Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. П. Проскуряков

(Москва)

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим материальную систему, уравнение движения которой является дифференциальным уравнением 2-го порядка с периодическими коэффициентами. Будем исследовать устойчивость некоторого определенного движения системы, которому соответствует некоторое частное решение этого уравнения. Устойчивость движения будем понимать в смысле Ляпунова [1].

Составим уравнение возмущенного движения такой системы, сохранив только линейные члены и отбросив все члены более высокого порядка. В результате получим линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}+A\frac{dx}{d\varphi}+Bx=0 \tag{1.1}$$

Коэффициенты этого уравнения будут периодическими функциями φ, причем для простоты будем считать, что период равен 2π; этого всегда можно добиться заменой независимого переменного.

Допустим, что коэффициент A имеет производную по φ. Тогда при помощи преобразования

$$x=z\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\int A\,d\varphi\right\} \tag{1.2}$$

уравнение (1.1) можно привести к уравнению типа Хилла

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2}+Kz=0 \tag{1.3}$$

где

$$K=B-\frac{1}{4}A^2-\frac{1}{2}\frac{dA}{d\varphi}$$

Коэффициент K также будет периодической функцией φ с периодом 2π. Пусть K зависит еще от малого параметра μ.

Функцию $K(\varphi,\mu)$ подчиним двум условиям.

1°. Функция $K(\varphi,\mu)$ разлагается в ряд по целым степеням параметра μ, сходящийся при $|\mu|<r$ при произвольном φ

$$K(\varphi,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mu^n$$

2°. Функция $K(\varphi, \mu)$ разлагается в сходящийся ряд Фурье

$$K(\varphi, \mu) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (P_n \cos n\varphi + Q_n \sin n\varphi)$$

причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (P_n^2 + Q_n^2)^{\frac{1}{2}}$ сходится при $|\mu| < r$. Этому условию удовлетворяет всякая непрерывная периодическая функция φ, имеющая ограниченное изменение на отрезке $[0, 2\pi]$.

Коэффициенты Фурье P_n и Q_n являются функциями параметра μ, голоморфными при $|\mu| < r$. Это непосредственно следует из формул, определяющих коэффициенты Фурье.

Представление функции $K(\varphi, \mu)$ в виде ряда Фурье в комплексной форме имеет вид

$$K(\varphi, \mu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\varphi}$$

где

$$C_0 = P_0, \qquad C_n = \frac{1}{2}(P_n - iQ_n), \qquad C_{-n} = \frac{1}{2}(P_n + iQ_n)$$

§ 2. Решение уравнения типа Хилла. Перейдем к решению уравнения (1.3) методом Хилла[2]. Аналогичная задача для уравнения более частного вида рассмотрена Н. Е. Кочиным[3]. В дальнейшем будем придерживаться изложения метода Хилла, данного Н. Е. Кочиным. Согласно общей теории линейных уравнений с периодическими коэффициентами, ищем решение уравнения (1.3) в виде

$$z = e^{\nu\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n e^{in\varphi} \tag{2.1}$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.3) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\varphi}$, получаем бесконечную систему однородных линейных уравнений относительно коэффициентов H_n

$$-(\nu + n)^2 H_n + \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k H_{n-k} = 0 \tag{2.2}$$

или

$$\left[1 - \frac{C_0}{(\nu + n)^2}\right] H_n - \frac{1}{(\nu + n)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' C_k H_{n-k} = 0 \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots)$$

Составим определитель этой системы

$$\Delta(\nu, \mu) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots - \dfrac{C_1}{(\nu-1)^2} & 1 - \dfrac{C_0}{(\nu-1)^2} & -\dfrac{C_{-1}}{(\nu-1)^2} & -\dfrac{C_{-2}}{(\nu-1)^2} & -\dfrac{C_{-3}}{(\nu-1)^2} & \cdots \\ \cdots - \dfrac{C_2}{\nu^2} & -\dfrac{C_1}{\nu^2} & 1 - \dfrac{C_0}{\nu^2} & -\dfrac{C_{-1}}{\nu^2} & -\dfrac{C_{-2}}{\nu^2} & \cdots \\ \cdots - \dfrac{C_3}{(\nu+1)^2} & -\dfrac{C_2}{(\nu+1)^2} & -\dfrac{C_1}{(\nu+1)^2} & 1 - \dfrac{C_0}{(\nu+1)^2} & -\dfrac{C_{-1}}{(\nu+1)^2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Этот бесконечный определитель принадлежит к числу нормальных определителей [4], так как согласно условию 2° двойной ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_{-m}}{(\nu+n)^2}$$

сходится абсолютно. Как известно, нормальный определитель является абсолютно сходящимся и, кроме того, в нормальном определителе сходится абсолютно ряд, составленный из миноров элементов любой строки.

Условием существования отличных от нуля решений системы (2.2) является равенство

$$\Delta(\nu, \mu) = 0 \tag{2.3}$$

При этом условии коэффициенты H_n будут пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов произвольной строки. Следовательнс, ряд, составленный из $|H_n|$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$, сходится, а на основании формулы (2.2) и условия 2° сходится также ряд с общим членом $|\nu+n|^2 |H_n|$. Таким образом все операции, выполненные при решении уравнения (1.3), являются законными.

Рассмотрим определитель $\Delta(\nu, \mu)$ как функцию ν. Легко видеть, что $\Delta(\nu, \mu)$ является четной периодической функцией ν с периодом, равным единице. Далее, $\Delta(\nu, \mu)$—аналитическая функция, имеющая двойные полюсы в точках $\nu=n$ с главной частью, равной $N/(\nu-n)^2$. Введем определитель

$$D(\mu) = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1-\frac{C_0}{2^2} & -\frac{C_{-1}}{2^2} & -\frac{C_{-2}}{2^2} & -\frac{C_{-3}}{2^2} & -\frac{C_{-4}}{2^2} & \ldots \\ \ldots & -\frac{C_1}{1^2} & 1-\frac{C_0}{1^2} & -\frac{C_{-1}}{1^2} & -\frac{C_{-2}}{1^2} & -\frac{C_{-3}}{1^2} & \ldots \\ \ldots & C_2 & C_1 & C_0 & C_{-1} & C_{-2} & \ldots \\ \ldots & -\frac{C_3}{1^2} & -\frac{C_2}{1^2} & -\frac{C_1}{1^2} & 1-\frac{C_0}{1^2} & -\frac{C_{-1}}{1^2} & \ldots \\ \ldots & -\frac{C_4}{2^2} & -\frac{C_3}{2^2} & -\frac{C_2}{2^2} & -\frac{C_1}{2^2} & 1-\frac{C_0}{2^2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

Из формулы $N = \lim\,[\Delta(\nu, \mu)(\nu-n)^2]$ при $\nu \to n$ следует, что $N = -D(\mu)$. Составим сумму всех главных частей функции $\Delta(\nu, \mu)$. Имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{N}{(\nu-n)^2} = -\frac{\pi^2 D(\mu)}{\sin^2 \pi\nu}$$

Следовательно,

$$\Delta(\nu, \mu) + \frac{\pi^2 D(\mu)}{\sin^2 \pi\nu} = G(\nu),$$

где $G(\nu)$—целая функция. Так как левая часть этого равенства остается ограниченной при $|\nu| \to \infty$, то по теореме Луивилля функция $G(\nu)$ сводится к постоянной. Полагая $\nu = i\infty$, находим $G(\nu) \equiv 1$. Принимая во внимание условие (2.3), получаем уравнение для определения величины ν

$$\sin^2 \pi\nu = \pi^2 D(\mu) \tag{2.5}$$

§ 3. Вычисление бесконечного определителя $D(\mu)$. Основная трудность заключается в раскрытии бесконечного определителя $D(\mu)$. Из условия 2° следует, что ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|C_{-m}(\mu)|}{|\nu+n|^2}$$

сходится равномерно на любом отрезке $|\mu| \leqslant r_1 < r$.

На основании теоремы Коха [4] это означает, что определитель $\Delta(\nu, \mu)$, а также $D(\mu)$ являются голоморфными функциями μ при $|\mu| < r$. Таким образом определитель $D(\mu)$ может быть разложен в степенной ряд по параметру μ, радиус сходимости которого равен радиусу сходимости ряда функции $K(\varphi, \mu)$. Легко видеть, что при вещественном μ этот ряд будет иметь вещественные коэффициенты. Итак,

$$D(\mu) = D(0) + \frac{D'(0)}{1!}\mu + \frac{D''(0)}{2!}\mu^2 + \ldots \tag{3.1}$$

Вычислить коэффициенты разложения $D(\mu)$ в общем случае произвольной функции $K(\varphi, \mu)$, подчиненной только двум условиям 1° и 2°, оказывается затруднительным. Рассмотрим три частных случая.

1. Функция $K(\varphi, \mu)$ имеет вид

$$K(\varphi, \mu) = a + \mu f(\varphi, \mu) \tag{3.2}$$

где a — постоянная, а $f(\varphi, \mu)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям 1° и 2°. В этом случае разложения коэффициентов Фурье функции $K(\varphi, \mu)$ будут

$$P_0 = a + \sum_{m=1}^{\infty} p_{om}\mu^m, \qquad P_n = \sum_{m=1}^{\infty} p_{nm}\mu^m, \qquad Q_n = \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}\mu^m$$

Вычисляем коэффициенты ряда (3.1). Постоянный член равен

$$D(0) = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1-\frac{a}{1^2} & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & a & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & 1-\frac{a}{1^2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = a\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a}{n^2}\right)^2 = \frac{\sin^2 \pi\sqrt{a}}{\pi^2}$$

Дифференцируя определитель по строкам, имеем

$$D'(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1-\frac{a}{(n-1)^2} & 0 & & \ldots \\ \ldots & -\frac{1/2\,(p_{11}-iq_{11})}{n^2} & -\frac{p_{01}}{n^2} & -\frac{1/2\,(p_{11}+iq_{11})}{n^2} & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & 1-\frac{a}{(n+1)^2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-p_{01}}{n^2-a}\prod_{k=1}^{\infty} a\left(1-\frac{a}{k^2}\right)^2 = p_{01}\frac{\sin 2\pi\sqrt{a}}{2\pi\sqrt{a}}$$

В этих вычислениях были использованы формулы

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right),\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2-a}=-\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg}\pi\sqrt{a}$$

Производная $D''(0)$ состоит из суммы определителей, у которых продифференцирована одна строка дважды, и двойной суммы определителей, у которых продифференцированы две строки по одному разу. Аналогичным образом вычисляется производная $D'''(0)$. Заметим, что для вычисления производной $D^{(n)}(0)$ приходится вычислять n-кратные суммы, что весьма осложняет вычисления.

Итак, имеем следующее разложение для $D(\mu)$ с точностью до μ^3:

$$D(\mu)=\frac{\sin^2\pi\sqrt{a}}{\pi^2}+\frac{\sin 2\pi\sqrt{a}}{2\pi\sqrt{a}}\,p_{01}\mu+$$

$$+\frac{\sin 2\pi\sqrt{a}}{2\pi\sqrt{a}}\left[p_{02}+\frac{1}{2}p_{01}^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg}2\pi\sqrt{a}-\frac{1}{2a}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_{k1}^2+q_{k1}^2}{k^2-4a}\right]\mu^2+$$

$$+\frac{\sin 2\pi\sqrt{a}}{2\pi\sqrt{a}}\left\{p_{03}+p_{01}p_{02}\left(\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg}2\pi\sqrt{a}-\frac{1}{2a}\right)-\right.$$

$$-\frac{p_{01}^3}{4a}\left(\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg}2\pi\sqrt{a}-\frac{1}{2a}+\frac{2}{3}\pi^2\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_{k1}p_{k2}+q_{k1}q_{k2}}{k^2-4a}+$$

$$+\frac{1}{3}p_{01}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_{k1}^2+q_{k1}^2}{k^2-4a}\left[\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg}2\pi\sqrt{a}-\frac{k^2-12a}{2a(k^2-4a)}\right]+$$

$$+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}''\frac{k^2+km+m^2-12a}{(k^2-4a)(m^2-4a)[(k+m)^2-4a]}\left[p_{k+m,1}(p_{k1}^2-q_{k1}^2)+\right.$$

$$\left.\left.+2p_{k1}q_{k1}q_{k+m,1}-p_{01}(p_{k+m,1}^2+q_{k+m,1}^2)\right]\right\}\mu^3+\ldots \qquad (3.3)$$

Здесь в последней сумме штрихи указывают, что при суммировании по m пропускаются $m=0,-k$.

В полученном разложении коэффициент при μ^n содержит бесконечные суммы до кратности $n-1$ включительно.

2. Функция $K(\varphi,\mu)$ более частного вида:

$$K(\varphi,\mu)=F(\mu\cos\varphi,\ \mu\sin\varphi) \qquad (3.4)$$

Для этой функции достаточно потребовать, чтобы выполнялось условие 1°; условие 2° следует из него.

Это становится очевидным, если рассматривать функцию F как функцию двух переменных $u=\mu\cos\varphi$ и $v=\mu\sin\varphi$. Эта функция разлагается в двойной ряд по целым степеням u и v внутри круга радиуса r с центром в начале координат. Из существования производных любого порядка от функции F по u и v внутри этого круга следует существование производных любого порядка от F по φ, что является достаточным для выполнения условия 2°.

Покажем, что коэффициенты Фурье являются четными или нечетными функциями μ в зависимости от четности или нечетности индекса коэффициентов. Имеем

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\mu\cos\varphi,\ \mu\sin\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi$$

Заменим в обеих частях μ на $-\mu$ и произведем подстановку $\varphi=\psi+\pi$. Получим

$$P_n(-\mu)=\frac{(-1)^n}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\mu\cos\psi,\ \mu\sin\psi)\cos n\psi\, d\psi=(-1)^n P_n(\mu)$$

Аналогичная формула имеет место для Q_n.

Разлагая функцию $F(\mu\cos\varphi,\ \mu\sin\varphi)$ в ряд по $\mu\cos\varphi$ и $\mu\sin\varphi$ и заменяя степени $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ через косинусы и синусы кратных дуг, замечаем, что ряды для $P_n(\mu)$ и $Q_n(\mu)$ начинаются с члена, содержащего μ^n. Таким образом имеем

$$P_n(\mu)=\sum_{m=n}^{\infty} p_{nm}\mu^m,\quad Q_n(\mu)=\sum_{m=n}^{\infty} q_{nm}\mu^m,$$

причем $p_{nm}=0$, $q_{nm}=0$, если $n+m$ — нечетное число.

Итак, разложение функции $F(\mu\cos\varphi,\ \mu\sin\varphi)$ по степеням параметра μ имеет вид

$$F(\mu\cos\varphi,\mu\sin\varphi)=a+(p_{11}\cos\varphi+q_{11}\sin\varphi)\mu+(p_{02}+p_{22}\cos 2\varphi+q_{22}\sin 2\varphi)\mu^2+$$
$$+(p_{13}\cos\varphi+q_{13}\sin\varphi+p_{33}\cos 3\varphi+q_{33}\sin 3\varphi)\mu^3+\ldots$$

здесь обозначено $a=p_{00}$.

Рассмотрим определитель $D(\mu)$, который соответствует $F(\mu\cos\varphi,\ \mu\sin\varphi)$. Элементы этого определителя, стоящие на пересечении строк и столбцов с четной суммой индексов, являются четными функциями, а с нечетной суммой индексов — нечетными функциями μ. Докажем, что $D(\mu)$ — четная функция от μ. Для этого рассмотрим конечный определитель $2m+1$ порядка $D_m(\mu)$, элементы которого обладают тем же свойством. Известно, что величина определителя равна сумме произведений вида

$$\pm b_{-m,\,r_1}(\mu)\, b_{-m+1,\,r_2}(\mu)\ldots b_{m,\,r_{2m+1}}(\mu)$$

Общая сумма индексов всех множителей такого произведения равна нулю. Следовательно, в каждом произведении имеется непременно четное число множителей, у которых сумма их собственных индексов равна нечетному числу. Это доказывает, что каждое такое произведение, а следовательно, и весь определитель $D_m(\mu)$ является четной функцией μ. В пределе, при $m\to\infty$, это свойство, очевидно, сохраняется. Переходя к разложению определителя $D(\mu)$ по степеням μ, заметим, что в данном случае n-кратные суммы используются для вычисления $2n$-ой производной $D^{(2n)}(0)$. Это позволило довести разложение $D(\mu)$ до членов с μ^4:

$$D(\mu)=\frac{\sin^2\pi\sqrt{a}}{\pi^2}+\frac{\sin 2\pi\sqrt{a}}{2\pi\sqrt{a}}\left[p_{02}+\frac{p_{11}^2+q_{11}^2}{2(1-4a)}\right]\mu^2+$$
$$\frac{\sin 2\pi\sqrt{a}}{2\pi\sqrt{a}}\left[p_{04}+\frac{p_{11}p_{13}+q_{11}q_{13}}{1-4a}+\frac{3}{8}\,\frac{p_{22}(p_{11}^2-q_{11}^2)+2p_{11}q_{11}q_{22}}{(1-a)(1-4a)}+\frac{p_{22}^2+q_{22}^2}{8(1-a)}+\right.$$
$$+\frac{1}{2}p_{02}^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg}2\pi\sqrt{a}-\frac{1}{2a}\right)+\frac{p_{02}(p_{11}^2+q_{11}^2)}{2(1-4a)}\left(\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg}2\pi\sqrt{a}-\frac{1}{2a}+\frac{4}{1-4a}\right)+$$

$$+\frac{(p_{11}^2+q_{11}^2)^2}{8(1-4a)^2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg}2\pi\sqrt{a}-\frac{1}{2a}+\frac{4}{1-4a}+\frac{9}{4(1-a)}\right)\Bigg]\mu^4+\ldots \tag{3.5}$$

Отметим, что коэффициенты полученного разложения $D(\mu)$ состоят из конечного числа членов.

3. Функция $K(\varphi)$ не зависит от параметра. Тогда эта функция должна удовлетворять только условию 2°. Введем параметр μ следующим образом:

$$K_0(\varphi, \mu) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(P_n\cos n\varphi + Q_n\sin n\varphi)\mu^n \tag{3.6}$$

Функция $K_0(\varphi, \mu)$ по своей структуре является частным случаем функции $F(\mu\cos\varphi, \mu\sin\varphi)$. При этом

$$p_{nn} = P_n, \qquad q_{nn} = Q_n \tag{3.7}$$

а коэффициенты с разными индексами равны нулю.

Из условия 2° следует, что степенной ряд в правой части равенства (3.6) сходится при $\mu = 1$. Следовательно, разложение определителя D_0 для функции $K(\varphi)$ получим, если в формуле (3.5) положим $\mu = 1$, а коэффициенты заменим по формулам (3.7). Имеем

$$D_0 = \frac{\sin^2\pi\sqrt{P_0}}{\pi^2} + \frac{\sin 2\pi\sqrt{P_0}}{4\pi(1-4P_0)\sqrt{P_0}}(P_1^2+Q_1^2) +$$

$$+\frac{\sin 2\pi\sqrt{P_0}}{16\pi\sqrt{P_0}}\left\{\frac{(P_1^2+Q_1^2)^2}{(1-4P_0)^2}\left[\frac{\pi}{\sqrt{P_0}}\operatorname{ctg}2\pi\sqrt{P_0}-\frac{1}{2P_0}+\frac{4}{1-4P_0}+\frac{9}{4(1-P_0)}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{3[P_2(P_1^2-Q_1^2)+2P_1Q_1Q_2]}{(1-P_0)(1-4P_0)}+\frac{P_2^2+Q_2^2}{1-P_0}\right\}+\ldots \tag{3.8}$$

Будем считать, что порядок малости коэффициентов P_n и Q_n определяется индексом n. Так как разложение (3.8) вычислено с точностью до членов 4-го порядка, то практическое применение его возможно, очевидно, только при малых коэффициентах P_n и Q_n (не считая P_0), достаточно быстро убывающих с ростом индекса n.

Для уравнения, которое может быть приведено к виду

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2}+\left(P_0+\sum_{n=1}^{\infty}P_n\cos n\varphi\right)z=0$$

Хиллом [2] дано разложение определителя D_0 с точностью до членов 6-го порядка.

При вычислении разложений (3.3) и (3.5) были использованы суммы

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n^2-a)[(n+k)^2-a]} = -\frac{2\pi}{(k^2-4a)\sqrt{a}}\operatorname{ctg}\pi\sqrt{a}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n^2-a)[(n+k)^2-a][(n+k+s)^2-a]} = -\frac{2\pi\operatorname{ctg}\pi\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\,\frac{k^2+ks+s^2-12a}{(k^2-4a)(s^2-4a)[(k+s)^2-4a]}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n^2-a)[(n+k)^2-a]} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg}\pi\sqrt{a}\left[\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg}2\pi\sqrt{a}-\frac{1}{2a}\right]$$

(Штрих указывает, что при суммировании по k пропускается $k=0$)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n^2-a)\,[(n+k)^2-a]\,[(n+k+s)^2-a)} =$$

$$= \frac{2\pi \operatorname{ctg} \pi \sqrt{a}}{\sqrt{a}\,(s^2-4a)} \left[\frac{\pi}{\sqrt{a}} \operatorname{ctg} 2\pi \sqrt{a} - \frac{s^2-12a}{2a\,(s^2-4a)} \right]$$

(Штрихи указывают, что при суммировании по k пропускаются $k=0,\ -s$)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}''' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n^2-a)\,[(n+1)^2-a]\,[(n+k)^2-a]\,[(n+k+1)^2-a]} =$$

$$= \frac{4\pi \operatorname{ctg} \pi \sqrt{a}}{(1-4a)^2 \sqrt{a}} \left[\frac{\pi}{\sqrt{a}} \operatorname{ctg} 2\pi \sqrt{a} - \frac{1}{2a} + \frac{4}{1-4a} + \frac{9}{4\,(1-a)} \right]$$

(Штрихи указывают, что при суммировании по k пропускаются $k=-1,\ 0,\ 1$)

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n^2-a)\,[(n+k)^2-a]\,[(n+k+s)^2-a]} =$$

$$= \frac{3\pi \operatorname{ctg} \pi \sqrt{a}}{2a \sqrt{a}} \left[\frac{\pi}{\sqrt{a}} \operatorname{ctg} 2\pi \sqrt{a} - \frac{1}{2a} + \frac{2\pi^2}{3} \right]$$

(Штрихи указывают, что при суммировании по k пропускаются $k=0,\ -s$, а при суммировании по s пропускается $s=0$)

Первая, вторая и пятая суммы впервые были вычислены Хиллом.

§ 4. Характеристические числа и их свойства. Для определения устойчивости движения, по отношению к которому уравнение (1.1) является уравнением первого приближения для возмущенного движения, нужно уметь находить характеристические числа функции $x(\varphi)$. Согласно формуле (1.2) функция $x(\varphi)$ является произведением двух функций. Ляпуновым [1] доказано предложение: характеристическое число произведения двух функций равно сумме характеристических чисел этих функций, если одна из них такова, что сумма характеристических чисел самой функции и обратной ей функции равна нулю. Как показал Ляпунов, функция вида $\exp\{-tf(t)\}$ обладает этим свойством, если $f(t)$ стремится к пределу при $t \to \infty$. В этом случае $\lim f(t)$ при $t \to \infty$ является характеристическим числом функции.

Разложим $A(\varphi)$ в ряд Фурье и пусть A_0 будет постоянным членом этого ряда, не зависящим от φ. Нетрудно сообразить, что функция $\exp\left\{-\frac{1}{2}\int A d\varphi\right\}$ является функцией указанного выше вида и что ее характеристическое число равно $^1/_2\, A_0$.

Функция $z(\varphi)$ является решением уравнения (1.3). Из формулы (2.1) видно, что характеристические числа независимых решений этого уравнения равны $\operatorname{Im} \nu$. Как известно, уравнение с периодическими коэффициентами принадлежит к числу правильных в смысле Ляпунова систем. Из свойств таких систем следует, что для уравнения (1.3), не имеющего члена с первой производной, сумма характеристических чисел независимых решений равна нулю. Следовательно, эти два числа будут отличаться только знаком.

Обозначим характеристические числа независимых решений уравнения (1.1) через χ. Имеем

$$\chi = \frac{1}{2} A_0 + \operatorname{Im} \nu \qquad (4.1)$$

Пусть коэффициенты уравнения (1.1), а следовательно, и уравнения (1.3) являются функциями некоторых вещественных параметров α_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Будем считать, что в определенных пределах изменения параметров функция $K(\varphi, \alpha_s)$ имеет первые производные по этим параметрам. В тех случаях, когда первая производная обращается в нуль, предполагаем существование производных более высокого порядка до наинизшей, не обращающейся в нуль производной. Это требование, налагаемое на функцию $K(\varphi, \alpha_s)$, заменяет условие 1°. Условие 2° оставляем в силе в указанных пределах изменения параметров. Тогда бесконечный определитель D также будет функцией параметров α_s, имеющей первые производные (а в упомянутых случаях и производные более высокого порядка) по этим параметрам.

Исследуем некоторые свойства характеристических чисел, определяемых формулой (4.1), рассматривая их как функцию параметров α_s. Наряду с χ будем рассматривать бесконечный определитель D тоже как функцию тех же параметров.

Из формулы (2.5) следует, что $\operatorname{Im} \nu = 0$, если

$$0 \leqslant D(\alpha_s) \leqslant \frac{1}{\pi^2} \tag{4.2}$$

Следовательно, в этой полосе независимые решения уравнения (1.1) имеют равные характеристические числа. На границах этой полосы в точках, определяемых равенствами

$$D(\alpha_s) = 0, \quad D(\alpha_s) = \frac{1}{\pi^2}$$

происходит расщепление или слияние характеристических чисел.

Пусть $\nu = \nu_1 + i\nu_2$. Легко показать, что $\nu_1 = n$, если $D(\alpha_s) \leqslant 0$, и $\nu_1 = n + {}^1/_2$, если $D(\alpha_s) \geqslant 1/\pi^2$, где n—целое число.

Исследуем поведение производной $\partial\chi / \partial\alpha_s$ в точках кривой $D = D(\alpha_s)$, принадлежащих границе указанной полосы. Имеем

$$\frac{\partial\chi}{\partial\alpha_s} = \frac{1}{2}\frac{\partial A_0}{\partial\alpha_s} + \operatorname{Im}\frac{\partial\nu}{\partial\alpha_s}$$

Дифференцируя равенство (2.5), получим

$$\frac{\partial\nu}{\partial\alpha_s} = \frac{\partial D}{\partial\alpha_s}\frac{\pi}{\sin 2\pi\nu} \tag{4.3}$$

Если, следуя по кривой $D = D(\alpha_s)$, приближаться к одной из границ полосы (4.2) изнутри, то на границе будем иметь

$$\frac{\partial\chi}{\partial\alpha_s} = \frac{1}{2}\frac{\partial A_0}{\partial\alpha_s}$$

Теперь будем приближаться по кривой $D = D(\alpha_s)$ к границе полосы (4.2) извне. Легко показать, что тогда

$$\lim_{\nu_2 \to 0} \frac{1}{\sin 2\pi\nu} = \pm i\infty$$

Возможны три случая.

а) Производная $\partial D / \partial\alpha_s \neq 0$. Кривая $D = D(\alpha_s)$ пересекает одну из границ полосы (4.2), не касаясь ее. В этом случае

$$\frac{\partial\chi}{\partial\alpha_s} = \pm\infty \tag{4.4}$$

Геометрически это означает, что касательная к двойной ветви в точке разветвления параллельна оси ординат (фиг. 1,a).

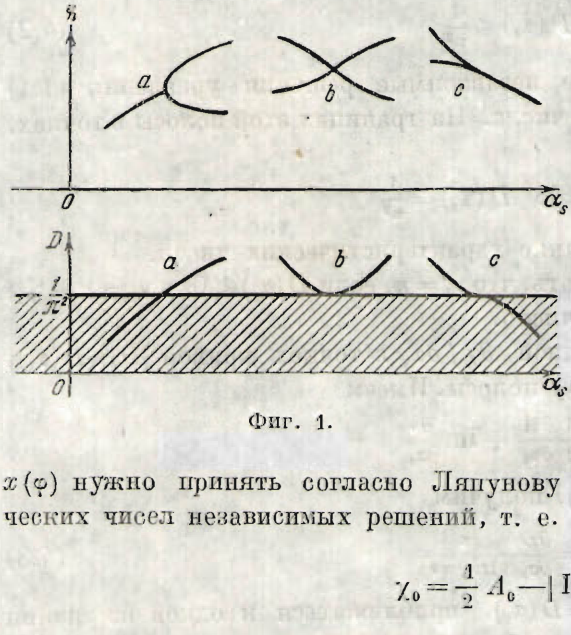
b) Производная $\partial D / \partial \alpha_s = 0$, а низшая, не обращающаяся в нуль производная четного порядка. Кривая $D = D(\alpha_s)$ имеет или минимум на верхней границе полосы (4.2), или максимум на нижней. Раскрывая неопределенность в формуле (4.3) по правилу Лопиталя, получим

$$\frac{\partial \chi}{\partial \alpha_s} = \frac{1}{2} \frac{\partial A_0}{\partial \alpha_s} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha_s{}^2} \right|} \tag{4.5}$$

Следовательно, минимум кривой $D = D(\alpha_s)$ на верхней границе полосы или максимум на нижней соответствует точке пересечения двух ветвей кривой χ под некоторым углом (фиг. 1,b). В частном случае, при $\partial^2 D / \partial \alpha_s{}^2 = 0$ пересекающиеся ветви кривой χ имеют в точке пересечения общую касательную.

с) Производная $\partial D / \partial \alpha_s = 0$, а низшая, не обращающаяся в нуль производная нечетного порядка. Кривая $D = D(\alpha_s)$ пересекает одну из границ полосы, касаясь в то же время ее. В этом случае

$$\frac{\partial \chi}{\partial \alpha_s} = \frac{1}{2} \frac{\partial A_0}{\partial \alpha_s} \tag{4.6}$$



Фиг. 1.

Следовательно, в соответствующей точке разветвления кривой χ обе ветви имеют общую касательную (фиг. 1, c).

Переходим к определению характеристического числа общего решения уравнения (1.1), т. е. функции $x(\varphi)$. За характеристическое число функции $x(\varphi)$ нужно принять согласно Ляпунову наименьшее из двух характеристических чисел независимых решений, т. е.

$$\chi_0 = \frac{1}{2} A_0 - |\operatorname{Im} \nu| \tag{4.7}$$

Этому характеристическому числу соответствует нижняя ветвь кривой χ.

По известным теоремам Ляпунова и Четаева [5] о правильных системах знак характеристического числа решения уравнения первого приближения определяет устойчивость или неустойчивость невозмущенного движения системы. В случае, когда характеристическое число равно нулю, требуется дополнительное исследование. Напомним, что по определению Ляпунова положительный знак характеристического числа соответствует устойчивости.

Из формулы (4.7) видно, что максимальное значение характеристического числа решения уравнения (1.1) определяется величиной A_0, т. е. средним значением за период коэффициента $A(\varphi)$. При изменении периодических членов коэффициента $A(\varphi)$, а также при изменении коэффициента $B(\varphi)$ характеристическое число χ_0 может меняться в пределах $-\infty < \chi_0 \leqslant {}^1/_2\, A_0$.

Таким образом неравенство $A_0 > 0$ является необходимым (но не достаточным) условием устойчивости движения системы, по отношению к которой (1.1) является уравнением возмущенного движения первого приближения.

Порядок вычисления характеристических чисел следующий. После приведения уравнения (1.1) к виду (1.3) вычисляем определитель $D(\mu)$ по одной из формул (3.3), (3.5) или (3.8) в зависимости от вида коэффициента K. Затем по формуле (2.5) находим ν и, наконец, определяем характеристическое число по формуле (4.7).

§ 5. Пример. Маховое движение лопасти несущего винта. В качестве примера рассмотрим устойчивость махового движения лопасти несущего винта геликоптера или автожира. Предположим, что несущий винт радиуса R, имеющий постоянную угловую скорость вращения Ω, движется с постоянной поступательной скоростью V под углом атаки α. Пусть каждая лопасть несущего винта крепится к втулке при помощи одного горизонтального шарнира, ось которого пересекается с осью втулки. Обозначим через β угол взмаха лопасти, а через ψ угол азимута лопасти. Тогда уравнение махового движения будет

$$\frac{d^2\beta}{d\psi^2}+\gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\mu\sin\psi\right)\frac{d\beta}{d\psi}+\left[1+\gamma\mu\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\mu\sin\psi\right)\cos\psi+\right.$$
$$\left.+h\gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\mu\sin\psi+\frac{1}{2}\mu^2\sin^2\psi\right)\right]\beta=f(\psi) \tag{5.1}$$

где $f(\psi)$ — известная периодическая функция ψ. Частное периодическое решение этого уравнения с правой частью определяет маховое движение лопасти при установившемся режиме полета.

Уравнением возмущенного движения лопасти служит уравнение (5.1) без правой части. Коэффициенты этого уравнения зависят от трех безразмерных параметров. Выясним значение каждого из них.

Параметр μ характеризует режим полета аппарата:

$$\mu=\frac{V\cos\alpha}{\Omega R}$$

Величина μ возрастает с увеличением скорости полета. При висении, вертикальном подъеме и спуске $\mu=0$. На практике величина параметра μ меняется от 0 до 0.5.

Параметр γ называется массовой характеристикой лопасти. Величина его равна

$$\gamma=\frac{a\rho cR^4}{2I_1}$$

где $a=dc_y/d\alpha$ профиля лопасти при бесконечном удлинении, ρ — плотность воздуха, c — хорда лопасти, I_1 — момент инерции лопасти относительно горизонтального шарнира. Для построенных лопастей γ имеет порядок 2—8, причем наблюдается тенденция к применению тяжелых лопастей, т. е. к уменьшению γ.

Параметр h называется коэффициентом регулятора шага. Угол установки лопасти Θ связывается с углом взмаха β механизмом, который для малых углов дает соотношение

$$\Theta=\Theta_0+\Theta_1\cos\psi+\Theta_2\sin\psi-h\beta$$

Величина h принимает значения от 0 (отсутствие регулятора шага) до 0.5 и даже до 1.

Задача об устойчивости махового движения лопасти при $h=0$ была впервые поставлена Адамом [6], который путем численного интегрирования уравнения махового движения лопасти при $\gamma=6$ и $\mu=1$ определил корни характеристического уравнения s, связанные простым соотношением с характеристическими числами

$$\chi = -\frac{\ln|s|}{2\pi}.$$

Дальнейший шаг был сделан в 1937 г. А. Н. Михайловым [1], составившим уравнение (5.1) и подсчитавшим корни характеристического уравнения еще при трех комбинациях параметров.

Исследуем устойчивость махового движения лопасти во всей практически интересной области изменения параметров μ, γ и h. Сделаем замену переменного согласно формуле (1.2)

$$\beta = W \exp\left(-\frac{1}{8}\gamma\psi + \frac{1}{6}\gamma\mu\cos\psi\right)$$

Получаем

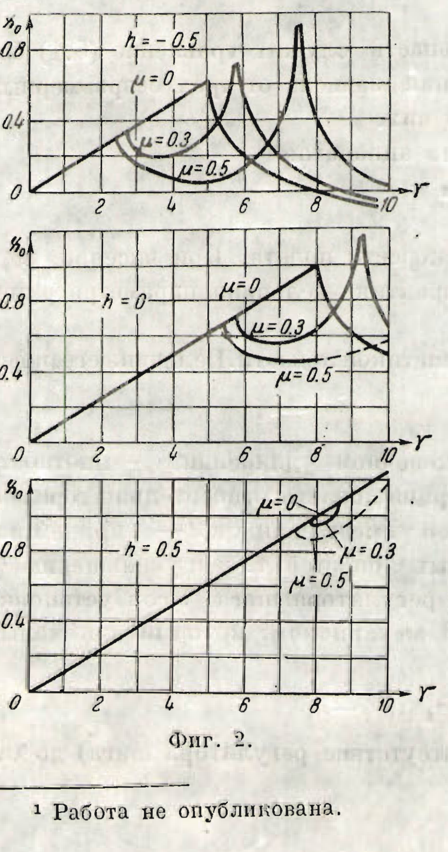
$$\frac{d^2W}{d\psi^2} + \left\{1 - \frac{1}{64}\gamma^2 + \frac{1}{4}h\gamma + \left[\frac{1}{6}\gamma\cos\psi + \left(\frac{2}{3}h\gamma - \frac{1}{24}\gamma^2\right)\sin\psi\right]\mu + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{1}{4}h\gamma - \frac{1}{72}\gamma^2 - \left(\frac{1}{4}h\gamma - \frac{1}{72}\gamma^2\right)\cos 2\psi + \frac{1}{4}\gamma\sin 2\psi\right]\mu^2\right\} W = 0 \qquad (5.2)$$

Выберем за основной малый параметр величину μ. Коэффициент $K(\psi, \mu)$ при W является полиномом от $\mu\cos\psi$ и $\mu\sin\psi$. Следовательно, соответствующий определитель $D(\mu)$ является целой функцией μ. Для вычисления $D(\mu)$ может быть использовано разложение (3.5). Характеристические числа $\beta(\psi)$ определяются по формуле

$$\chi = \frac{1}{8}\gamma - |\operatorname{Im}\nu| \qquad (5.3)$$

В произведенных расчетах величина параметра γ менялась от 0 до 10, параметра μ — от 0 до 0.5. Для коэффициента регулятора шага взяты значения: $h=-0.5$, 0, 0.5, 1.0. Результаты расчетов показаны на фиг. 2, где даны значения характеристических чисел χ по параметру γ. При больших значениях γ и μ число членов разложения $D(\mu)$ оказывается недостаточным. Кривые на этих участках проведены пунктиром. Для $h=1{,}0$ графика не дано, так как при всех μ, включая $\mu=0.5$, получается прямая линия.

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы.



Фиг. 2.

[1] Работа не опубликована.

1. Во всей практически интересной области изменения параметров маховое движение лопасти оказывается устойчивым.

2. Максимально возможное значение характеристического числа равно $\gamma/8$. Таким образом для легких лопастей может быть достигнута более высокая степень устойчивости, чем для тяжелых лопастей.

3. При малых значениях γ существует область, в которой параметры μ и h (изменяемые в определенных пределах) не оказывают влияния на устойчивость. Это происходит потому, что при $\gamma \to 0$ все периодические члены коэффициента при W стремятся к нулю, а постоянный член стремится к единице. Следовательно, при малых γ колебания этого коэффициента невелики и устойчивость системы не отличается от устойчивости системы с постоянными коэффициентами, равными средним значениям коэффициентов за период. Таким образом применение регулятора шага для тяжелых лопастей (с малыми значениями γ) оказывается с точки зрения устойчивости махового движения лопасти излишним.

4. При больших γ увеличение параметра μ ухудшает устойчивость. При еще бóльших значениях γ ухудшение устойчивости проявляется и при $\mu = 0$. Применением регулятора шага можно компенсировать это ухудшение и добиться получения максимально возможной устойчивости, отвечающей данному значению γ.

Поступила в редакцию
20 III 1945

Институт Механики
Академии Наук СССР

A. P. PROSKURYAKOV.—CHARACTERISTIC NUMBERS OF THE SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

The paper presents a procedure for the calculation of characteristic numbers of the solution of an equation (1.1), whose coefficients are dependent upon a small parameter μ. This equation is reduced to the form (1.3) by means of the substitution (1.2). Coefficients $K(\varphi, \mu)$ are assumed to satisfy the following conditions:

1°. Coefficients $K(\varphi, \mu)$ can be expanded into a power series of μ, convergent for $|\mu| < r$ and any value of φ.

2°. Coefficients $K(\varphi, \mu)$ can be expanded into a convergent Fourier series, provided

$$\sum_{n=1}^{\infty} (P_n^2 + Q_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

is convergent for $|\mu| < r$.

The solution of equation (1.3) is sought in the form (2.1) by the Hill method, employing infinite determinants. Expression (2.5) yields the value of ν by means of the infinite determinant $D(\mu)$, elements of which depend on the Fourier coefficients of function $K(\varphi, \mu)$ according to (2.4). The expansion of $D(\mu)$ into a series is given for three particular cases:

1. If function $K(\varphi, \mu)$ has the form (3.2), the result is the expansion (3.3).

2. If function $K(\varphi, \mu)$ has the form (3.4), the result is the expansion (3.5). This case is the most interesting, as the coefficients are obtained in finite form.

3. If function $K(\varphi)$ is independent of parameter, the case may be reduced to that given in 2; the result being the expansion (3.8).

On the basis of the Liapounoff theorems, expression (4.1) for the characteristic numbers of the independent solutions of equation (1.1) are obtained. Magnitude A_0 is the mean value of coefficient A within the period.

Further, the behaviour of the characteristic numbers as functions of parameters α_s is analyzed. It is found in particular that at the branch points of the characteristic numbers derivative $\partial\chi / \partial\alpha_s$ tends towards infinity, if $\partial D / \partial\alpha_s \neq 0$ (fig. 1.)

Formula (4.7) yields the characteristic number for function $x(\varphi)$. The necessary condition of stability is expressed by the inequality $A_0 > 0$.

The stability of blade flapping of a helicopter rotor is taken as an example. Here the coefficients in the equation of motion are dependent on three parameters: h, γ and μ. Curves for the characteristic numbers of function $\beta(\psi)$ are plotted in fig. 2 for various combinations of parameters. It is established that the blade flapping is stable throughout the practical range of variation of the parameters. The coefficient of the regulator of the blade pitchas no practical effect on stability when $\gamma > 4$,

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935. (A. Liapounoff. Annales de Toulouse. 1907. S. 2. T. IX.)
2. Hill G. W. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. Acta Mathematica. T. VIII. 1886. P. 1—36.
3. Кочин. Н. Е. О крутильных колебаниях коленчатых валов. Прикладная математика и механика. Том. II. № 1. 1934. Стр. 3—28.
4. Koch H. Sur les determinants infinis et les équations différentielles linéaires. Acta Mathematica. T. XVI. 1892. P. 217—295. (См. также: Riesz F. Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris. 1913. Каган В. Ф. Основания теории определителей. Одесса. 1922.)
5. Четаев Н. Г. Теорема о неустойчивости для правильных систем. Прикладная математика и механика. 1944. Том VIII. Вып. 4. Стр. 323—326.
6. Adam P. Sobre la estabilidad del movimento de la palas del autogiro. Revista de Aeronautica. 1934. No. 30.