Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946.

О КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

М. Я. Леонов

(Москва)

Малые колебания систем одной степени свободы около заданного движения или при наличии нестационарных связей описываются во многих случаях уравнениями вида

$$G(t)\ddot{z}+(\dot{G}+\mu)\dot{z}+D(t)z=F(t) \tag{1}$$

Здесь G обозначает приведенную массу системы, которая определяется как коэффициент перед $\dot{z}^2/2$ в выражении для кинетической энергии движения системы. При данном определении функции G функция μ является коэффициентом трения. Функции D и F будем называть приведенной жесткостью и вынуждающей силой.

В дальнейшем будут рассматриваться системы с положительной жесткостью. Для таких систем дифференциальное уравнение (1) может представиться в виде

$$\ddot{z}+2\psi(t)\dot{z}+e^{4p(t)}z=Q(t) \tag{2}$$

причем

$$\psi=\frac{\dot{G}+\mu}{2G}, \qquad p=\frac{1}{4}\log\frac{D}{G}, \qquad Q=\frac{F}{G} \tag{3}$$

Все функции, входящие в последние соотношения, будут считаться конечными. Интеграл уравнения (2) представим в виде

$$z=cf(t,\tau)\sin\varphi(t,\tau)+\int\limits_{-\infty}^{t}f(t,\tau)\sin\varphi(t,\tau)Q(\tau)\,d\tau \tag{4}$$

причем c, τ — параметры, не зависящие от t, функция φ определяется уравнением

$$\varphi(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}e^{2p}\,dt+\int\limits_{\tau}^{t}\sin 2\varphi(t,\tau)(\psi\,dt+dp) \tag{5}$$

а функция f находится по формуле

$$f(t,\tau)=e^{-p(t)-J(t,\tau)-p(\tau)}, \qquad J(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}[\psi\,dt+\cos 2\varphi(t,\tau)(\psi\,dt+dp)] \tag{6}$$

Введение неограниченного нижнего предела и определение условий сходимости интеграла в формуле (4) связаны с исследованием устойчивости движения. Вместо указанного нижнего предела можно, а иногда и необходимо ставить конечную величину, не зависящую от t.

Пользуясь формулами (6) и (5), можно получить

$$\frac{d}{dt}(f \sin\varphi) = e^{2p} f \cos\varphi\,, \qquad \frac{d^2}{dt^2} f \sin\varphi = -e^{4p} f \sin\varphi - 2\psi e^{2p} f \cos\varphi \tag{7}$$

Отсюда легко установить, что общее решение уравнения (2) действительно можно представить формулой (4). Формулами (4) — (6) решается вопрос об интеграле уравнения (2) для случая

$$\psi\, dt + dp = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \log GD = -\frac{2\mu}{G}$$

Ниже показано значение этих формул для более широкого класса задач.

Свободные колебания системы представим в виде

$$y(t\,,\,\tau) = cf(t\,,\,\tau) \sin\varphi(t\,,\,\tau) \tag{8}$$

и, пользуясь (7), найдем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{\dot{y}} e^{2p} \tag{9}$$

В случае гармонических незатухающих колебаний ($p = \text{const}$, $\psi = 0$) функция φ, определяемая из соотношения (9), называется фазовой. Это название мы сохраним и для квазигармонических колебаний. Нетрудно также заметить, что максимальные значения $|y|$ достигаются при

$$\varphi(t_m\,,\,\tau) = \frac{\pi}{2} + m\pi \qquad (m = 0\,,\,\pm 1\,,\,\pm 2\,,\,\ldots) \tag{10}$$

причем

$$|y|_{\max} = cf(t_m\,,\,\tau)$$

Таким образом функция f характеризует изменение амплитуд свободных колебаний. В силу этого мы будем называть ее функцией затухания.

Логарифм отношения предыдущей амплитуды к последующей найдется из формулы

$$\eta_m = \log \frac{f(t_{m-1}\,,\,\tau)}{f(t_m\,,\,\tau)} = \int\limits_{t_{m-1}}^{t_m} \cos^2\varphi \left[\frac{\mu}{G} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\log GD\right] dt \tag{11}$$

Из этой формулы видно, что затухание колебаний в системе всегда будет иметь место ($\eta > 0$), если

$$\frac{d}{dt}\log GD > -2\frac{\mu}{G} \tag{12}$$

Однако могут быть и такие системы, у которых условия (12) не удовлетворяются на некотором отрезке времени. Если этот отрезок времени перекрывает область $t_m \leqslant t \leqslant t_{m+1}$, то свободные колебания за данный отрезок времени не будут затухающими.

Дифференциальный критерий (12) затухания колебаний удобен только в случае незначительного изменения производной от произведения приведенной массы на жесткость за промежуток времени $t_m \leqslant t \leqslant t_{m+1}$. Ниже приводятся другие критерии затухания. Введя безразмерную функцию

$$\lambda(t) = \frac{\sqrt{G(t)\,D(t)}}{\mu(t)} \tag{13}$$

получим логарифмический декремент затухания в виде

$$\eta_m = \int\limits_{m\pi - 1/2\pi}^{m\pi + 1/2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{2\lambda + \sin 2\varphi} \left(2\,d\varphi + \lambda\, d \log GD\right) \tag{14}$$

причем принято согласно уравнению (5), что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{D}{G}} \left(1 + \frac{\sin 2\varphi}{2\lambda}\right) + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \frac{d}{dt} \log\, GD \tag{15}$$

В частном случае, полагая $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$, $GD = \text{const}$, получим из (14) формулу для декремента затухания

$$\eta_m = \eta_0 = \frac{\pi}{\sqrt{4\lambda_0^2 - 1}} \qquad \left(\lambda_0 > \frac{1}{2}\right) \tag{16}$$

которая, совпадая с известной формулой для случая гармонических колебаний, применима и к более общему случаю колебаний. Наибольший интерес имеют системы с положительным декрементом, для которых

$$\eta \geqslant \varepsilon, \qquad \varepsilon = \text{const} > 0 \tag{17}$$

при любом τ. В зависимости от характера колеблющейся системы и действующих на нее сил для η следовало бы установить минимальные значения.

Системы, у которых выполняется условие (17), являются динамически устойчивыми. Для случая $\lambda = \lambda_0$ получим из формулы (14) достаточное условие устойчивости

$$-\int\limits_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{\lambda_0 \cos^2\varphi}{2\lambda_0 + \sin 2\varphi} \left(\frac{\dot G}{G} + \frac{\dot D}{D}\right) dt \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{4\lambda_0^2 - 1}} - \varepsilon \tag{18}$$

Имея в виду, что

$$\max \frac{\lambda_0 \cos^2\varphi}{2\lambda_0 + \sin 2\varphi} = \frac{2\lambda_0^2}{4\lambda_0^2 - 1} \qquad \text{при } \varphi = -\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2\lambda_0}$$

и требуя только, чтобы ε была больше нуля, а λ_0 — конечной, получим достаточное условие устойчивости в виде

$$\frac{(GD)_{\max}}{(GD)_{\min}} \leqslant e^k, \qquad k = \frac{\pi}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{1}{4\lambda_0^2}} \tag{19}$$

Если это условие не удовлетворяется, то в системе возможно возникновение незатухающих колебаний. Для решения этого вопроса необходимо прежде всего исследование решения уравнения (5), а затем интегралов в формулах (18) или (6). В настоящей заметке ограничимся приближенным решением уравнения (5) для случая, когда последний интеграл в несколько раз меньше первого интеграла правой части этого уравнения. Обозначим

$$\int\limits_{\tau}^{t} e^{2p}\, dt = \gamma(t, \tau), \qquad \int\limits_{\tau}^{t} \sin 2\varphi(t, \tau) (\psi\, dt + dp) = \alpha(t, \tau) \tag{20}$$

При этих обозначениях из уравнения (5) можно найти, что

$$d\alpha = (\cos 2\gamma \sin 2\alpha + \sin 2\gamma \cos 2\alpha)(\psi\, dt + dp) \tag{21}$$

Начальным значением функции φ, необходимым для ее определения из этого уравнения, будет $\alpha(\tau, \tau) = 0$.

При малых α уравнение (20) приводится к линейному, если в разложении правой части сохранить только линейные члены относительно α. Однако уравнение (21) можно проинтегрировать, не пренебрегая малыми второго порядка относительно α. Для этого можем представить

$$\cos 2\alpha = \cos^2 n\alpha + (n-2)\alpha^2 + o_3, \qquad \sin 2\alpha = \frac{1}{n}\sin 2n\alpha + o_3 \tag{22}$$

причем через o_3 обозначены малые величины не ниже третьего порядка малости. Подставляя (22) в (21), получим

$$d\alpha = \left(\cos 2\gamma \frac{1}{n}\sin 2n\alpha + \sin 2\gamma \cos^2 n\alpha + d\right)(\psi\, dt + dp) \tag{23}$$

где

$$d = \Delta \sin 2(\gamma + \delta) \tag{24}$$

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\sin 2n\alpha - \sin 2\alpha\right)^2 + (\cos^2 n\alpha - \cos 2\alpha)^2}, \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{n\sin 2\alpha - \sin 2n\alpha}{n(\cos 2\alpha - \cos^2 n\alpha)}$$

При $n = \sqrt{2}$ величина Δ будет малой третьего порядка малости относительно α, как это следует из формулы (22). Приводим некоторые значения Δ в зависимости от α:

α	5°	10°	20°	30°
Δ	0.001	0.007	0.051	0.160

При конечных α величина Δ уменьшается при $n < \sqrt{2}$. Ввиду этого в дальнейшем примем $n = 1.4$.

Пренебрегая в (23) малой величиной $d \leqslant \Delta$, можно (при $n = 1.4$) найти

$$\alpha(t, \tau) \approx \frac{1}{1.4}\operatorname{arc\,tg}\left[1.4\,\Phi \int_\tau^t \frac{\sin 2\gamma(t, \tau)}{\Phi}(\psi\, dt + dp)\right] \tag{25}$$

причем

$$\Phi = \exp\left[2\int \cos 2\gamma(\psi\, dt + dp)\right]$$

Для сопоставления формулы (25) с точным интегралом рассмотрим случай мгновенного изменения коэффициентов G и D от значений G_1 и D_1 до значений G_2 и D_2. Точное решение уравнения (21) для этого случая можно представить в виде

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{G_2 D_2}{G_1 D_1}}\operatorname{tg}\gamma - \gamma \tag{26}$$

причем предположено для определенности, что $\alpha = 0$ при $G = G_1$, $D = D_1$.

Формула (25) дает

$$\alpha \approx \tilde{\alpha} = \frac{1}{1.4}\operatorname{arc\,tg}\left\{0.7\left[\left(\frac{G_2 D_2}{G_1 D_1}\right)^{1/2\cos 2\gamma} - 1\right]\operatorname{tg} 2\gamma\right\} \tag{27}$$

Приводим значения α и $\alpha - \tilde{\alpha}$, вычисленные по формулам (26) и (27), для отношения $G_2 D_2 / G_1 D_1 = 10$:

γ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
α	19°09′	29°01′	31°17′	29°21′	25°08′	19°39′	13°25′	6°49′
$\alpha - \tilde{\alpha}$	+17′	+38′	+20′	−09′	−23′	−28′	−09′	−06′

Из приведенных данных видно, что погрешность $\alpha - \tilde{\alpha}$ формулы (25) при указанном довольно значительном изменении коэффициентов G и D достаточно мала. Эта погрешность уменьшается в десятки раз при уменьшении отношения $G_2 D_2 / G_1 D_1$ в 3—2 раза. В действительности обычно коэффициенты G и D изменяются весьма незначительно.

Используя полученные результаты, можно притти к заключению, что если разбить область изменения t на такие области g_i, в которых

$$\frac{(GD)_{\max}}{(GD)_{\min}} = N \leqslant 10 \tag{28}$$

то в каждой области g_i можно применить формулы, аналогичные формуле (25). В дальнейшем будем считать, что области g_i перекрывают области между смежными нулями и максимумами функции $|y|$. При этом погрешности в определении φ будут иметь величину такого же порядка малости, как и погрешности от обычной неточности наших знаний сил трения.

Определим момент времени t_0 из уравнения

$$\gamma(t_0, \tau) + \alpha(t_0, \tau) = \frac{\pi}{2} \tag{29}$$

Затем мы можем положить

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \gamma(t, t_0) + \alpha_y(t, t_0) \tag{30}$$

и, пользуясь допущениями, принятыми при выводе формулы (25), получим

$$\alpha_y(t, t_0) \approx -\frac{1}{1.4} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{1.4}{\Phi_y}\int\limits_{t_0}^{t} \Phi_y \sin\left[2\gamma(t, t_0)\right](\psi\, dt + dp)\right] \tag{31}$$

где

$$\Phi_y = \exp\left[2\int \cos 2\gamma(t, t_0)(\psi\, dt + dp)\right]$$

Положив в формуле (29) $\varphi = \pi$ и определив соответствующее значение $t = t_1^0$, можем представить

$$\varphi = \pi + \gamma(t, t_1^\circ) + \alpha(t, t_1^\circ) \tag{32}$$

причем $\alpha(t, t_1^\circ)$ определено формулой (25) при соответствующей замене τ через t_1°. Затем можно найти t_1 из уравнения

$$\varphi(t_1, \tau) = \frac{3}{2}\pi \tag{33}$$

и положить

$$\varphi = \frac{3}{2}\pi + \gamma(t, t_1) + \alpha_y(t, t_1) \tag{34}$$

и вообще

$$\begin{aligned} \varphi(t, \tau) &= \frac{\pi}{2} + m\pi + \gamma(t, t_m) + \alpha_y(t, t_m) \qquad (t_m \leqslant t \leqslant t_{m+1}^\circ) \\ \varphi(t, \tau) &= (m+1)\pi + \gamma(t, t_{m+1}^\circ) + \alpha(t, t_{m+1}^\circ) \qquad (t_{m+1}^\circ \leqslant t \leqslant t_{m+1}) \end{aligned} \tag{35}$$

Формулы (35) позволяют считать α и α_y достаточно малыми, чтобы применение формул (25) и (31) было законным, если выполняется условие (28).

Напомним, что здесь t_m обозначает момент времени, удовлетворяющий уравнению (10), а t_m° определяется из уравнения

$$\varphi(t_m^\circ, \tau) = m\pi \tag{36}$$

Отметим, что уравнения (10) и (36) решаются однозначно относительно t_m и t_m°, поскольку φ является функцией, растущей в окрестности этих значений при $p > -\infty$. Вторую формулу (35) можно представить в виде

$$\varphi(t, \tau) = m\pi + \varphi(t, t_m^\circ) \tag{37}$$

Поскольку $\varphi(\tau, \tau) = 0$, то

$$\varphi(\tau, t_m^\circ) = -m\pi \tag{38}$$

Таким образом t_m° определяют распределение нулей функции y [см. формулу (8)] как по переменной t, так и по переменной τ. Знание нулей свободных колебаний оказывается полезным при определении резонанса как случая, когда подинтегральная функция в формуле (4) может быть знакопостоянной при любом τ, лишь бы $t = t_m^\circ$.

Собственную частоту колебаний можно определять либо формулой

$$\nu_1(t_m^\circ) = \frac{1}{2(t_m^\circ - t_{m-1}^\circ)} \tag{39}$$

такое определение распространено при анализе свободных колебаний аналитическими методами, либо формулой

$$\nu_2(t_m) = \frac{1}{2(t_m - t_{m-1})} \tag{40}$$

которая удобнее при обработке виброграмм, поскольку на них положение максимумов $|y|$ определить легче, чем нулей.

Не вдаваясь в обсуждение преимуществ того или иного определения собственной частоты, заметим, что между ними есть принципиальное различие, поскольку представление первой формулы (35) в виде

$$\varphi(t, \tau) = \frac{\pi}{2} + m\pi + \varphi(t, t_m) - \Delta_\alpha \tag{41}$$

где

$$\Delta_\alpha = \alpha(t, t_m) - \alpha_y(t, t_m) \tag{42}$$

принципиально отличается от формулы (37). Функция

$$\Delta_\nu = \nu_2(t) - \nu_1(t) \tag{43}$$

характеризует, в какой степени частота свободных колебаний зависит от начальной фазы. Нетрудно заметить, что при $2\lambda > 1$ частоты отличны от нуля, т. е.

$$\nu_{1,2} \geqslant \nu_{\min} > 0 \qquad \text{при} \quad \lambda > \frac{1}{2} \tag{44}$$

Пользуясь этим свойством, можно установить, что

$$\lim f(t, \tau) \exp[2\varepsilon\nu_{\min}(t-\tau)] \leqslant \exp[-2p(\tau)] \qquad \text{при} \quad t - \tau \to \infty$$

т. е. при затухающих колебаниях ($\eta \geqslant \varepsilon > 0$) функция f убывает на бесконечности настолько быстро, что интеграл в формуле (4) будет абсолютно сходящимся при $|Q| < \infty$. В таких системах невозможны неограниченно растущие перемещения от сил конечной величины. Этим необходимым в технике свойством не обладают системы, устойчивые по Ляпунову.

Поступила в редакцию
2 IV 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

M. J. LEONOV.— ON QUASI-HARMONIC OSCILLATIONS

A procedure is presented for the solution of a linear differential equation of the second order, containing variable coefficients. The coefficients are assumed to vary within a limited range. Problems are outlined for the determination of the degree of damping of free quasi-harmonic oscillations; and criteria of dynamic stability are established.