Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

И. М. Волк

(Свердловск)

§ 1. Введение. Допустим, что дифференциальные уравнения движения какой-либо системы имеют вид

$$\frac{dx_\nu}{dt} = X_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где правые части зависят от некоторого параметра μ и переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, причем относительно последней они являются периодическими функциями с каким-либо не зависящим от μ периодом T.

Будем предполагать, что при любых вещественных значениях t величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ являются аналитическими функциями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и мероморфными функциями параметра μ в некоторой области $G\,(a_i \leqslant x_i \leqslant b_i)$ и $|\mu| \leqslant \rho$. При этом условимся:

a) говоря о каком-либо отрезке изменения параметра, всякий раз полагать, что значение $\mu = 0$ обязательно является одной из точек этого отрезка;

b) под решением системы (1.1) при $\mu = 0$ подразумевать предел при $\mu \to 0$ какого-либо решения этой системы для $\mu \neq 0$;

c) под выражением «упрощенная система» подразумевать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^\circ_\nu}{dt} = \mu^{k_\nu} X^*_\nu(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

где $\mu^{k_\nu} X^*_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ — член низшего относительно μ порядка в разложении функции X_ν в ряд по целым степеням μ.

Можно поставить следующую задачу. Допустим, что упрощенная система допускает периодическое, периода T, решение

$$x_\nu^\circ = x_\nu^\circ(\mu, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

которое при всех вещественных значениях t и $|\mu| \leqslant \rho$ остается внутри области G; требуется установить, при каких условиях система (1.1), независимо от вида отброшенных по сравнению с упрощенной системой членов, допускает периодическое решение для любых значений параметра в некотором отрезке, обращающееся в $x_\nu^\circ(0, t)$ при $\mu = 0$, и, если оно существует, указать способ построения этого решения в виде некоторых рядов.

При $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ правые части системы (1.1) являются аналитическими функциями параметра, а упрощенная система представится системой (1.1) при $\mu = 0$. Следовательно, в этом случае поставленная задача сводится к следующей. Допустим, что система (1.1), правые части которой аналитически зависят от μ, при $\mu = 0$ допускает периодическое, периода T, решение $x_\nu^\circ = x_\nu^\circ(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, остающееся для всех вещественных значений t внутри области G; требуется найти условия, при которых система (1.1) допускает периодическое решение и при любых численно достаточно малых значениях параметра, обращающееся в $x_\nu^\circ(t)$ при $\mu = 0$. Эта частная задача представляет известную задачу Пуанкаре.

§ 2. Определяющая система, нормальная в некотором отрезке изменения параметра. (Вспомогательные предложения.) Пусть $x_\nu^\circ = x_\nu^\circ(\mu, t)$ — некоторое периодическое решение упрощенной системы, удовлетворяющее условиям задачи. Будем называть «определяющей» систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\zeta_\nu}{dt} = \mu^{k_\nu}(p_{\nu 1}\zeta_1 + p_{\nu 2}\zeta_2 + \ldots + p_{\nu n}\zeta_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.1}$$

где

$$p_{\nu\sigma} = \left(\frac{\partial X_\nu^\circ}{\partial x_\sigma^\circ}\right)_{x_i^\circ = x_i^\circ(0,\ t)}$$

Как увидим в дальнейшем, решение нашей задачи предопределяется теми или иными свойствами этой системы.

Наименьшее из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ обозначим через γ. Полагая, что $\gamma = k$ в случае, когда все коэффициенты $p_{\nu\sigma}$ не зависят от t, и в случае, когда $k \leqslant 0$, и что $\gamma = 0$ в прочих случаях, при помощи подстановки $\vartheta = \mu^\gamma t$ преобразуем систему (2.1) к виду

$$\frac{d\zeta_\nu}{d\vartheta} = q_{\nu 1}\zeta_1 + q_{\nu 2}\zeta_2 + \ldots + q_{\nu n}\zeta_n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Здесь все коэффициенты $q_{\nu\sigma}$ относительно ϑ имеют период $\theta = T\mu^\gamma$ и при всех вещественных значениях ϑ и достаточно малых $|\mu|$ непрерывны. Характеристические показатели $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ системы (2.1) и характеристические показатели $l_1, l_2, \ldots, l_n$ системы (2.2) связаны соотношениями

$$\lambda_\nu = \mu^\gamma l_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

Пусть

$$\zeta_\nu = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{\nu r}\left(\mu,\ \frac{2\pi}{\theta}\vartheta\right)\eta_r \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

преобразование, приводящее систему (2.2) к каноническому виду

$$\frac{d\eta_1}{d\vartheta} = l_1\eta_1, \qquad \frac{d\eta_k}{d\vartheta} = l_k\eta_k + \sigma_{k-1}\eta_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

где все $\sigma_i = 0$, если среди величин $l_1, l_2, \ldots, l_n$ нет кратных, и σ_i равно либо единице, либо нулю в противном случае. Известно, что такое преобразование с непрерывными в указанной выше области изменения ϑ и μ коэффициентами $\alpha_{\nu r}$ всегда существует и что оно допускает единственное обратное преобразование

$$\eta_\nu = \sum_{r=1}^{n} \beta_{\nu r}\left(\mu, \frac{2\pi}{\theta}\vartheta\right)\zeta_r \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

с коэффициентами, также обладающими указанным свойством, причем и те и другие коэффициенты являются периодическими, с периодом относительно ϑ равным θ или во всяком случае 2θ. Относительно t период этих коэффициентов равен T или во всяком случае $2T$; этот период обозначим через T^* и в дальнейшем всюду под T^* будем подразумевать либо T, либо $2T$ в зависимости от очевидных по ходу выкладок обстоятельств.

Пусть $\rho_r = 1$, если $\lambda_r = 0$, и $\rho_i = |\lambda_i|$, если $\lambda_i \neq 0$; введем обозначения

$$b_{\nu r} = \frac{1}{\rho_\nu}\beta_{\nu r}\left(\mu, \frac{2\pi}{T}t\right)\mu^{k_r}, \qquad s_{k-1} = \frac{1}{\rho_k}\mu^{\gamma}\sigma_{k-1}$$

Будем говорить, что система (2.1) «приводима по параметру», если при всяком $\nu = 1, 2, \ldots, n$ порядок относительно μ величины ρ_ν не выше наинизшего из порядков величин $\beta_{\nu 1}\mu^{k_1}, \beta_{\nu 2}\mu^{k_2}, \ldots, \beta_{\nu n}\mu^{k_n}$ и если, кроме того, для каждого из $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, которому соответствует $\sigma_\alpha \neq 0$, порядок величины $\rho_{\alpha+1}$ не выше γ. Из определения понятия приводимой по параметру системы следует, что у такой системы все $b_{\nu r}$ и s_{k-1} непрерывны при всех вещественных значениях t и всех μ в некотором отрезке.

Систему вида (2.1) будем называть «нормальной» в некотором отрезке изменения μ, если она приводима по параметру и если, кроме того, каждый из отличных от нуля и не представляющих целую кратность числа $\sqrt{-1}\,2\pi/T$ характеристических показателей $\lambda_r = \alpha_r + \beta_r\sqrt{-1}$ системы (2.1) всюду в указанном отрезке удовлетворяет условию, чтобы порядок относительно μ величины α_r был не выше порядка β_r или чтобы в противном случае порядок β_r был не отрицательным.

Простейшим примером системы, нормальной в любом отрезке изменения малого параметра, является случай, когда $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

Приведем примеры определяющих систем, приводимых по параметру.

Пример 1. Если $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$, то система приводима. Это очевидно.

Пример 2. Допустим, что $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k \neq 0$. Преобразование можно осуществить так, чтобы все $\beta_{\nu\sigma}$ имели порядок относительно μ не ниже нулевого. Если $k < 0$ или если коэффициенты $p_{\nu\sigma}$ не зависят от t, то $\gamma = k$, а в противном случае $\gamma = 0$. Если среди характеристических показателей определяющей системы нет равных нулю, то порядок относительно μ всех величин $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ равен k. Из этого легко заключить, что при $k < 0$ для приводимости рассматриваемой системы достаточно, чтобы среди характеристических показателей последней отсутствовали равные нулю, а при $k > 0$ система приводима всякий раз, когда коэффициенты $p_{\nu\sigma}$ не зависят от t, либо в противном случае, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_{n-1} = 0$, что имеет место, например, когда среди характеристических показателей нет кратных. Из установленного, в частности, следует, что для приводимости системы вида (2.1) с независящими от t коэффициентами при

$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k$ достаточно, чтобы при $k < 0$ среди характеристических показателей отсутствовали нулевые.

Пример 3. Допустим, что коэффициенты системы (2.1) не зависят от t. Если при этом среди характеристических показателей нет кратных и равных нулю, то система (2.1) приводима по параметру.

В самом деле, пусть в системе (2.1) все $p_{\nu\sigma}$ не зависят от t и среди характеристических показателей последней нет равных нулю. Тогда какими бы ни были не зависящие от μ числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\zeta_\nu}{di} = \mu^{k_\nu}(p_{\nu 1}\zeta_1 + p_{\nu 2}\zeta_2 + \ldots + p_{\nu n}\zeta_n + a_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

допускает решение

$$\zeta_\nu = A, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

где A_ν — некоторая не зависящая от μ и t линейная функция от $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Из этого следует, что система

$$\frac{d\eta_\nu}{dt} = \lambda_\nu \eta_\nu + \rho_\nu \sum_{r=1}^{n} b_{\nu r} a_r \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

которую получим после преобразования

$$\zeta_\nu = \sum_{r=1}^{n} a_{\nu r}\eta_r \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

в предположении, что среди характеристических показателей нет кратных, при любых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ допускает решение

$$\eta_\nu = \sum_{r=1}^{n} \beta_{\nu r} A_r \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

Таким образом какими бы ни были величины $a_1, a_2, \ldots, a_n$, выполняются равенства

$$\left|\sum_{r=1}^{n} b_{\nu r} a_r\right| = \left|\sum_{r=1}^{n} \beta_{\nu r} A_r\right|$$

а следовательно, порядок относительно μ величин b_{ν_r} $(\nu, r = 1, 2, \ldots, n)$ не ниже нуля. Отсюда, учитывая еще, что по условию $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_{n-1} = 0$, следует, что в рассматриваемом случае определяющая система приводима по параметру.

Пример 4. Допустим, что система (2.1) имеет вид

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \mu^{k_1}(p_{11}\zeta_1 + p_{12}\zeta_2), \qquad \frac{d\zeta_2}{dt} = \mu^{k_2}(p_{21}\zeta_1 + p_{22}\zeta_2)$$

где $p_{\nu\sigma}$ не зависит от t. Из предыдущего примера следует, что эта система во всех случаях приводима, за исключением, быть может, случаев, когда при $k_1 \neq 0$ и $k_2 \neq 0$ среди характеристических показателей имеются кратные или равные нулю. Поэтому остается рассмотреть лишь эти случаи. Характеристические показатели суть

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(\mu^{k_1}p_{11} + \mu^{k_2}p_{22}) \mp \sqrt{(\mu^{k_1}p_{11} - \mu^{k_2}p_{22})^2 + 4\mu^{k_1+k_2}p_{12}p_{21}}\right]$$

Отсюда легко убедиться, что для того чтобы характеристические показатели были кратными и вместе с тем отличными от нуля, во всяком случае необходимо, чтобы было $k_1 = k_2$. Но как установлено во втором примере, при $k_1 = k_2$ и отсутствии нулевых характеристических показателей при этом рассматриваемая система приводима; следовательно, остается рассмотреть лишь случай, когда среди характеристических показателей имеются нулевые, т. е. случай, когда имеет место равенство $p_{11}p_{22} = p_{12}p_{21}$. Легко проверить, что в этом последнем случае рассматриваемая система приводима всякий раз, когда в ней отсутствуют уравнения вида

$$\frac{d\zeta_\nu}{dt} = \mu^{k_\nu} \cdot 0$$

при $k_\nu < 0$. Исключая этот последний случай, следовательно, можно утверждать, что система второго порядка с постоянными коэффициентами всегда приводима по параметру.

Пример 5. Если систему (2.1) можно разбить на группы уравнений, каждая из которых интегрируется независимо от другой, и если при этом каждая из таких групп уравнений приводима по параметру, то система (2.1) приводима по параметру.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_\nu}{dt} = \mu^{k_\nu} [p_{\nu 1}\xi_1 + p_{\nu 2}\xi_2 + \ldots + p_{\nu n}\xi_n + F_\nu(\mu, t)] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.3}$$

где $\mu^{k_\lambda} p_{\nu\sigma}$ — коэффициенты определяющей системы, а F_ν относительно t являются периодическими функциями периода T.

Допустим, что в некотором отрезке $a \leqslant \mu \leqslant b$ определяющая система нормальна и что среди не зависящих от μ характеристических показателей последней нет ни одного равного нулю или представляющего целую кратность числа $\sqrt{-1}\ 2\pi / T$. Допустим кроме того, что функции $F_\nu(\mu, t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ в каком-либо отрезке h, все точки которого принадлежат $a \leqslant \mu \leqslant b$, непрерывны при всех вещественных значениях t. Докажем, что при указанных условиях система (2.3) допускает периодическое решение, какими бы ни были функции $F_\nu(\mu, t)$, и что при этом можно указать некоторую конечную область, за границы которой периодическое решение системы (2.3) не выходит, какими бы ни были вещественные значения t и значения μ в отрезке h.

В самом деле, после преобразования, приводящего систему (2.2) к канонической форме, система (2.3) приведется к виду

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \lambda_1\eta_1 + \rho_1 \sum_{r=1}^{n} b_{1r}F_r$$

$$\frac{d\eta_k}{dt} = \lambda_k\eta_k + \rho_k \left(s_{k-1}\eta_{k-1} + \sum_{r=1}^{n} b_{kr}F_r \right) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

Пусть система (2.3) удовлетворяет всем указанным выше условиям. Тогда периодическое решение этой системы при всех μ в отрезке h существует при любых $F_\nu(\mu, t)$ и определяется формулами

$$\xi_\nu = \sum_{r=1}^{n} a_{\nu r}\eta_r \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

причем

$$\eta_1 = \frac{e^{\lambda_1 t}}{e^{-\lambda_1 T^*} - 1} \int_t^{t+T^*} \rho_1 e^{-\lambda_1 t} \sum_{r=1}^{n} b_{1r}F_r dt$$

$$\eta_k = \frac{e^{\lambda_k t}}{e^{-\lambda_k T^*} - 1} \int_t^{t+T^*} \rho_k e^{-\lambda_k t} \left(s_{k-1}\eta_{k-1} + \sum_{r=1}^{n} b_{kr}F_r \right) dt \qquad (k = 2, \ldots, n)$$

Рассмотрим выражение

$$\Gamma_i=\left|\frac{e^{\lambda_i t}}{e^{-\lambda_i T^*}-1}\right|\int\limits_t^{t+T^*}|\rho_i e^{-\lambda_i t}|\,dt=\left|\frac{\rho_i}{\alpha_i}\right|\left|\frac{e^{-\alpha_i T^*}-1}{\sqrt{1-2e^{-\alpha_i T^*}\cos\beta_i T^*+e^{-2\alpha_i T^*}}}\right|$$

Легко проверить, что в точках, где $\alpha_i\neq 0$, и точках, где $\alpha_i=0$, соответственно будет

$$\Gamma_i\leqslant\left|\frac{\rho_i}{\alpha_i}\right|=Q_i(\mu),\qquad \Gamma_i=\lim_{\alpha_i\to 0}\Gamma_i\leqslant\left|\frac{\rho_i T^*}{\sin^{1/2}\beta_i T^*}\right|=q_i(\mu)$$

Но так как по условию определяющая система нормальна в отрезке $a\leqslant\mu\leqslant b$, то существует такое число M_i, которого не превосходит ни одна из величин $Q_i(\mu)$ и $q_i(\mu)$ для значений μ на отрезке h.

Пусть G_i, S_{k-1} и $A_{i\gamma}$ — величины, не меньшие максимальных значений в h модулей соответственно величин

$$\sum_{r=1}^n b_{ir}F_r,\qquad s_{k-1},\qquad \alpha_{i\gamma}$$

а $\alpha_1, a_2, \ldots, a_n$ — величины, определяемые равенствами

$$a_1=M_1G_1,\qquad a_k=M_k(S_{k-1}a_{k-1}+G_k)\qquad (k=2, 3, \ldots, n)$$

Тогда при всех вещественных значениях t и значениях μ в отрезке h выполняются условия $|\eta_\nu|\leqslant a_\nu$, а следовательно, и условия

$$|\xi_\nu|\leqslant\sum_{r=1}^n A_{\nu r}a_r\qquad(\nu=1, 2, \ldots, n)$$

§ 3. Решение задачи. Допустим, что дифференциальные уравнения упрощенной системы допускают некоторое периодическое решение $x_\nu^\circ(\mu, t)$. В дальнейшем, говоря об этом решении, всякий раз будем полагать, что оно удовлетворяет условию задачи и, кроме того, условию, что для каждой из отличных от нуля величины $x_\nu^\circ(\mu, t)$ можно подобрать такое целое неотрицательное число m_ν, чтобы последняя могла быть представлена в виде $\mu^{m_\nu}x_\nu^*(\mu, t)$, где $x_\nu^*(0, t)$ отлична от нуля и конечна. При этом величину $\mu^{m_\nu}x_\nu^*(0, t)$ будем называть «главной частью» величины $x_\nu^\circ(\mu, t)$. В случае, когда $x_\nu^\circ(\mu, t)\equiv 0$, будем полагать, что главная часть равна нулю.

Основное предложение может быть сформулировано в виде теоремы: *пусть дифференциальные уравнения упрощенной системы допускают периодическое решение $x_\nu^\circ(\mu, t)$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$, которому в каком-либо отрезке g изменения μ соответствует нормальная определяющая система; если при этом среди не зависящих от μ характеристических показателей определяющей системы нет ни одного, равного нулю или представляющего целую кратность числа $\sqrt{-1}\,2\pi/T$, то внутри этого отрезка содержится некоторый отрезок, во всех точках которого система* (1.1) *допускает периодическое решение, обращающееся в $x_\nu^\circ(0, t)$ при $\mu=0$. Это имеет место независимо от вида отброшенных по сравнению с упрощенной системой членов.*

Предполагая, что все установленные теоремой условия выполняются, сначала докажем существование периодических рядов, формально удовлетворяющих системе (1.1); попутно укажем способ построения таких рядов в предположении, что общее решение определяющей системы известно.

С указанной целью, произведя замену переменных

$$x_\nu = y_\nu + y_\nu^\circ \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

где y_ν° — главная часть величины $x_\nu^\circ(\mu, t)$, приведем систему (1.1) к виду

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \mu^{k_\nu}(p_{\nu 1}y_1 + p_{\nu 2}y_2 + \ldots + p_{\nu n}y_n + p_\nu\mu + Y_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \quad (3.1)$$

где $p_{\nu\sigma}$ — коэффициенты определяющей системы, p_ν — не зависящие от μ постоянные или периодические функции t, а разложения величин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ в ряды по целым положительным степеням $y_1, y_2, \ldots, y_n$ не содержат членов ниже второго измерения. Затем попытаемся формально удовлетворить системе (3.1) некоторыми рядами вида

$$y_\nu = y_\nu^{(1)}\mu + y_\nu^{(2)}\mu^2 + \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \quad (3.2)$$

в которых величины $y_\nu^{(1)}, y_\nu^{(2)}, \ldots$ были бы не зависящими или зависящими от μ периодическими функциями t.

После формальной замены в системе (3.1) величин $y, y_2, \ldots, y_n$ соответствующими рядами (3.2) и последующей группировки членов с одинаковыми степенями μ получим

$$\sum_{i=i}^{\infty} \frac{dy_\nu^{(i)}}{dt}\mu^i = \mu^{k_\nu}\sum_{i=1}^{\infty}(p_{\nu 1}y_1^{(i)} + p_{\nu 2}y_2^{(i)} + \ldots + p_{\nu n}y_n^{(i)} + Y_\nu^{(i)})\mu^i \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

где, как легко проверить, $Y_\nu^{(i)}$ суть известные целые рациональные функции с периодическими относительно t коэффициентами только от тех $y_\alpha^{(1)}, y_\beta^{(2)}, \ldots$, верхние индексы которых меньше числа i; в частности, $Y_\nu^{(1)} = p_\nu$.

Система (3.1) формально будет удовлетворена, если коэффициенты рядов (3.2) определять из систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_m^{(\sigma)}}{dt} = \mu^{k_m}(p_{m1}y_1^{(\sigma)} + p_{m2}y_2^{(\sigma)} + \ldots + p_{mn}y_n^{(\sigma)} + Y_m^{(\sigma)}) \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \ldots, n \\ \sigma = 1, 2, \ldots \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Учитывая структуру величин $Y_i^{(\gamma)}$, заключаем, что из дифференциальных уравнений (3.3) последовательно могут быть определены сначала $y_m^{(1)}$, затем $y_\nu^{(2)}$ и т. д. ($m, \nu = 1, 2, \ldots, n$), причем согласно § 2, — как конечные при $\mu = 0$ периодические относительно t функции. Из этого следует, что при принятых условиях системе (1.1) всегда можно формально удовлетворить построенными указанным выше способом периодическими рядами

$$x_\nu = y_\nu^\circ + y_\nu^{(1)}\mu + y_\nu^{(2)}\mu^2 + \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

обращающимися в $x_\nu^\circ(0, t)$ при $\mu = 0$.

Нам остается доказать, что внутри отрезка g содержится отрезок, во всех точках которого ряды (3.2) абсолютно и равномерно сходятся при всех вещественных значениях t.

С этой целью запишем периодическое решение каждой из систем (3.3) в форме, установленной в § 2:

$$y_\nu^{(\sigma)} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{\nu r}\eta_r^{(\sigma)} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, n \\ \sigma = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

причем

$$\eta_1^{(\sigma)} = \frac{e^{\lambda_1 t}}{e^{-\lambda_1 T^*} - 1} \int\limits_t^{t+T^*} \rho_1 e^{-\lambda_1 t} \sum_{r=1}^{n} b_{1r} Y_r^{(\sigma)}\, dt$$

$$\eta_k^{(\sigma)} = \frac{e^{\lambda_k t}}{e^{-\lambda_k T^*} - 1} \int\limits_t^{t+T^*} \rho_k e^{-\lambda_k t} \left(s_{k-1}\eta_{k-1}^{(\sigma)} + \sum_{r=1}^{n} b_{kr} Y_r^{(\sigma)} \right) dt \quad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, 3, \ldots \\ k = 2, 3, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Формулами (3.4) последовательное определение коэффициентов рядов (3.2) сведено к квадратурам.

Допустим, что областью, в которой функции Y_ν системы (3.1) голоморфны при всех вещественных значениях t относительно величин $\mu, y_1, y_2, \ldots, y_n$, является $|\mu| \leqslant \rho$ и $|y_\gamma| \leqslant \rho_\gamma$; пусть K_ν—максимальный модуль Y_ν в этой области. Тогда коэффициент любого члена разложения функции Y_ν в ряд по целым положительным степеням величин $\mu, y_1, y_2, \ldots, y_n$, имеющий вид $|A_{mm_1m_2\ldots m_n}^{(\nu)}(t)\, \mu^m y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_n^{m_n}$, при любом вещественном значении t будет удовлетворять условию

$$|A_{mm_1m_2\ldots m_n}^{(\nu)}(t)| \leqslant \frac{K_\nu}{\rho^m \rho_1^{m_1} \rho_2^{m_2} \ldots \rho_n^{m_n}}$$

и ряд, полученный из предыдущего заменой всех коэффициентов указанными выше пределами их модулей, будет абсолютно сходящимся в области $|\mu| \leqslant \rho$, $|y_\gamma| \leqslant \rho_\gamma$, а значит, и в области h, $|y_\gamma| \leqslant \rho_\gamma$, где h—отрезок, все точки которого принадлежат каждому из отрезков $|\mu| \leqslant \rho$ и g. Образованный таким образом ряд с положительными постоянными коэффициентами, не содержащий членов ниже второго измерения, определит некоторую голоморфную в области h, $|y_\gamma| \leqslant \rho_\gamma$ функцию $\Phi_\nu(\mu, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Далее, пусть S_γ и $B_{\alpha i}$—максимальные значения в отрезке h модулей соответственно величин s_γ и $b_{\alpha i}$. Максимальное значение p_γ обозначим через P_γ. Пусть $\Theta_\nu^{(i)}$—коэффициент при μ^i в выражении, которое получится после формальной замены (с последующей группировкой членов с одинаковыми степенями μ) в разложении функции Φ_ν величин $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответственно рядами

$$y_m = \sum_{j=1}^{n} A_{m\gamma} (a_\gamma^{(1)}\mu + a_\gamma^{(2)}\mu^2 + \ldots \qquad (m = 1, 2, \ldots n) \tag{3.5}$$

Как легко проверить, величина $\Theta_\nu^{(i)}$ является целой рациональной функцией только от тех $a_1^{(\sigma)}, a_2^{(\sigma)}, \ldots, a_n^{(\sigma)}$, для которых $\sigma < i$, причем, какими бы ни были вещественные значения t и значения μ в отрезке h, имеет место неравенство

$$|Y_\nu^{(i)}(y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)};\ y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)};\ \ldots;\ y_1^{(i-1)}, \ldots, y_n^{(i-1)};\ t)| \leqslant$$
$$\leqslant \Theta_\nu(a_1^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)};\ a_1^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)};\ \ldots;\ a^{(i-1)}, \ldots, a_n^{(i-1)})$$

если только при всех вещественных значениях t и μ в отрезке h величины $a_\gamma^{(\sigma)}$ не меньше величин $\eta_\gamma^{(\sigma)}$ ($\gamma = 1, 2, \ldots, n$; $\sigma = 1, 2, \ldots, i-1$) систем (3.4).

Учитывая это и установленное в § 2, заключаем, что, определяя коэффициенты рядов (3.5) соотношениями

$$
\begin{aligned}
a_1^{(\sigma)} &= M_1 \sum_{r=1}^{n} B_{1r}\Theta_r^{(\sigma)} \\
a_k^{(\sigma)} &= M_k \left(S_{k-1}a_{k-1}^{(\sigma)} + \sum_{r=1}^{n} B_{kr}\Theta_r^{(\sigma)} \right)
\end{aligned}
\qquad (\Theta_r^{(1)} = P_r) \qquad \begin{pmatrix} k=2,\,3,\,\ldots,\,n \\ \sigma=1,\,2,\,3,\ldots \end{pmatrix} \tag{3.6}
$$

где $M_1, M_2, \ldots, M_n$ означает то же, что и в § 2, мы обеспечим выполнение при всех вещественных значений t и значениях μ в отрезке h условий $|\eta_\gamma^{(i)}| \leqslant a_\gamma^{(i)}$, а значит, и условий

$$
|y_\gamma^{(i)}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} A_{\gamma k} a_k^{(i)} \qquad \begin{pmatrix} \gamma=1,\,2,\ldots,\,n \\ i=1,\,2,\,3,\ldots \end{pmatrix}
$$

Таким образом наша цель будет достигнута, если докажем, что степенные ряды

$$
a_\gamma^{(1)}\mu + a_\gamma^{(2)}\mu^2 + \ldots \qquad (\gamma=1,\,2,\ldots,\,n) \tag{3.7}
$$

коэффициенты которых определены соотношениями (3.6), сходятся при всех численно достаточно малых значениях параметра μ.

Но последнее необходимо имеет место, так как легко проверить, что ряды (3.7) представляют разложения в заведомо сходящиеся ряды по целым положительным степеням μ соответственно величин $u_1, u_2, \ldots, u_n$, определяемых соотношениями

$$
u_1 - M_1 \sum_{r=1}^{n} B_{1r}\left[P_r\mu + \Phi_r(\mu, u_1, u_2, \ldots, u_n)\right] = 0
$$

$$
u_k - M_k S_{k-1} u_{k-1} - M_k \sum_{r=1}^{n} B_{kr}\left[P_r\mu + \Phi_r(\mu, u_1, u_2, \ldots u_n)\right] = 0 \qquad (k=2,\,3,\ldots,\,n)
$$

Заметим, что, как следует из доказанной теоремы, в зависимости от того, в каком отрезке изменения малого параметра определяющая система нормальна, возможны соответственно случаи, когда отрезок, во всех точках которого система (1.1) допускает периодическое решение, включает либо только неотрицательные значения, либо только неположительные значения, либо и те и другие значения μ.

Итак, если условия теоремы выполняются, то всегда существует некоторый, включающий нулевую точку, отрезок изменения параметра, так что при всех значениях μ в этом отрезке система (1.1) допускает периодическое, периода T, решение, обращающееся в $x_\nu^\circ(0, t)$ при $\mu=0$, причем, если общее решение определяющей системы известно, то упомянутое периодическое решение системы (1.1) всегда может быть построено в виде рядов по способу, изложенному в § 3.

В случае задачи Пуанкаре ($k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$) из доказанной теоремы получается, как частный случай, известная теорема в теории периодических решений Пуанкаре: если дифференциальные уравнения (1.1), правые части которых зависят от t, допускают при $\mu=0$ периодическое решение $x_\nu^\circ(t)$, характеристические показатели которого все отличны от нуля и не представляют целую кратность числа $\sqrt{-1}\,2\pi/T$, то они же допускают периодическое решение и при любых численно достаточно малых значениях параметра, обращающееся в $x_\nu^\circ(t)$ при $\mu=0$.

§ 4. Примеры, иллюстрирующие метод. Пусть, например, дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=px+\mu y^2, \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{1}{\mu}(qy+a\sin t)+bxy \tag{4.1}$$

Дифференциальные уравнения упрощенной системы имеют вид

$$\frac{dx_0}{dt}=px_0, \qquad \frac{dy_0}{dt}=\frac{1}{\mu}(qy_0+a\sin t)$$

и допускают единственное периодическое решение

$$x_0=0, \qquad y_0=-\frac{a}{q^2+\mu^2}(p\sin t+\mu\cos t)$$

Главной частью этого периодического решения является

$$x^*=0, \qquad y^*=-\frac{a}{q}\sin t$$

После замены переменных

$$x=\xi, \qquad y=\eta-\frac{a}{q}\sin t$$

получим

$$\begin{aligned}&\frac{d\xi}{dt}=p\xi+\mu(\eta-\alpha\sin t)^2\\ &\frac{d\eta}{dt}=\frac{1}{\mu}(q\eta+\mu\alpha\cos t-\mu\xi\alpha b\sin t+\mu b\xi\eta)\end{aligned} \qquad \left(\alpha=\frac{a}{q}\right) \tag{4.2}$$

Определяющей системой является

$$\frac{d\xi_0}{dt}=p\xi_0, \qquad \frac{d\eta_0}{dt}=\frac{1}{\mu}q\eta_0$$

и как, легко проверить, она удовлетворяет условиям теоремы при любых вещественных значениях μ, если только ни одна из величин p и q не равна нулю.

Решение системы (4.2) будем искать в виде рядов

$$\xi=\xi_1\mu+\xi_2\mu^2+\ldots, \qquad \eta=\eta_1\mu+\eta_2\mu^2+\ldots$$

Как следует из теоремы, периодическое решение системы (4.1), обращающееся в $x=0$ и $y=-\alpha\sin t$ при $\mu=0$, существует и оно при любых численно достаточно малых значениях μ может быть представлено рядами

$$x=\xi_1\mu+\xi_2\mu^2+\ldots, \qquad y=-\alpha\sin t+\eta_1\mu+\eta_2\mu^2+\ldots$$

если коэффициенты последних определять как периодические решения следующих систем дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{d\xi_1}{dt}=p\xi_1+\alpha^2\sin^2 t, &&\frac{d\eta_1}{dt}=\frac{1}{\mu}(q\eta_1+\alpha\cos t)\\ &\frac{d\xi_2}{dt}=p\xi_2-2\alpha\eta_1\sin t, &&\frac{d\eta_2}{dt}=\frac{1}{\mu}(q\eta_2-b\alpha\xi_1\sin t)\\ &\frac{d\xi_3}{dt}=p\xi_3-2\eta_2\alpha\sin t+\eta_1{}^2, &&\frac{d\eta_3}{dt}=\frac{1}{\mu}(q\eta_2-2b\alpha\xi_2\sin t+b\xi_1\eta_1)\end{aligned}$$

. . . .

После вычислений, пренебрегая величинами выше второго порядка относительно μ, получим

$$x = -\frac{\alpha^2}{2p}\left[1+\frac{p}{4+p^2}\,2\sin 2t - p\cos 2t)\right]\mu - \frac{\alpha^2 q}{(4+p^2)(q^2+\mu^2)}(2\cos 2t + p\sin 2t)\mu^2$$

$$y = -\alpha\sin t - \frac{\alpha}{q^2+\mu^2}(q\cos - \mu\sin t)\mu -$$

$$-\frac{\alpha^3 bq}{4p(4+p^2)(q^2+\mu^2)}\left[(8+3p^2)\cos t - 2p\sin t + \frac{q^2}{q^2+9\mu^2}(2p\cos 3t - p^2\sin 3t\right]\mu^2$$

В качестве другого примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \mu(y^2-k^2)+\mu^2 X(t), \qquad \frac{dy}{dt} = xy + \mu Y(t) \tag{4.3}$$

где $X(t)$ и $Y(t)$ — периодические функции периода 2π.

Дифференциальные уравнения упрощенной системы

$$\frac{dx_0}{dt} = \mu(y_0{}^2-k^2), \qquad \frac{dy_0}{dt} = x_0 y_0$$

допускают решение $x_0=0$, $y_0=\mp k$. После замены $\xi = x$, $\eta = y - y_0$ получим

$$\frac{d\xi}{dt} = \mu(2y_0\eta+\eta^2+\mu X), \qquad \frac{d\eta}{dt} = y_0\xi + \xi\eta + \mu Y \tag{4.4}$$

Определяющая система

$$\frac{d\xi_0}{dt} = \mu 2y_0\eta_0, \qquad \frac{d\eta_0}{dt} = y_0\xi_0$$

как легко проверить, учитывая § 2, удовлетворяет всем условиям теоремы при любых численно достаточно малых μ, если только $|k| = |y_0| \neq 0$.

Решение системы (4.4) ищем в виде рядов

$$\xi = \xi_1\mu + \xi_2\mu^2 + \ldots, \qquad \eta = \eta_1\mu + \eta_2\mu^2 + \ldots$$

причем коэффициенты последних будем определять как периодические решения следующих систем дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \mu(2y_0\eta_1 + X), \qquad \frac{d\eta_1}{dt} = y_0\xi_1 + Y$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \mu(2y_0\eta_2 + \eta_1{}^2), \qquad \frac{d\eta_2}{dt} = y_0\xi_2 + \xi_1\eta_1$$

$$\frac{d\xi_3}{dt} = \mu(2y_0\eta_3 + 2\eta_1\eta_2), \qquad \frac{d\eta_3}{dt} = y_0\xi_3 + \xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2$$

. . . .

Заметив, что единственным периодическим решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = \mu(2y_0V + \alpha_1\sin mt + \beta_1\cos mt + \gamma_1)$$

$$\frac{dV}{dt} = y_0 u + \alpha_2\sin mt + \beta_2\cos mt + \gamma_2$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — некоторые постоянные, является

$$u = A_1 \sin mt + B_1 \cos mt + C_1, \qquad V = A_2 \sin mt + B_2 \cos mt + C_2$$

где

$$A_1 = \frac{(m\beta_1 - 2y_0\alpha_2)\mu}{m^2 + 2y_0{}^2\mu}, \qquad B_1 = -\frac{(m\alpha_1 + 2y_0\beta_2)\mu}{m^2 + 2y_0{}^2\mu}, \qquad C_1 = -\frac{\gamma_2}{y_0}$$

$$A_2 = \frac{m\beta_2 - y_0\alpha_1\mu}{m^2 + 2y_0{}^2\mu}, \qquad B_2 = -\frac{m\alpha_2 + y_0\beta_1\mu}{m^2 + 2y_0{}^2\mu}, \qquad C_2 = -\frac{\gamma_1}{2y_0}$$

можем считать рассматриваемую задачу решенной. Мы получим два периодических решения: одно, соответствующее $y_0 = +k$, и другое, соответствующее $y_0 = -k$.

Пользуясь методом, изложенным в настоящей работе, мы в рассмотренных выше примерах получили соответствующие периодические решения, а между тем к нахождению периодических решений дифференциальных уравнений (4.1), а также дифференциальных уравнений (4.3) сформулированная в конце § 3 теорема Пуанкаре не применима. В первом случае потому, что параметр входит не аналитически, а во втором случае потому, что при $\mu = 0$ дифференциальные уравнения (4.3) допускают лишь такие периодические решения, среди характеристических показателей которых имеется равный нулю.

§ 5. О законности понижения порядка дифференциальных уравнений при исследовании периодических движений. Допустим, в частности, что дифференциальные уравнения (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} &\mu^{\gamma_\nu}\frac{dx_\nu}{dt} = X_\nu(\mu, x_1, x_2, \ldots, x_{m+k}, t) \\ &\frac{dx_{m+\sigma}}{dt} = X_{m+\sigma}(\mu, x_1, x_2, \ldots, x_{m+k}, t) \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, m \\ \sigma = 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix} \qquad (5.1)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ — целые положительные числа, $X_\nu(0, x_1, x_2, \ldots, x_{m+k}, t) \neq 0$ для всех $\nu = 1, 2, \ldots, m$ и, кроме того, все правые части при всех вещественных значениях t являются аналитическими функциями параметра μ и переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{m+k}$ в отрезке $|\mu| \leqslant \rho$ и области $G(a_i \leqslant x_i \leqslant b_i)$.

Пусть α — наименьшее из чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$, а $X_r^\circ(\mu, x_1, x_2, \ldots, x_{m+k}, t)$ — совокупность всех членов разложения функции X_r в ряд по целым положительным степеням μ, содержащих μ в степенях ниже α. Тогда систему уравнений

$$\begin{aligned} &X_\nu{}^\circ(\mu, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_{m+k}^\circ, t) = 0 \\ &\frac{dx_{m+\sigma}^\circ}{dt} = X_{m+\sigma}^\circ(\mu, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_{m+k}^\circ, t) \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, m \\ \sigma = 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix} \qquad (5.2)$$

будем называть «системой пониженного порядка».

Во многих исследованиях вместо основной системы (5.1) рассматривают систему пониженного порядка. Возникает вопрос: в какой мере это законно и насколько результаты исследования системы (5.2) соответствуют тому, что действительно имеет место в процессе, определяемом системой (5.1).

Отказываясь от рассмотрения вопроса в общем виде, рассмотрим более узкую задачу. Допустим, что система пониженного порядка допускает периодическое, периода T, решение

$$x_r^\circ = x_r^\circ(\mu, t) \qquad (r = 1, 2, \ldots, m+k)$$

которое при всех вещественных значениях t и численно достаточно малых μ остается внутри области G и разлагается в ряды по целым положительным степеням μ; при каких условиях независимо от вида отброшенных членов основная система допускает периодическое, того же периода, решение при всех значениях параметра в некотором отрезке, которое при численно достаточно малых значениях μ сколь угодно мало отличается от упомянутого решения системы пониженного порядка?

Сделав в основной системе преобразование переменных

$$y_\nu = x_\nu - x_\nu^\circ \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m+k)$$

приведем ее к виду

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \mu^{k_\nu} Y_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m+k=n) \tag{5.3}$$

где $k_r = -\gamma_r$ и

$$Y_r = X_r^\circ[\mu, y_1 + x_1^\circ(\mu, t), \ldots, y_n + x_n^\circ(\mu, t), t] + \\ + \mu^\alpha X_r^* - \mu^{\gamma_r}\frac{dx_r^\circ(\mu, t)}{dt} \qquad (r = 1, 2, \ldots; m)$$

$$Y_{m+\sigma} = \mu^{-k_{m+\sigma}}\{\overset{\circ}{X}_{m+\sigma}[\mu, y_1 + x_1^\circ(\mu, t), \ldots, y_n + x_n^\circ(\mu, t), t] - \\ - \overset{\circ}{X}_{m+\sigma}[\mu, x_1^\circ(\mu, t), \ldots, x_n^\circ(\mu, t), t]\} + \mu^\alpha X^*_{m+\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, k)$$

Здесь $k_{m+\sigma}$ — показатель степени при μ у первого члена в разложении функции $\overset{\circ}{X}_{m+\sigma}$ в ряд по степеням μ и $\mu^\alpha X_\nu^*$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ — совокупность членов со степенями μ не ниже α в разложении функции X_ν в ряд по степеням μ. Очевидно, $k_{m+\sigma} < \alpha$.

Система (5.3) удовлетворяет всем условиям, наложенным на систему (1.1).

Дифференциальными уравнениями упрощенной системы являются

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \mu^{k_\nu} Y_\nu^\circ \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n,)$$

где

$$Y_\nu^\circ = (Y_\nu)_{\mu=0}$$

Эти уравнения допускают решение

$$y_\nu^\circ = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

удовлетворяющее требованиям, предъявленным в § 1 и 3 к периодическому решению дифференциальных уравнений упрощенной системы.

Для системы (5.3) этому решению соответствует следующая определяющая система:

$$\frac{d\xi_r}{dt} = \mu^{-\gamma_r}\sum_{i=1}^{m+k}\left(\frac{\partial X_r^\circ}{\partial x_i^\circ}\right)_* \xi_i$$

$$\frac{d\xi_{m+\sigma}}{dt} = \mu^{k_{m+\sigma}}\sum_{i=1}^{m+k}\left(\mu^{-k_{m+\sigma}}\frac{\partial \overset{\circ}{X}_{m+\sigma}}{\partial x_i^\circ}\right)_* \xi_i \qquad \left(\begin{matrix} r = 1, 2, \ldots, m \\ \sigma = 1, 2, \ldots, k\end{matrix}\right) \tag{5.4}$$

где индекс $_*$ означает подстановку $x_\alpha^\circ = x_\alpha^\circ(0, t)$ и $\mu = 0$.

Согласно теореме § 3, если система (5.4) нормальна в некотором отрезке g изменения μ и среди не зависящих от μ характеристических показателей последней нет ни одного, равного нулю или представляющего целую кратность числа $\sqrt{-1}\ 2\pi/T$, то внутри этого отрезка имеется отрезок, во всех точках которого система (5.3) допускает периодическое решение, обращающееся в $y_r = 0$ $(r = 1, 2, \ldots, m+k)$ при $\mu = 0$. Это решение может быть представлено абсолютно и равномерно сходящимися рядами вида

$$y_r = y_r^{(1)}\mu + y_r^{(2)}\mu^2 + \ldots \qquad (r = 1, 2, \ldots, m+k)$$

в которых $y_r^{(1)}, y_r^{(2)}, \ldots$, вообще говоря, зависят от μ и определяются установленным способом.

При указанных условиях, следовательно, система (5.1) также допускает периодическое решение и оно может быть представлено рядами

$$x_r = x_r^{\circ}(\mu, t) + y_r^{(1)}\mu + y_r^{(2)}\mu^2 + \ldots \qquad (r = 1, 2, \ldots, m+k)$$

Таким образом, как ответ на поставленную выше задачу, можно сформулировать теорему: *пусть система пониженного порядка допускает периодическое, периода T, решение $x_r^{\circ} = x_r^{\circ}(\mu, t)$ $(r = 1, 2, \ldots, m+k)$, которое при достаточно малых $|\mu|$ не выходит за границы области G и разлагается в ряды по целым положительным степеням μ. Если система дифференциальных уравнений (5.4) нормальна в некотором отрезке g изменения μ и если при этом среди не зависящих от μ характеристических показателей последней нет ни одного, равного нулю или представляющего целую кратность числа $\sqrt{-1}\ 2\pi/T$, то внутри g содержится отрезок, во всех точках которого основная система допускает периодическое решение, которое при достаточно малых $|\mu|$ сколь угодно мало отличается от $x_r^{\circ}(\mu, t)$; это имеет место независимо от вида отброшенных, по сравнению с упрощенной системой, членов.*

Как следует из теоремы, возможны следующие случаи.

1. Среди решений основной системы имеется решение, которое при численно достаточно малых значениях параметра сколь угодно мало отличается от периодического решения системы пониженного порядка, причем это решение существует во всех точках некоторого отрезка изменения параметра, включающем как неположительные, так и неотрицательные значения μ.

2. Имеет место то же, с той лишь разницей, что отрезок, во всех точках которого существует периодическое решение основной системы, включает либо только неположительные, либо только неотрицательные значения параметра.

3. Среди решений основной системы нет ни одного, которое при численно малых значениях параметра мало отличалось бы от периодического решения системы пониженного порядка.

Когда выполняются условия доказанной выше теоремы, гарантируется либо первый, либо второй случай независимо от вида совокупности отбрасываемых в дифференциальных уравнениях основной системы членов; но эти случаи лишь при специальном подборе указанной совокупности членов, вообще говоря, возможны и тогда, когда условия теоремы не выполняются. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Рассмотрим систему, движения которой определяются дифференциальным уравнением вида

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = ax + b\frac{dx}{dt} - \sin t + \mu F\left(\mu, x, \frac{dx}{dt}, t\right) \tag{5.5}$$

где $F(\mu, x, dx/dt, t)$ разлагается в ряд по целым положительным степеням μ, x и dx/dt, причем коэффициенты разложения либо постоянны, либо периодические, периода 2π, функции t.

Дифференциальное уравнение пониженного порядка

$$ax^\circ + b\frac{dx^\circ}{dt} - \sin t = 0$$

при любых значениях μ допускает решение

$$x^\circ = -\frac{1}{a^2+b^2}(b\cos t - a\sin t) \tag{5.6}$$

В рассматриваемом случае

$$X^\circ = b\frac{dx^\circ}{dt} + ax^\circ - \sin t$$

и системе (5.4) соответствует следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\xi}{dt_2} = \frac{1}{\mu}\left(b\frac{d\xi}{dt} + a\xi\right).$$

Так как характеристические показатели последнего уравнения суть

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2\mu}\left(b \mp \sqrt{b^2 + 4a\mu}\right)$$

то оно нормально при $b=0$ в отрезке $-\infty < \mu < +\infty$, при $b=0$ и $a>0$ в отрезке $0 \leqslant \mu < +\infty$, при $b \neq 0$ и $a<0$ в отрезке $-\infty < \mu \leqslant 0$.

Из теоремы этого параграфа следует, что уравнение (5.5) допускает периодическое решение, близкое к (5.6), в случае $b \neq 0$ при любых численно достаточно малых значениях параметра, в случае $b=0$, $a>0$ только при любых неотрицательных достаточно малых значениях параметра, и в случае $b=0$, $a<0$ только при любых неположительных, численно достаточно малых значениях параметра.

Рассмотрим теперь систему, движения которой задаются дифференциальным уравнением вида

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2(x - \sin t + \mu\Phi(t)) \tag{5.7}$$

где Φ — некоторая периодическая функция периода 2π, а μ — параметр, который по физическому своему смыслу не может быть отрицательным.

Уравнение (5.7) представляет частный случай уравнения (5.5) и, как следует из проведенного выше анализа, условия нашей теоремы для этого случая не выполняются.

Периодическим решением основного уравнения (5.7), если такое существует, является

$$x = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \mu} \sin t + \alpha^2 \mu \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - \nu\mu} (a_\nu \sin \nu t + b_\nu \cos \nu t)$$

где a_ν и b_ν — коэффициенты разложения функции $\Phi(t)$ в ряд Фурье. Отсюда видно, что если разложение функции $\Phi(t)$ в ряд Фурье имеет конечное число членов, то существует отрезок, во всех точках коего основное уравнение допускает периодическое решение, которое при достаточно малых значениях параметра мало отличается от $\sin t$, и что если указанное разложение имеет бесконечное число членов, то такого отрезка не существует.

А между тем соответствующее уравнение пониженного порядка допускает периодическое решение $x = \sin t$ при любых значениях параметра, какой бы ни была функция $\Phi(t)$.

Поступила в редакцию
I VI 1945

Уральский индустриальный
институт

I. M. VOLK.— PERIODIC SOLUTIONS OF NON-AUTONOMIC SYSTEMS DEPENDING UPON THE SMALL PARAMETER

The paper sets up one of the sufficient conditions for the existence of periodic solutions of non-autonomic systems depending upon the "small" parameter. The means of finding these solutions in the form of a series is given. The right hand terms of the differential equations for motion of the system, which is reduced to the form (1.1), are meromorphic functions of the small parameter.