

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ УПРУГОГО ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ Р. БЕККЕРА К ИССЛЕДОВАНИЮ ДЕЙСТВИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ¹

Д. Ю. П а н о в

(Москва)

Современная постановка инженерных задач, связанных с расчетом на прочность деталей машин и в особенности приборов, часто требует учета весьма тонких особенностей механических свойств материалов, из которых изготавливаются эти детали. В частности, для приборостроения особое значение имеет упругое последствие и упругий гистерезис. Как известно, эти два явления связаны между собой; точнее говоря, упругое последствие влечет за собой упругий гистерезис (см., например, [1]), хотя в реальных материалах и, в частности, в металлических поликристаллах явление гистерезиса и связанное с ним рассеивание энергии при колебаниях, помимо, имеют еще и другие причины (ср. [2]).

Проверка предложенных теорий упругого последствия путем сравнения их с экспериментом показывает, что надлежащим подбором функции последствия можно добиться очень хорошего совпадения результатов теоретического расчета и эксперимента для простейших опытов (см. [1]), которое, однако, ухудшается при переходе к опытам более сложным. В частности, оказывается, что классическая теория упругого последствия Больцмана [3], развитая Бенневицем в цитированной работе [1], уже не может удовлетворительно объяснить экспериментов с суперпозицией различных нагрузок и явлений, наблюдаемых при приложении периодической нагрузки. В самом деле, можно считать твердо установленным на основании многочисленных экспериментов, что площадь петли гистерезиса при колебаниях быстро растет с увеличением амплитуды (по крайней мере как куб амплитуды, а по некоторым данным еще быстрее); логарифмический декремент также растет, причем в этом случае ряд экспериментов дает линейную зависимость (см., например, результаты экспериментов Сезава и Кубо [4]). Если считать явление упругого гистерезиса связанным с упругим последствием, то теоретические величины площади петли гистерезиса и декремента никак не должны быть меньше экспериментальных, которые могут заключать в себе результаты влияния факторов, и не связанных с последствием (интеркристаллитное трение и т. п.). Между тем теория Больцмана-Бенневица приводит к квадратичной зависимости площади петли гистерезиса от амплитуды и к постоянству декремента. Это противоречие с экспериментом было

¹ Доложено на 2-м собрании по теории упругости, строительной механике и теории пластичности в Институте механики Академии Наук СССР 25 - 28 марта 1946.

одной из причин, заставивших Р. Беккера предложить новую теорию упругого последействия^[5]. Теория Беккера дает качественное совпадение с экспериментом при суперпозиции нагрузок и в этом смысле оказывается лучше теории Больцмана-Бенневица; однако проверить, сохраняется ли совпадение для случая периодической нагрузки, Беккеру не удалось, и он ограничился лишь общим указанием, что качественное совпадение должно сохраниться. Так как теория Беккера до сего времени остается наиболее совершенной из предложенных теорий, то в настоящей работе делается попытка исследовать этот нерешенный вопрос.

1. Теория Беккера связана с некоторыми представлениями более старой теории упругого последействия Вартенберга^[6]. И теория Вартенберга и теория Беккера видят основную причину упругого последействия в неоднородности материала и исходят из предположения о том, что рассматриваемый материал состоит из большого числа частиц, обладающих различными механическими свойствами, в частности, различными пределами текучести, определяющими начало пластических деформаций.

В дальнейшем для упрощения изложения мы будем рассматривать растяжение цилиндрического стержня, исключая тем самым усложнения, вызываемые формой тела и распределением напряжений.

Будем считать, что стержень состоит из *равновеликих* частиц конечных размеров, в пределах каждой из которых механические свойства материала уже не меняются. Ясно, что это предположение не соответствует действительности, однако с формальной стороны оно не является ограничением. В самом деле, достаточно разделить слишком большие частицы на несколько частей требуемой величины с одинаковыми механическими свойствами, чтобы получить нужное разбиение.

Пусть в каждом поперечном сечении стержня имеется N элементарных частиц, определенных вышеуказанным образом (слово элементарные в дальнейшем будем опускать). Если стержень растягивается силой P и все частицы в каждом его сечении ведут себя как идеально упругие, то в каждой из этих частиц устанавливается одинаковое напряжение

$$\sigma_0 = cP \quad (1.1)$$

где c — некоторая постоянная (для случая растяжения — величина, обратная площади поперечного сечения стержня).

Допустим теперь, что в частице G_v возникают пластические деформации, в результате которых в ней устанавливается напряжение $\sigma_v(t)$.

Очевидно, что величина разности $\sigma_0 - \sigma_v$ показывает, насколько будет меньше доля общей нагрузки, приходящаяся на частицу G_v , по сравнению с нормальной нагрузкой. Так как частица G_v в пластическом состоянии несет меньшую нагрузку, чем упругая, то эти упругие частицы, кроме деформации

$$\varepsilon_0(t) = \frac{1}{E} \sigma_0(t) = \frac{c}{E} P(t) \quad (1.2)$$

получат добавочную деформацию $\varepsilon_v(t)$, пропорциональную разности

$$\varepsilon_v = \frac{\gamma}{E} (\sigma_0 - \sigma_v) \quad (1.3)$$

Здесь γ — постоянная, зависящая от размеров поперечного сечения и размеров частиц. Так как мы предполагаем, что частицы равновелики, эта постоянная будет иметь одинаковую величину для всех частиц. Полная деформация стержня, очевидно, получится при сложении всех элементарных деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_{\nu=1}^N \varepsilon_{\nu} = \frac{1}{E} \left[\sigma_0 + \gamma \sum_{\nu=1}^N (\sigma_0 - \sigma_{\nu}) \right] \quad (1.4)$$

Для упругих частиц будем иметь $\sigma_{\nu} = \sigma_0$ и соответствующие слагаемые суммы исчезнут.

Таким образом задача сводится к определению напряжений σ_{ν} и вычислению суммы в формуле (1.4). Эти напряжения будут зависеть от времени, так как они относятся к частицам, находящимся в состоянии пластической деформации; соответствующий член в (1.4) даст эффект последействия.

Относительно зависимости напряжений в пластической зоне от времени могут быть сделаны разные предположения. Вартенберг^[6] предполагает, что падение напряжения в пластических частицах пропорционально скорости деформации; при этом предположении получается теория, полностью сводящаяся к классической теории Больцмана-Бенневица с несколько иной функцией последействия.

Беккер делает предположение, что в каждой пластической частице, находящейся под напряжением σ , это напряжение может внезапно упасть до нуля в результате соскальзывания материала по некоторой плоскости скольжения. Вероятность такой внезапной разгрузки за время dt дается формулой

$$dw = S(\sigma) \times dt \quad (1.5)$$

В этой формуле индивидуальность рассматриваемой частицы характеризуется константой λ . Свойства функции $S(\sigma)$ характеризуются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} S(\sigma) > 0 & \quad (\sigma \neq 0), & S(0) = 0 & \quad (\sigma = 0) \\ S(-\sigma) = S(\sigma), & & S(|\sigma_1|) < S(|\sigma_2|) & \quad |\sigma_1| < |\sigma_2| \end{aligned}$$

Отметим, что в формуле (1.5) функция $S(\sigma)$ не зависит от λ ; эта гипотеза Беккера является наименее обоснованной из всех им сделанных; однако в первом приближении мы воспользуемся ею.

Введем функцию распределения $F(x)$ для величин x . Пусть, как и выше, число всех частиц в поперечном сечении стержня будет N . Пусть, далее, число частиц с константой λ , заключенной в пределах от x до $x + dx$, будет $F(x) dx$. Очевидно

$$\int_0^{\infty} F(x) dx = N \quad (1.6)$$

Чтобы показать, к каким результатам приходит Беккер, мы приведем здесь его решение двух простейших задач о нагрузке и о разгрузке.

а) *Нагрузка*. Таким названием будем обозначать состояние стержня, при котором на него действует растягивающая сила

$$P(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ P & (t \geq 0) \end{cases}$$

В этом случае в начальный момент $t=0$ во всех частицах мы будем иметь напряжение

$$\sigma_0 = cP$$

Затем в некоторых частицах начнутся соскальзывания, внезапно разгружающие их до нуля. Условимся называть эти частицы аномальными в противоположность нормальным, в которых разгрузки не происходит. Если в момент t имелось n_1 нормальных частиц, то через промежуток времени dt число их уменьшится на величину

$$dn_1 = -n_1 dw \quad (1.7)$$

Отсюда, используя для dw выражение (1.5) и интегрируя (1.7), имеем

$$n_1 = n_0 \exp[-S(\sigma_0)zt]$$

где n_0 — число нормальных клеток в момент $t=0$. Но тогда число n_2 аномальных частиц с константой z в момент t будет равно

$$n_2 = n_0 - n_0 \exp[-S(\sigma_0)zt] = n_0 \{1 - \exp[-S(\sigma_0)zt]\}$$

Подставляя вместо n_0 его выражение

$$n_0 = F(z) dx$$

получим окончательно

$$n_2 = \{1 - \exp[-S(\sigma_0)zt]\} F(z) dx \quad (1.8)$$

Теперь легко вычислить сумму в выражении (1.4). В этой сумме члены, соответствующие нормальным частицам, равны нулю. Для аномальных частиц $\sigma_v = 0$ и $\sigma_0 - \sigma_v = \sigma_0$; таким образом сумма будет для каждого z состоять из произведения σ_0 на величину (1.8). Для получения всей суммы эти произведения придется еще проинтегрировать по z . Итак, окончательно

$$\sum_{v=1}^N (\sigma_0 - \sigma_v) = \sigma_0 \int_0^{\infty} \{1 - \exp[-S(\sigma_0)zt]\} F(z) dz \quad (1.9)$$

и выражение (1.4) для деформации приобретает вид

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 + \gamma \int_0^{\infty} \{1 - \exp[-S(\sigma_0)zt]\} F(z) dz = \frac{\sigma_0}{E} [1 + \gamma \Psi(t)] \quad (1.10)$$

где

$$\Psi(t) = \int_0^{\infty} \{1 - \exp[-S(\sigma_0)zt]\} F(z) dz \quad (1.11)$$

есть функция последствия. Беквер показывает, что для согласия с экспериментальными данными достаточно выбрать функцию

$$F(z) = \begin{cases} 0 & z < k \\ a/z & k \leq z \leq K \\ 0 & z > K \end{cases} \quad (1.12)$$

Здесь k — некоторое очень малое, а K — достаточно большое число. Под-

ставляя $F(x)$ в интеграл (1.11) и полагая $S(\sigma_0)xt = x$, мы находим

$$\int_0^\infty \{1 - \exp[-S(\sigma_0)xt]\} F(x) dx = a \int_k^K \{1 - \exp[-S(\sigma_0)xt]\} \frac{dx}{x} =$$

$$= a \int_{kS(\sigma_0)t}^{KS(\sigma_0)t} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx = a \{ \log [KS(\sigma_0)t] - \text{Ei} [-KS(\sigma_0)t] -$$

$$- \log [kS(\sigma_0)t] + \text{Ei} [-kS(\sigma_0)t] \} \tag{1.13}$$

Через $\text{Ei } x$ здесь обозначена функция

$$\text{Ei } x = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^{-u}}{u} du$$

Так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\text{Ei}(-\varepsilon) - \log \varepsilon] = C$$

где $C = 0.5772\dots$ есть постоянная Эйлера, то Беккер для упрощения вычислений заменяет последние два члена выражения (1.13) этой постоянной, принимая для интеграла (1.11) следующее выражение:

$$\int_0^\infty \{1 - \exp[-S(\sigma_0)xt]\} F(x) dx = C + \log KS(\sigma_0)t - \text{Ei} [-KS(\sigma_0)t] \tag{1.14}$$

Легко видеть, что это эквивалентно предположению о том, что

$$\int_0^\infty \{1 - \exp[-S(\sigma_0)xt]\} F(x) dx = a \int_0^K \{1 - \exp[-S(\sigma_0)xt]\} \frac{dx}{x}$$

или, иначе говоря, что выражение функции $F(x)$ дается не равенствами (1.12), а равенствами

$$F(x) = \begin{cases} a/x & 0 < x \leq K \\ 0 & x > K \end{cases} \tag{1.15}$$

Таким образом Беккер в своем исследовании фактически пользуется для $F(x)$ выражением (1.15).

Окончательно решение задачи о нагрузке можно записать в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} [1 + \beta\psi(t)] \tag{1.16}$$

Здесь

$$\beta = a\gamma, \quad \psi(t) = \frac{1}{a} \Psi(t) = C + \log [KS(\sigma_0)t] - \text{Ei} [-KS(\sigma_0)t] \tag{1.17}$$

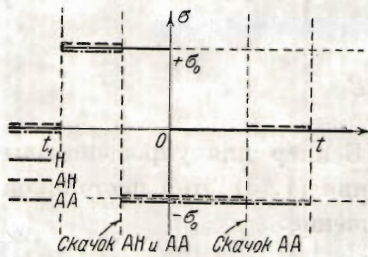
Функция $\text{Ei}(-x)$ весьма быстро убывает с возрастанием x . Анализируя выражение (1.16), Беккер приходит к заключению, что уже через 0.1 секунды после приложения нагрузки (в момент $t=0$) член $\text{Ei} [-KS(\sigma_0)t]$ будет пренебрежимо мал. Таким образом в теории Беккера окончательно можно принять для функции последействия выражение

$$\psi(t) = C + \log [KS(\sigma_0)t] + \log t \tag{1.18}$$

б) Разгрузка. В этом случае задаем силу $P(t)$ следующим образом:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & (t < -t_1) \\ P & (-t_1 \leq t < 0) \\ 0 & (0 \leq t) \end{cases} \quad (1.19)$$

Как и в случае нагрузки, задача сводится к вычислению суммы отклонений от заданного напряжения после прекращения действия силы (для $t > 0$). Чтобы вычислить эту сумму, посмотрим, какие напряжения могут получиться в частицах при $t > 0$. Для этого составим таблицу значений напряжения в частицах разного типа в различные моменты времени (табл. 1 и фиг. 1).



Фиг. 1.

Таблица 1

Тип	Промежуток от $-t_1$ до 0		Промежуток от 0 до t		Напряжение в момент t	Отклонение напряжения в момент t от заданного
	напряжение в начале	скачок	напряжение в начале	скачок		
Н	$+\sigma_0$	-	0	-	0	0
АН	$+\sigma_0$	+	$-\sigma_0$	-	$-\sigma_0$	$+\sigma_0$
АА	$+\sigma_0$	+	$-\sigma_0$	+	0	0

В табл. 1 мы считаем частицу принадлежащей к типу Н (нормальные частицы), если напряжение в ней всегда равно заданному (скачков нет), к типу АН (аномально-нормальные частицы), если в ней имелся один скачок в промежутке $-t_1 < t < 0$ (отмечен знаком + в соответствующем столбце), и к типу АА (аномально-аномальные частицы), если в ней имелось два скачка: в промежутке $-t_1 < t < 0$ и в промежутке после $t = 0$. Чтобы вычислить сумму отклонений, нам надо знать, сколько частиц какого типа мы будем иметь в момент t . Считая, что в начале промежутка $-t_1 < t < 0$ все частицы были нормальные и их было n_0 , получим в начале следующего промежутка n_1 нормальных и n_2 аномальных частиц.

Пусть

$$n_1 = n_0 W_1, \quad n_2 = n_0 W_2$$

где W_1 и W_2 — соответственно вероятности того, что частица будет нормальной или аномальной в начале промежутка $t \geq 0$. Рассуждая так же, как в случае нагрузки, будем иметь

$$\begin{aligned} W_1 &= \{\exp[-S(\sigma_0) \times (t + t_1)]\}_{t=0} = \exp[-S(\sigma_0) \times t_1] \\ W_2 &= 1 - \exp[-S_0(\sigma_0) \times t_1] \end{aligned} \quad (1.20)$$

Очевидно

$$W_1 + W_2 = 1$$

Обозначим теперь вероятность того, что частица будет нормальной в момент $t > 0$, через W_{11} , аномально-нормальной — через W_{21} и аномально-аномальной — через W_{22} . Так как частицы, которые будут нормальными в момент t , могут получиться только из частиц, уже бывших нормальными при $t = 0$, а эти частицы, начиная с $t = 0$, находятся под нулевым напря-

жением, исключаяющим возможность скачков, получим

$$W_{11} = W_1 \tag{1.21}$$

С другой стороны, подобно предыдущему

$$W_{21} = W_2 \exp[-S(-\sigma_0)xt], \quad W_{22} = W_2 \{1 - \exp[-S(-\sigma_0)xt]\}$$

Имея в виду свойство функции Беккера $S(-\sigma) = S(\sigma)$, можем переписать эти равенства в виде

$$W_{21} = W_2 \exp[-S(\sigma_0)xt], \quad W_{22} = W_2 \{1 - \exp[-S(\sigma_0)xt]\} \tag{1.22}$$

Очевидно, как и должно быть,

$$W_{11} + W_{21} + W_{22} = W_1 + W_2 = 1$$

Подставляя в (1.22) и (1.21) значения W_1 и W_2 (1.20) и обозначая через n_{11} , n_{21} , n_{22} число точек типов Н, АН и АА, получим

$$n_{11} = n_0 W_{11} = n_0 \exp[-S(\sigma_0)xt_1]$$

$$n_{21} = n_0 W_{21} = n_0 \{\exp[-S(\sigma_0)xt] - \exp[-S(\sigma_0)x(t+t_1)]\}$$

$$n_{22} = n_0 W_{22} = n_0 \{1 - \exp[-S(\sigma_0)xt_1]\} \{1 - \exp[-S(\sigma_0)xt]\}$$

Беря из табл. 1 значения разностей $\sigma_0 - \sigma_v$ для частиц каждого типа, подставляя $n_0 = F(x)dx$ и интегрируя по x , найдем

$$\sum_{v=1}^N (\sigma_0 - \sigma_v) = \sigma_0 \int_0^{\infty} \{\exp[-S(\sigma_0)xt] - \exp[-S(\sigma_0)x(t+t_1)]\} F(x) dx \tag{1.23}$$

Вводя функцию Беккера $F(x)$ и выражая результат через $\psi(t)$, получим

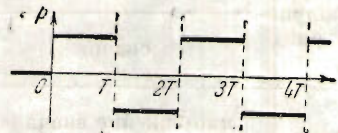
$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \beta [\psi(t+t_1) - \psi(t)] \tag{1.24}$$

Эта формула и дает решение задачи о разгрузке в предположениях теории Беккера.

2. Рассмотрим в рамках теории Беккера задачу о периодической нагрузке особого типа. Пусть сила $P(t)$ будет задана следующим образом (фиг. 2):

$$P(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ +P & 2nT < t < (2n+1)T \\ -P & (2n+1)T < t < (2n+2)T \end{cases} \tag{2.1}$$

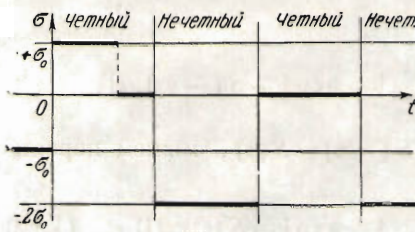
($n=0, 1, 2, \dots$)



Фиг. 2

Условимся интервалы значений t от $2nT$ до $(2n+1)T$ называть *четными*, а от $(2n+1)T$ до $(2n+2)T$ *нечетными*. Константу T будем называть полупериодом колебания. Таким образом четные интервалы начинаются при значении t , равном четному числу полупериодов, нечетные — при нечетном. Полный период $2T$ состоит из двух элементарных интервалов, первый из которых всегда *четный*, а второй *нечетный*; это обстоятельство находится

в связи с тем, что колебания начинаются при $t=0$ с четного интервала. Очевидно, во всех четных интервалах $P(t) = +P$, а в нечетных $P(t) = -P$.



Фиг. 3

Введем, как и раньше, заданное напряжение

$$\sigma(t) = c P(t)$$

и положим

$$\sigma_0 = c P$$

При этих условиях нормальные частицы (напряжение в которых равно заданному) будут в четных интервалах иметь напряжение $+\sigma_0$, а в нечетных — напря-

жение $-\sigma_0$. Посмотрим, что можно сказать об аномальных частицах. Пусть в некоторой частице G_v первый скачок произошел в четном интервале (фиг. 3). Это означает, что к концу интервала эта частица придет с напряжением, равным нулю, и в следующем, нечетном, интервале получит напряжение $-2\sigma_0$. До следующего скачка мы будем для этой точки иметь: в четных интервалах $\sigma_v = 0$, в нечетных $\sigma_v = -2\sigma_0$. Если же первый скачок имел место в нечетном интервале, то будем иметь до следующего скачка: в четных интервалах $\sigma_v = +2\sigma_0$, в нечетных $\sigma_v = 0$. Далее легко сообразить, что если первый скачок был в четном интервале, то следующий может быть только в нечетном, и наоборот. В самом деле, в интервалах той же четности, что и интервал первого скачка, напряжение σ_v равно нулю и новый скачок в них невозможен. Таким образом, если первый скачок был в четном интервале, второй может быть только в нечетном и после него мы будем иметь в соответствии со сказанным выше $\sigma_v = 0$ в нечетных, $\sigma_v = +2\sigma_0$ в четных интервалах.

Резюмируя, можно сказать, что в четных интервалах для напряжения возможны три значения: $\sigma_v = 0, +\sigma_0, +2\sigma_0$; в нечетных будет тоже три:

Таблица 2

Значения напряжений		$\sigma_v = 0$			$\sigma_v = -\sigma_0$				$\sigma_v = -2\sigma_0$	
		11	12	13	21	22	23	24	31	32
Первый полупериод	напряжение в начале	$+2\sigma_0$	$+2\sigma_0$	$+2\sigma_0$	$+\sigma_0$	$+\sigma_0$	$+\sigma_0$	$+\sigma_0$	0	0
	скачок	—	+	+	—	—	+	+	—	—
Второй полупериод	напряжение в начале	0	$-2\sigma_0$	$-2\sigma_0$	$-\sigma_0$	$-\sigma_0$	$-2\sigma_0$	$-2\sigma_0$	$-2\sigma_0$	$-2\sigma_0$
	скачок	—	—	+	—	+	—	+	—	+
Напряжение в конце периода		0	$-2\sigma_0$	0	$-\sigma_0$	0	$-2\sigma_0$	0	$-2\sigma_0$	0
Отклонение напряжения в конце периода от заданного		$+\sigma_0$	$-\sigma_0$	$-\sigma_0$	0	$-\sigma_0$	$+\sigma_0$	$-\sigma_0$	$+\sigma_0$	$-\sigma_0$

$\sigma_y = 0, -\sigma_0, -2\sigma_0$. Никакие другие значения невозможны. При этом значения $\pm \sigma_0$ получаются в нормальных частицах, остальные в аномальных.

Рассмотрим конец какого-либо периода. В соответствии с уже сказанным, период будет заканчиваться нечетным интервалом. Таким образом в конце периода n возможны будут значения напряжения $\sigma_y = 0, -\sigma_0, -2\sigma_0$. Обозначим через $W_n^{(0)}$ вероятность того, что данная частица будет иметь напряжение $\sigma_y = 0$; через $W_n^{(1)}$, что напряжение в ней будет $\sigma_y = -\sigma_0$, и, наконец, через $W_n^{(2)}$, что для нее $\sigma_y = -2\sigma_0$. Чтобы проследить, как изменяются вероятности при переходе к концу следующего периода, составим табл. 2, подобную табл. 1.

Пользуясь табл. 2 подобно тому, как это делалось при исследовании разгрузки, без труда найдем, что вероятность W_{kl} того, что частица будет типа kl , т. е. дойдет без скачка до конца периода, будет:

для случая $\sigma_y = 0$

$$W_{11} = e_2, \quad W_{12} = (1 - e_2)e_2, \quad W_{13} = (1 - e_2)^2 \quad (2.2)$$

для случая $\sigma_y = -\sigma_0$

$$W_{21} = e_1^2, \quad W_{22} = e_1(1 - e_1), \quad W_{23} = (1 - e_1)e_2, \quad W_{24} = (1 - e_1)(1 - e_2) \quad (2.3)$$

для случая $\sigma_y = -2\sigma_0$

$$W_{31} = e_2, \quad W_{32} = 1 - e_2 \quad (2.4)$$

Здесь введено обозначение

$$e_1 = \exp[-S(\sigma_0) \times T], \quad e_2 = \exp[-S(2\sigma_0) \times T] \quad (2.5)$$

Из этой же табл. 2 для $W_n^{(0)}$, $W_n^{(1)}$, $W_n^{(2)}$ и $W_{n+1}^{(0)}$, $W_{n+1}^{(1)}$, $W_{n+1}^{(2)}$ можно получить соотношения

$$W_{n+1}^{(0)} = W_n^{(0)}(W_{11} + W_{13}) + W_n^{(1)}(W_{22} + W_{24}) + W_n^{(2)}W_{32}$$

$$W_{n+1}^{(1)} = W_n^{(1)}W_{21}$$

$$W_{n+1}^{(2)} = W_n^{(0)}W_{12} + W_n^{(1)}W_{23} + W_n^{(2)}W_{31}$$

Подставляя сюда выражения W_{kl} согласно (2.2), (2.3), (2.4), найдем

$$W_{n+1}^{(0)} = W_n^{(0)}[e_2 + (1 - e_2)^2] + W_n^{(1)}[e_1(1 - e_1) + (1 - e_1)(1 - e_2)] + W_n^{(2)}(1 - e_2)$$

$$W_{n+1}^{(1)} = W_n^{(1)}e_1^2 \quad (2.6)$$

$$W_{n+1}^{(2)} = W_n^{(0)}(1 - e_2)e_2 + W_n^{(1)}(1 - e_1)e_2 + W_n^{(2)}e_2$$

Эта система уравнений позволяет последовательно определить $W_n^{(0)}$, $W_n^{(1)}$, $W_n^{(2)}$, если заданы их начальные значения. Но легко видеть, что должно быть

$$W_0^{(0)} = 0, \quad W_0^{(1)} = 1, \quad W_0^{(2)} = 0 \quad (2.7)$$

Действительно, в начале нулевого интервала все частицы должны иметь напряжение $\sigma_y = +\sigma_0$; это возможно только при условиях (2.7). Когда найдены величины $W_n^{(i)}$, легко вычислить сумму отклонений. Очевидно, имеем

в конце n -го периода

$$\sum_{\nu=1}^N [\sigma(t) - \sigma_{\nu}] = -\sigma_0 \int_0^{\infty} (W_n^{(0)} - W_n^{(2)}) F(x) dx \quad (2.8)$$

и в соответствии с формулой (1.4)

$$\varepsilon_{n_2}'' = -\frac{\sigma_0}{E} \left[1 + \gamma \int_0^{\infty} (W_n^{(0)} - W_n^{(2)}) F(x) dx \right] \quad (2.9)$$

Здесь через ε_{n_2}'' обозначено предельное значение $\varepsilon(t)$ в конце второго полупериода n -го периода, при подходе слева

$$\varepsilon_{n_2}'' = \lim_{t=2nT-0} \varepsilon(t)$$

и учтено, что заданное напряжение $\sigma(t)$ в нечетном интервале отрицательно и равно $-\sigma_0$. Условимся для дальнейшего обозначать деформацию в первом полупериоде n -го периода символом ε_{n1} , а во втором — символом ε_{n2} . Кроме того, значение, относящееся к концу полупериода, будем обозначать двумя штрихами, а к началу одним штрихом. Предельные значения всегда будут браться при подходе изнутри интервала.

Формула (2.9) дает значения деформации в конце каждого нечетного интервала. Из нее легко получается значение $\varepsilon_{(n+1)1}'$ в начале следующего четного интервала (первого полупериода $n+1$ -го периода). Очевидно,

$$\varepsilon_{(n+1)1}' = \varepsilon_{n_2}'' + \frac{2\sigma_0}{E} \quad (2.10)$$

Для полного описания процесса деформации нам нужны еще значения $\varepsilon(t)$ в конце четных интервалов и начале нечетных. Обозначим вероятности того, что в данной частице будут иметься в конце первой половины n -го периода значения 0 , $+\sigma_0$, $+2\sigma_0$, соответственно через $V_n^{(0)}$, $V_n^{(1)}$, $V_n^{(2)}$. Из табл. 2 легко видеть, что значение 0 в конце первого полупериода дадут частицы типов 12, 13, 23, 24, 31 и 32. Значение $+\sigma_0$ получится для частиц типа 21 и 22, значение $+2\sigma_0$ — для частиц типа 11. Но тогда

$$\begin{aligned} V_n^{(0)} &= W_n^{(0)}(W_{12} + W_{13}) + W_n^{(1)}(W_{23} + W_{24}) + W_n^{(2)}(W_{31} + W_{32}) \\ V_n^{(1)} &= W_n^{(1)}(W_{21} + W_{22}) \\ V_n^{(2)} &= W_n^{(0)}W_{11} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подставляя значения вероятностей W_{kl} , найдем

$$\begin{aligned} V_n^{(0)} &= W_n^{(0)}(1 - e_2) + W_n^{(1)}(1 - e_1) + W_n^{(2)} \\ V_n^{(1)} &= W_n^{(1)}e_1 \\ V_n^{(2)} &= W_n^{(0)}e_2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Учитывая, что заданное напряжение $\sigma(t)$ в конце первого полупериода будет $+\sigma_0$, найдем отклонения, которые будут соответственно равны $+\sigma_0$, 0 , $-\sigma_0$, и их сумму

$$\sum_{\nu=1}^N [\sigma(t) - \sigma_{\nu}] = \sigma_0 \int_0^{\infty} (V_n^{(0)} - V_n^{(2)}) F(x) dx$$

Таким образом

$$\varepsilon_{n1}'' = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 + \gamma \int_0^{\infty} (V_n^{(0)} - V_n^{(2)}) F(x) dx \right] \quad (2.13)$$

Очевидно,

$$\varepsilon_{n2}' = \varepsilon_{n1}'' - \frac{2\sigma_0}{E} \quad (2.14)$$

Теперь мы имеем все формулы, необходимые для полного представления процесса деформации при колебаниях, и нам нужно лишь найти величины $W_n^{(0)}$, $W_n^{(1)}$ и $W_n^{(2)}$, решив систему (2.6).

3. Система уравнений (2.6) является системой линейных уравнений в конечных разностях первого порядка с постоянными коэффициентами. В соответствии с теорией таких уравнений ее общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} W_n^{(0)} &= C_1 a_{01} \lambda_1^n + C_2 a_{02} \lambda_2^n + C_3 a_{03} \lambda_3^n \\ W_n^{(1)} &= C_1 a_{11} \lambda_1^n + C_2 a_{12} \lambda_2^n + C_3 a_{13} \lambda_3^n \\ W_n^{(2)} &= C_1 a_{21} \lambda_1^n + C_2 a_{22} \lambda_2^n + C_3 a_{23} \lambda_3^n \end{aligned} \quad (3.1)$$

где C_1 , C_2 и C_3 — произвольные постоянные. Чтобы найти частные решения, положим

$$W_n^{(0)} = a_0 \lambda^n, \quad W_n^{(1)} = a_1 \lambda^n, \quad W_n^{(2)} = a_2 \lambda^n$$

Подставляя эти значения в систему (2.6), найдем после сокращения уравнений на λ^n

$$\begin{aligned} [e_2 + (1 - e_2)^2 - \lambda] a_0 + (1 - e_1)(1 + e_1 - e_2) a_1 + (1 - e_2) a_2 &= 0 \\ (e_1^2 - \lambda) a_1 &= 0 \\ (1 - e_2) e_2 a_0 + (1 - e_1) e_2 a_1 + (e_2 - \lambda) a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Чтобы эта система имела нетривиальные решения, ее определитель должен быть равен нулю, что дает для λ уравнение

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} e_2 + (1 - e_2)^2 - \lambda & (1 - e_1)(1 + e_1 - e_2) & 1 - e_2 \\ 0 & e_1^2 - \lambda & 0 \\ (1 - e_2) e_2 & (1 - e_1) e_2 & e_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

Развертывая определитель и решая уравнение, получим

$$\lambda_1 = e_1^2, \quad \lambda_2 = e_2^2, \quad \lambda_3 = 1 \quad (3.4)$$

Чтобы найти теперь величины a_0 , a_1 и a_2 , подставим в систему (3.2) вычисленные значения корней $\Delta(\lambda)$.

1 случай $\lambda_1 = e_1^2$. Левая часть второго уравнения системы тождественно обращается в нуль. Остальные два уравнения дают

$$\begin{aligned} [(1 - e_2)^2 + e_2 - e_1^2] a_0 + (1 - e_1)(1 - e_1 - e_2) a_1 + (1 - e_2) a_2 &= 0 \\ e_2(1 - e_2) a_0 + e_2(1 - e_1) a_1 + (e_2 - e_1^2) a_2 &= 0 \end{aligned}$$

Значения неизвестных будут, как это следует из общей теории линейных уравнений, пропорциональны адьюнктам Δ_0 , Δ_1 , Δ_2 элементов отброшенной второй строки определителя $\Delta(\lambda)$, которые согласно (3.3) будут

$$\Delta_0 = e_1(1 - e_1^2)(e_1 - e_2), \quad \Delta_1 = -(1 - e_1^2)(e_1^2 - e_2^2), \quad \Delta_2 = e_2(1 - e_1^2)(e_1 - e_2)$$

Таким образом в этом случае имеем

$$a_{01} : a_{11} : a_{21} = \Delta_0 : \Delta_1 : \Delta_2 = e_1 : -(e_1 + e_2) : e_2$$

2 случай $\lambda_2 = e_2^2$. Второе уравнение системы (3.2) будет

$$(e_1^2 - e_2^2) a_1 = 0 \quad \text{или} \quad a_1 = 0$$

Первое и третье уравнения системы принимают вид $a_0 + a_2 = 0$. Таким образом в этом случае

$$a_{02} : a_{12} : a_{22} = 1 : 0 : -1$$

3 случай $\lambda_3 = 1$. В этом случае второе уравнение (3.2) принимает вид

$$(e_1^2 - 1) a_1 = 0 \quad \text{или} \quad a_1 = 0$$

Первое и третье уравнения дают $a_0 e_2 - a_2 = 0$. Таким образом

$$a_{03} : a_{13} : a_{23} = 1 : 0 : e_2$$

Общее решение системы (3.2) получится из формул (3.1), если подставить в них найденные значения λ_1 , λ_2 , λ_3 и коэффициентов a_{ij} . Будем иметь

$$\begin{aligned} W_n^{(0)} &= C_1 + C_2 e_1^{2n+1} + C_3 e_2^{2n} \\ W_n^{(1)} &= -C_2 (e_1 + e_2) e_1^{2n} \\ W_n^{(2)} &= C_1 e_2 + C_2 e_2 e_1^{2n} - C_3 e_2^{2n} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для определения произвольных постоянных, полагая в этих равенствах $n=0$ и принимая во внимание (2.7), получим систему уравнений, из которой находим

$$C_1 = \frac{1}{1+e_2}, \quad C_2 = -\frac{1}{e_1+e_2}, \quad C_3 = -\frac{e_2(1-e_1)}{(1+e_2)(e_1+e_2)}$$

Таким образом, окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} W_n^{(0)} &= \frac{1}{1+e_2} - \frac{e_1^{2n+1}}{e_1+e_2} - \frac{(1-e_1)e_2^{2n+1}}{(1+e_2)(e_1+e_2)} \\ W_n^{(1)} &= e_1^{2n} \\ W_n^{(2)} &= \frac{e_2}{1+e_2} - \frac{e_2 e_1^{2n}}{e_1+e_2} + \frac{(1-e_1)e_2^{2n+1}}{(1+e_2)(e_1+e_2)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Эти формулы дают решение нашей системы уравнений (2.6) и позволяют найти все величины, нужные для полного решения задачи о колебаниях.

4. Для дальнейшего изучения свойств колебаний рассмотрим те предельные значения вероятностей, которые получаются при $n \rightarrow \infty$. Так как величины e_1 и e_2 меньше единицы, будем иметь

$$W^{(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n^{(0)} = \frac{1}{1+e_2}, \quad W^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n^{(1)} = 0, \quad W^{(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n^{(2)} = \frac{e_2}{1+e_2} \quad (4.1)$$

Используя эти значения, мы легко получим предельные значения деформаций в конце первого полупериода ε_1'' и в конце второго полупериода ε_2'' . Из формулы (2.9), очевидно, найдем

$$\varepsilon_2'' = -\frac{\sigma_0}{E} \left[1 + \gamma \int_0^{\infty} (W^{(0)} - W^{(2)}) F(x) dx \right] = -\frac{\sigma_0}{E} \left[1 + \gamma \int_0^{\infty} \frac{1-e_2}{1-e_2} F(x) dx \right] \quad (4.2)$$

Формула (2.13) дает при использовании равенств (2.12)

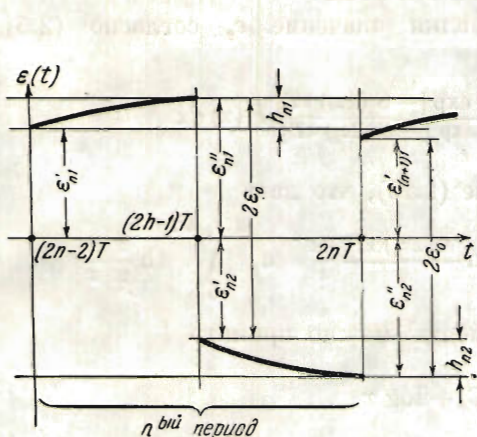
$$\epsilon_{n1}'' = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 + \gamma \int_0^\infty [W_n^{(0)}(1 - 2e_2) + W_n^{(1)}(1 - e_1) + W_n^{(2)}] F(x) dx \right] \quad (4.3)$$

Отсюда находим

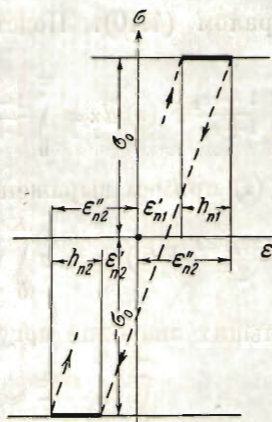
$$\epsilon_{11}'' = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 + \gamma \int_0^\infty [W^{(0)}(1 - 2e_2) + W^{(2)}] F(x) dx \right] = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 + \gamma \int_0^\infty \frac{1 - e_2}{1 + e_2} F(x) dx \right] \quad (4.4)$$

Формулы (4.2) и (4.4) показывают, что с течением времени колебания деформаций стремятся стать симметричными, как это и должно быть.

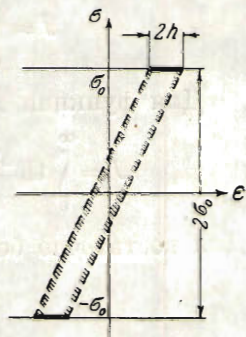
На фиг. 4 изображены деформации в зависимости от времени в течение n -го периода. Деформация ϵ'_{n1} , имевшая место в начале n -го периода, достигает в конце первого полупериода значения ϵ''_{n1} , определяемого формулой



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

(2.13). При постоянном заданном напряжении σ_0 деформация, следовательно, возросла на величину

$$h_{n1} = \epsilon''_{n1} - \epsilon'_{n1} \quad (4.5)$$

Дальше происходит скачок напряжения с величины $+\sigma_0$ на величину $-\sigma_0$ и связанный с ним скачок деформации; в начале второго полупериода деформация будет

$$\epsilon'_{n2} = \epsilon''_{n1} - 2\epsilon_0$$

где $\epsilon_0 = \sigma_0 / E$. Затем деформация опять растет по абсолютной величине при заданном напряжении, увеличиваясь в конце периода на величину

$$h_{n2} = \epsilon''_{n2} - \epsilon'_{n2} = \epsilon''_{n2} - \epsilon''_{n1} + 2\epsilon_0 \quad (4.6)$$

Величина h_{n2} , определяемая формулой (4.6) на диаграмме $\sigma = \sigma(\epsilon)$, соответствует ширине петли гистерезиса (фиг. 5). Для h_{n1} можно получить аналогичную формулу, учитывая, что согласно (2.10)

$$\epsilon'_{n1} = \epsilon''_{(n-1)2} + 2\epsilon_0$$

и подставляя это выражение в (4.5). Таким образом

$$h_{n1} = \epsilon''_{n1} - \epsilon''_{(n-1)2} - 2\epsilon_0 \quad (4.7)$$

В пределе при $n \rightarrow \infty$, как уже было сказано, колебания становятся симметричными и $\varepsilon_2'' = -\varepsilon_1''$. Формула (4.6) дает

$$h_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{n_2} = -2 \frac{\sigma_0}{E} \left[1 + \gamma \int_0^{\infty} \frac{1 - e_2}{1 + e_2} F(x) dx \right] + 2\varepsilon_0 = -2\varepsilon_0 \gamma \int_0^{\infty} \frac{1 - e_2}{1 + e_2} F(x) dx$$

Совершенно аналогично из (4.7) получим (4.8)

$$h_1 = 2\varepsilon_0 \gamma \int_0^{\infty} \frac{1 - e_2}{1 + e_2} F(x) dx = -h_2 \quad (4.9)$$

Предельная (стационарная) «петля» гистерезиса для рассматриваемых колебаний дана на фиг. 6, где

$$h = \varepsilon_0 \gamma \int_0^{\infty} \frac{1 - e_2}{1 + e_2} F(x) dx \quad (4.10)$$

Займемся интегралом (4.10). Подставляя значение e_2 согласно (2.5), получим

$$J = \int_0^{\infty} \frac{1 - e_2}{1 + e_2} F(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1 - \exp[-S(2\sigma_0)xT]}{1 + \exp[-S(2\sigma_0)xT]} F(x) dx$$

Для функции $F(x)$ примем выражение (1.15), что дает

$$J = \int_0^{\infty} \operatorname{th} \frac{S(2\sigma_0)xT}{2} F(x) dx \approx a \int_0^K \operatorname{th} \frac{S(2\sigma_0)xT}{2} \frac{dx}{x} = a \int_0^{S(2\sigma_0)KT} \operatorname{th} \frac{z}{2} \frac{dz}{z}$$

Для достаточно больших значений аргумента¹ можно принять

$$\int_0^x \operatorname{th} \frac{z}{2} \frac{dz}{z} \approx C_0 + \log x$$

где C_0 — некоторая константа, меньшая константы Эйлера $C = 0.5772 \dots$. Точность этой приближенной формулы примерно та же, что и приближенной формулы (1.18) для функции последействия Беккера. Таким образом в пределах точности формул Беккера можно положить

$$h = \varepsilon_0 \gamma a \{C_0 + \log [S(2\sigma_0)KT]\}$$

Площадь F петли гистерезиса будет равна

$$F = 4\sigma_0 h = 4E\varepsilon_0^2 a \gamma \{C_0 + \log [S(2E\varepsilon_0)KT]\} = A_0 \varepsilon_0^2 + A_1 \varepsilon_0^2 \log (2E\varepsilon_0) \quad (4.11)$$

где

$$A_0 = 4Ea\gamma (C_0 + \log K + \log T), \quad A_1 = 4Ea\gamma$$

Из формулы (4.11) следует, что площадь петли гистерезиса растет *быстрее, чем квадрат амплитуды*, так как функция $S(\sigma)$ возрастающая. Знание площади петли гистерезиса, как известно, дает возможность вычислить приближенно логарифмический декремент λ затухания свободных колебаний при наличии гистерезиса. Можно написать

$$\lambda \approx \frac{F}{E\varepsilon_n^2} \quad (4.12)$$

¹ Для приложений технического характера уже при $x=8$ гиперболический тангенс не будет отличаться от 1 на сколько-нибудь заметную величину.

Для нашего случая площадь F выражается формулой (4.12) и потому

$$\lambda = \Delta_0 + \Delta_1 \log S(2E\varepsilon_0) \quad (\Delta_0 = 4a\gamma(C_0 + \log K + \log T), \Delta_1 = 4a\gamma) \quad (4.13)$$

Если мы хотим получить согласие с экспериментами Сезава и Кубо^[4], функция (4.13) должна быть линейной относительно ε_0 ; это будет иметь место, если положить, что для достаточно больших значений σ

$$S(\sigma) \approx e^\sigma \quad (4.14)$$

При такой гипотезе о виде функции Беккера она обладает не всеми нужными свойствами. Однако легко указать и такой ее вид, который при том же росте удовлетворит всем требованиям: достаточно положить

$$S(\sigma) = 2(\operatorname{ch} \sigma - 1) \quad (4.15)$$

чтобы, сохраняя для достаточно больших σ соотношение (4.14), получить функцию, обладающую уже всеми нужными свойствами. Подставляя (4.14) в формулу (4.13), получим

$$\lambda = \Delta_0 + 2E\Delta_1\varepsilon_0 \quad (4.16)$$

В этих предположениях формулу (4.11) можно представить в виде

$$F = b_1\varepsilon_0^2 + b_2\varepsilon_0^3 \quad (4.17)$$

где

$$b_1 = 4Ea\gamma(C_0 + \log K + \log T), \quad b_2 = 8E^2\alpha\gamma$$

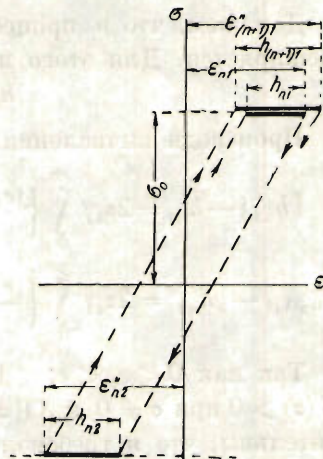
Отметим еще одно обстоятельство. Свободный член формулы (4.13) имеет вид $\Delta = a + b \log T$ и дает зависимость декремента от периода колебаний. Очевидно, что с увеличением частоты колебаний (что эквивалентно уменьшению периода) этот член уменьшается. В ряде экспериментов Сезава и Кубо величина декремента определялась для случая крутильных колебаний натянутой проволоки, причем прямые, представлявшие зависимость декремента от амплитуды, отсекали на оси ординат меньшие отрезки в случае больших натяжений. Если учесть, что при больших натяжениях частота колебаний увеличивается, то и в этом пункте эксперимент качественно согласуется с теорией.

Заметим, наконец, что возможны и другие гипотезы о виде функции Беккера $S(\sigma)$. Так, например, полагая $S(\sigma) = \exp \sigma^2 - 1$, мы получим для площади петли гистерезиса закон

$$F = b_1\varepsilon_0^2 + b_2\varepsilon_0^4$$

соответствующий экспериментальным результатам Берлинера^[7], Голкинсона и Вильямса^[8] и др. В этом случае для логарифмического декремента получится квадратичная зависимость от амплитуды, что в ряде случаев дает лучшее совпадение с экспериментом, чем линейная формула (4.13).

В заключение рассмотрим процесс образования стационарной «петли» гистерезиса при рассмотренных колебаниях. Для этого вычислим величины h_{n1} и h_{n2} . Из формул (2.9), (4.3), (4.6), (4.7) и (3.6) получаем



Фиг. 7

$$h_{n1} = +2\varepsilon_0\gamma \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1-e_2}{1+e_2} - \frac{(e_1-e_2)(1+e_1^2)}{2(e_1+e_2)} e_1^{2n-2} - \frac{(1-e_1)(1-e_2^2)}{(1+e_2)(e_1+e_2)} e_2^{2n-1} \right\} F(x) dx$$

$$h_{n2} = -2\varepsilon_0\gamma \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1-e_2}{1+e_2} - \frac{(e_1-e_2)(1+e_1)}{2(e_1+e_2)} e_1^{2n} - \frac{(1-e_1)(1-e_2)}{(1+e_2)(e_1+e_2)} e_2^{2n+1} \right\} F(x) dx$$

Докажем, что в процессе образования петли гистерезиса она все время расширяется. Для этого нам достаточно будет показать (фиг. 7), что

$$h_{n1} < |h_{n2}|, |h_{n2}| < h_{(n+1)1}$$

Производя вычисления, получим

$$|h_{n2}| - h_{n1} = 2\varepsilon_0\gamma \int_0^{\infty} \left\{ \frac{(e_1-e_2)(1-e_1^2)}{2(e_1+e_2)} e_1^{2n-2} + \frac{(1-e_1)(1-e_2^2)}{(1+e_2)(e_1+e_2)} e_2^{2n-1} \right\} F(x) dx$$

$$h_{(n+1)1} - |h_{n2}| = 2\varepsilon_0\gamma \int_0^{\infty} \left\{ \frac{(e_1-e_2)(1-e_1^2)}{2(e_1+e_2)} e_1^{2n+1} + \frac{(1-e_1)(1-e_2^2)}{(1+e_2)(e_1+e_2)} e_2^{2n+1} \right\} F(x) dx$$

Так как $0 < e_2 < e_1 < 1$, в силу формул (2.5) и свойств функции Беккера [$S(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$ и $S(|\sigma_2|) > S(|\sigma_1|)$ при $|\sigma_2| > |\sigma_1|$], то оба интеграла положительны, что и требовалось доказать.

Поступила в редакцию

7 II 1946

D. J. PANOV.—APPLICATION OF THE R. BECKER THEORY OF ELASTIC AFTER EFFECT TO THE INVESTIGATION OF HYSTERESES IN OSCILLATIONS

The Becker theory of elastic after-effect based on modern conception of plastic deformations affords one of the most complete descriptions of experimental data. However the theory could not be applied to the investigation of oscillations. The present paper overcomes certain of the difficulties by considering oscillations in which stresses remain constant throughout the half period, taking equal positive and negative values alternatively. In this case the problem is reduced to three simultaneous linear equations in the finite differences. The solution may be obtained in closed form.

This solution makes it possible to calculate the area of the hysteresis curve and thereby logarithmic decrements. Logarithmic decrements increase with the increase in amplitudes according to the linear law (assuming that the function introduced by Becker increases as an exponential function). These results agree with those of the careful experiments of Sezawa and Kubo.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bennewitz K. Physikalsche Zeitschrift. Bd. 25.
2. Seitz. F. Physics of metals. New York. 1943.
3. Boltzmann. Ges. Abh. I, Nr. 30; II, Nr. 43.
4. Sezawa K. and Kubo K. Report of the Aeronautical Research Institute. Tokyo Imperial Institute. 1932. No 86.
5. Becker R. Zeitschrift für Physik. 1925. Bd. 33. Pp. 185 — 213.
6. Wartenberg. Verh. d. Deutsch. Phys. Gesellschaft. 1918. Bd. 20. P. 113 ff.
7. Berliner S. Wiedemann Ann. 1906. Bd. 20. P. 527 ff.
8. Hopkinson and Williams. Proc. Royal Soc. London. 1917. Ser. A. Vol. 87. (P. 502 ff).