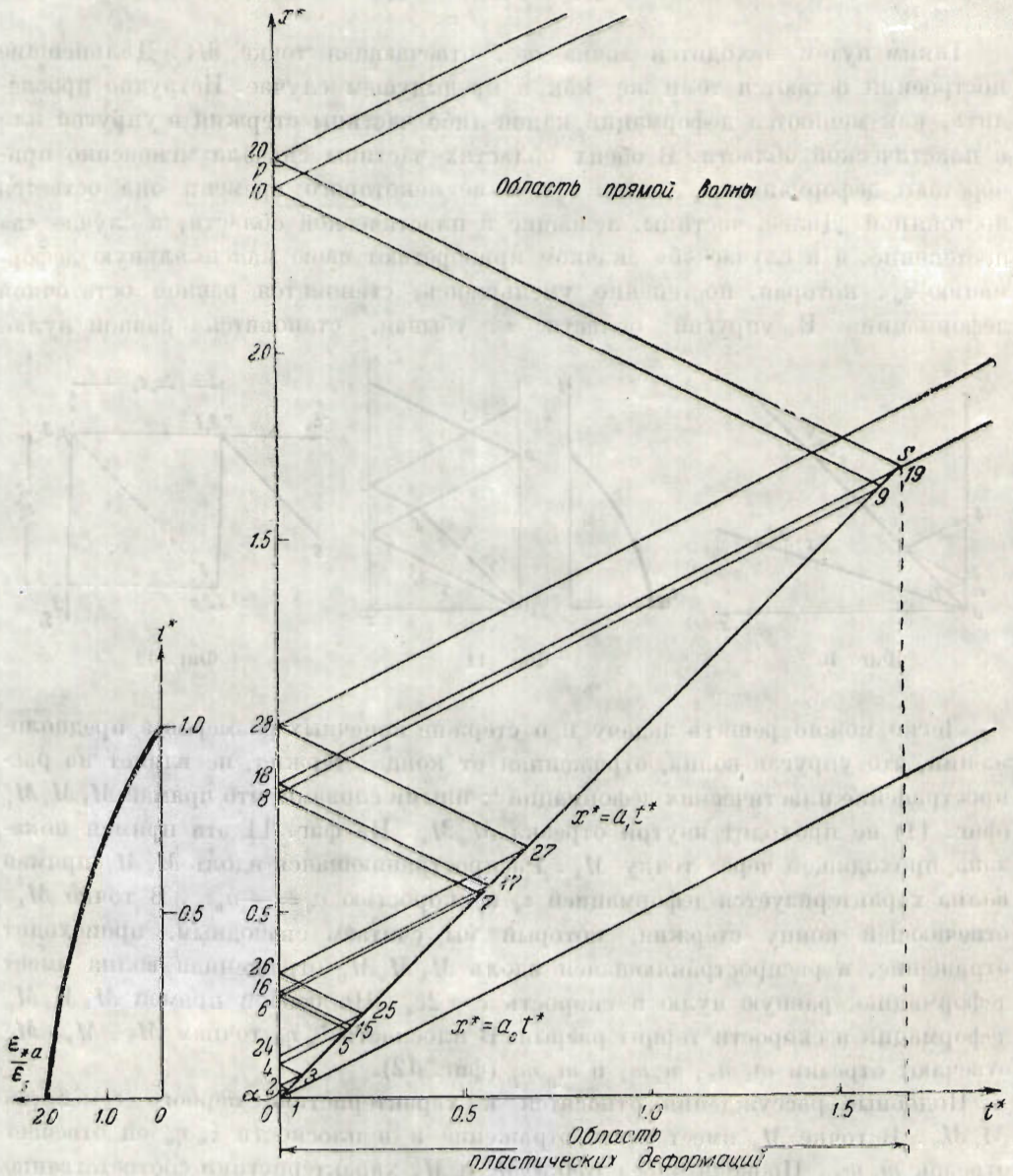
Фиг. 12

Легко можно решить задачу и о стержне конечных размеров в предположении, что упругая волна, отраженная от конца стержня, не влияет на распространение пластических деформаций¹; иными словами, что прямая $M_1 M_s M_p$ (фиг. 11) не проходит внутри отрезка $M_0 M_s$. На фиг. 11 эта прямая показана проходящей через точку M_s . Распространяющаяся вдоль $M_0 M_1$ прямая волна характеризуется деформацией ε_s и скоростью $v_0 = -a_0 \varepsilon_s$. В точке M_1 , отвечающей концу стержня, который мы считаем свободным, происходит отражение, и распространяющаяся вдоль $M_1 M_s M_p$ отраженная волна имеет деформацию, равную нулю и скорость $v = 2v_0$. На особой прямой $M_1 M_s M_p$ деформации и скорости теряют разрыв. В плоскости $\xi_* \eta_*$ точкам M_1, M_s, M_p отвечают отрезки $m_1 m_1, m_s m_s$ и $m_p m_p$ (фиг. 12).

Подобные рассуждения относятся к характеристике первого семейства $M_s M_2$. В точке M_2 имеет место отражение и в плоскости $\xi_* \eta_*$ ей отвечает отрезок $m_2 m_2$. Проводя через точки M_2 и M_p характеристики соответственно отрицательного и положительного направлений, отметим точку их пересечения M_3 . В плоскости $\xi_* \eta_*$ ей отвечает отрезок $m_3 m_3$, который можно получить, проводя через точки m_2 и m_p характеристики $\xi_* = \text{const}$ и $\eta_* = \text{const}$. Легко видеть, что в точке M_3 деформации меняются скачком от нуля до $-\varepsilon_s$. Таким образом в стержне конечных размеров, мгновенно сжатом на одном

¹ В противном случае требуется специальное решение для распространения волны в стержне с переменным пределом упругости. Такое решение недавно получил Х. А. Рахматуллин [15].

конце, могут возникнуть растягивающие напряжения. Для случая упругих линейных колебаний на это обстоятельство указал О. Е. Власов [16].



Фиг. 13

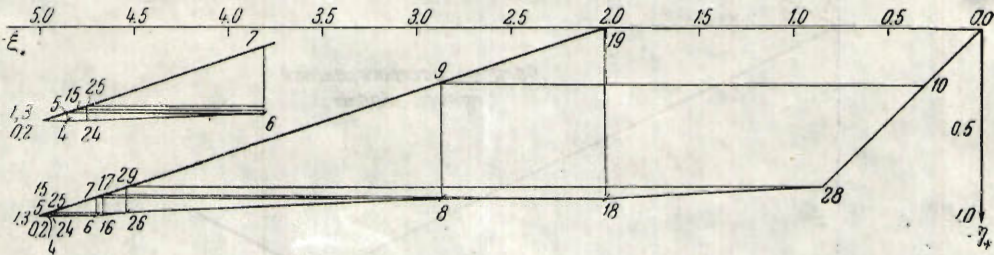
В заключение приводим два примера, относящиеся к распространению продольных колебаний в полубесконечном стержне.

1. На конце стержня заданы деформации

$$\epsilon_{*n} = \epsilon_m \left[1 - \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right]$$

где τ — время действия приложенного давления.

Мы пользовались безразмерными координатами $t^* = t/\tau$, $x^* = x/a_1\tau$ и считали $\varepsilon_s = \varepsilon_m/2$; $\mu = 1/2$. Необходимые построения приводятся на фиг. 13 и 14, а результаты вычислений деформаций ε_{*0} на волне разгрузки — в табл. 2,



Фиг. 14

где помещены для сравнения соответствующие деформации, полученные по точной формуле Х. А. Рахматулина¹.

Таблица 2

№ точек	$\varepsilon_{*0}/\varepsilon_s$		
	t^*	Приближенно	Точно
1	0.02	2.00	2.00
3	0.06	2.00	2.00
5	0.18	1.99	1.99
15	0.19	1.99	1.99
25	0.22	1.98	1.98
7	0.54	1.90	1.90
17	0.56	1.89	1.89
27	0.68	1.83	1.85
9	1.62	1.13	1.08
19	1.68	1.00	1.02

В первую очередь были построены точки ε , 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Точка 15 получена интерполяцией между точками 5 и 7, а точка 24 — между точками 4 и 6 и т. д.

2. На конце стержня заданы деформации по закону

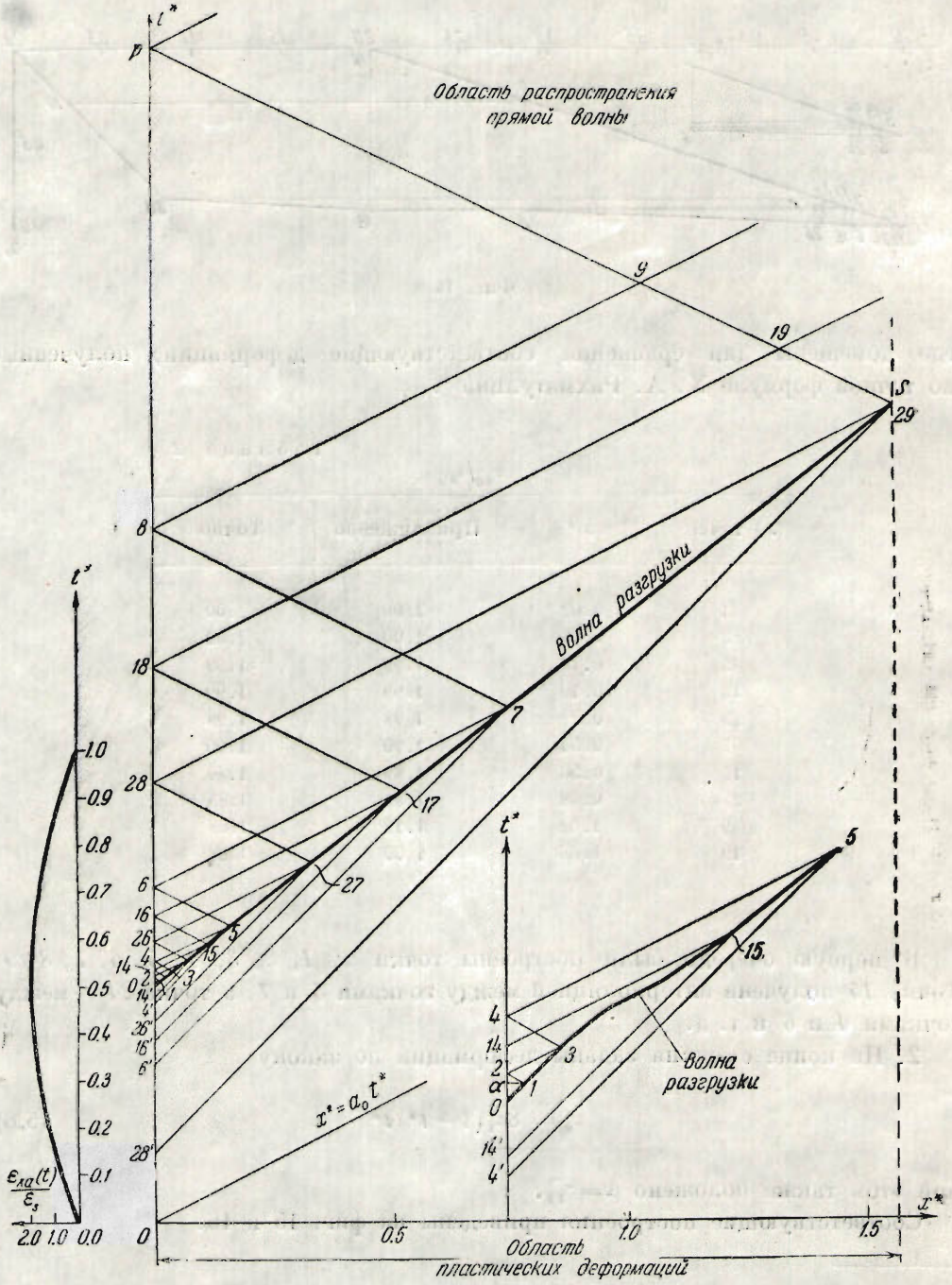
$$\varepsilon_{*0} = 8\varepsilon_s(1 - t^*)t^* \tag{5.5}$$

при этом также положено $\mu = 1/2$.

Соответствующие построения приведены на фиг. 15 и 16.

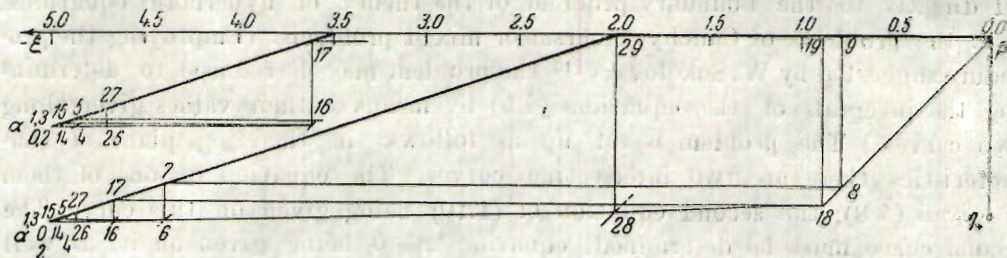
¹ В статье Х. А. Рахматулина [3] эта формула содержит опечатку. Мы пользовались формулой

$$\varepsilon_{*0} = \varepsilon_{*m} \left[1 - \frac{2\mu(1 - \mu^2)x^{*2}}{(1 + \mu)^{n+1} - (1 - \mu)^{n+1}} \right] \quad (n = 2)$$



Фиг. 15

Для контроля в табл. 3 сравнены величины деформаций ε_{*a} , вычисленные по (4.9) на основании найденных точек волны разгрузки с величинами



Фиг. 16

нами ε_{*a} , полученными непосредственно по формуле (5.5).

Таблица 3

№ точек	t^*	$\varepsilon_{*0}/\varepsilon_s$	
		Приближенно	Точно
4	0.54	1.98	1.98
16	0.71	1.83	1.83
6	0.64	1.66	1.65
28	0.92	1.52	1.52

Поступила в редакцию
24 VI 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

G. S. SHAPIRO.—LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF BARS

The paper takes up longitudinal oscillations of bars whose materials do not follow Hooke's law, as well as non-elastic longitudinal oscillations.

§ 1—3 discuss non-linear problems of longitudinal oscillation: propagation of one-directional waves (§ 1), reflection of waves due to sudden changes in cross section of the bar and modulus of elasticity (§ 2); and bars of variable cross section (§ 3). Hooke's law is derived as a particular case and the author points out the error in the results of L. Donnell^[1] for the problem of reflection of waves and for the problem of oscillation of bars of variable cross section. These results (§ 1—3) are obtained by the method suggested by S. Christianovich^[1] for investigations of unsteady flows in open channels.

The second part of the work (§ 4,5) deals with longitudinal oscillations in case of plastic deformations. The problem was set up by Kh. Rakhmatulin, who reached an exact solution for a special case when the pressure momentaneously increased over the butt-end of a semi-infinite bar decreases according to the power law.

The problem of longitudinal oscillations in case of plastic deformations is reduced to the solution of two systems of hyperbolic equations of different types (1.2), (4.3), the boundary between regions where these systems are

valid being unknown. A similar problem was investigated by W. Sokolovsky^[8], in the present investigation, however, the problem cannot be reduced directly to the boundary problem of the theory of hyperbolic equations, i. e. the problems of Cauchy, Goursat or mixed problems. (Employing the procedure suggested by W. Sokolovsky^[12] the problem may be reduced to determining the integrals of the equations (4.5) by means of their values given along two curves.) The problem is set up as follows: in the $\xi_*\eta_*$ plane of characteristics there are two intersecting curves. The equation of one of them is given (4.8); the second equation of (4.10) being given on this curve. The second curve must be determined, equation $x=0$ being given on it, as well as the difference $\eta_* - \xi_*$.

The solution obtained by means of the network of characteristics make it possible to find the deformations and velocities of particles of semi-infinite bar, on whose butt-ends an arbitrary pressure is applied. Certain assumptions make it possible to solve the same problem for a bar of finite length.

Numerical examples (fig. 13—16) reveal that the results obtained by this method coincide satisfactorily with the exact solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pochhammer. Journ. f. d. reine und ang. Mathem. 1876.
2. Fanning and Basset. Journ. of Appl. Mech. 1940.
3. Рахматулин Х. А. Прикладная математика и механика. 1945. Т. IX. № 1.
4. Франкль Ф. И. и Кибель И. А. Сборник теоретической группы ЦАГИ. Ч. II 1935. Технические заметки ЦАГИ, № 52.
5. Франкль Ф. И. и Алексеева Р. Математический сборник. 1934. т. 41. № 3.
6. Христианович С. А. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. 1938.
7. Христианович С. А. Математический сборник. 1936. т. 43. № 4.
8. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. 1942.
9. Seberlet et Hugoniot. Comptes Rendus. 1882.
10. Крылов А. Н. Дифференциальные уравнения математической физики. 1932. изд. 2-е
11. Donnell. L. Trans. A. S. M. E. 1930.
12. Соколовский В. В. Прикладная математика и механика. 1940. Т. IV. Вып. 5-6.
13. Гурса Э. Математический анализ Т. III. Ч. 1.
14. Hugoniot. Journ. de l'Ecole Polytechnique. 1887. Vol. 33.
15. Рахматулин Х. А. Прикладная математика и механика. 1946. Т. X. № 3.
16. Власов О. Е. Основы динамики взрыва. 1945.