Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946

ОБ ОСВОБОЖДЕНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н. Е. Кочин

(Москва)

Приводимые в этой статье вычисления[1] были найдены среди записей Н. Е. Кочина после его смерти. При рассмотрении обнаружилось, что они содержат новый интересный для аналитической динамики результат, а именно: если возможные перемещения (в смысле Четаева [1]) для некоторой системы находятся среди возможных перемещений системы, освобожденной от части или всех связей, то движения этих систем обладают некоторыми интересными свойствами [1], отмеченные впервые еще Гауссом [2] в принципе наименьшего принуждения.

В настоящей работе Н. Е. Кочиным излагается способ освобождения, в котором геометрический смысл координат q_s не меняется. Частным случаем предлагаемого способа является способ, предложенный для линейных связей Е. А. Болотовым [3].

От редакции

1. Состояние механической системы можно описывать следующим способом. Пусть $q_1, \ldots, q_s$ лагранжевы координаты, имеющие определенный геометрический смысл, x_i, y_i, z_i декартовы координаты i-той точки системы, которые выражаются уравнениями

$$x_i = \alpha_i(t, q_1, \ldots, q_s), \ldots \tag{1}$$

и пусть, кроме того, на систему наложены еще связи, выражаемые уравнениями

$$f_j(t, q_s, q_s') = 0 \qquad (j = 1, \ldots, s-k) \tag{2}$$

которые в разрешенном относительно $q_{k+1}, \ldots, q_s$ виде пусть будут

$$q_r' = F_r(t, q_s, q_k') \qquad (r = k+1, \ldots, s) \tag{3}$$

[1] Переданные мне для подготовки к печати оставшиеся после смерти Н. Е. Кочина вычисления были изложены весьма сжато. Николай Евграфович ограничивается проведением счета для координат x и не выписывает формул для координат y, z; вместо $f(t, q_1, \ldots, q_s, q_1', \ldots, q_k')$ он употребляет сокращенную запись $f(t, q_s, q_k')$. Однако это не затрудняет чтения и все его выкладки строго сохранены при редактировании статьи. В оригинале почти не было текста, его пришлось восстановить по смыслу и из памяти об одной устной беседе с Николаем Евграфовичем в 1943 г. в Казани.

Н. Четаев

Из соотношений (1) после дифференцирования и использования уравнений связей (3) имеем

$$x_i' = a_i(t, q_s, q_k') = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_\nu} q_\nu' + \sum_{\mu=k+1}^{s} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_\mu} F_\mu(t, q_s, q_k'), \ldots \tag{4}$$

где $x_i', \ldots$ выражены через независимые скорости $q_1', \ldots, q_k'$.

Возможные перемещения такой материальной системы, при которых принципы Даламбера и Гаусса являются совместными, по определению Четаева [1] суть

$$\sigma x_i = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial a_i}{\partial q_\nu'} \sigma q_\nu, \ldots \tag{5}$$

2. Займемся теперь вопросами освобождения. Допустим, что материальная система полностью освобождена от связей (2). Пусть $\bar{\sigma} x_i, \ldots$ обозначают возможные перемещения освобожденной системы; согласно (1) имеем

$$\bar{\sigma} x_i = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_\nu} \bar{\sigma} q_\nu, \ldots \tag{6}$$

Докажем, что возможные перемещения $\sigma x_i, \ldots$ стесненной системы находятся среди возможных перемещений $\bar{\sigma} x_i, \ldots$ системы освобожденной. Действительно, для того чтобы $\sigma x_i = \bar{\sigma} x_i, \ldots$, надо удовлетворить согласно (5) и (6) равенствам

$$\sum_{\nu=1}^{k} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_\nu} + \sum_{\mu=l+1}^{s} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_\mu} \frac{\partial F_\mu}{\partial q_\nu'} \right\} \sigma q_\nu = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_\nu} \bar{\sigma} q_\nu, \ldots$$

для чего достаточно принять

$$\bar{\sigma} q_\nu = \sigma q_\nu, \qquad \bar{\sigma} q_r = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial F_r}{\partial q_\nu'} \sigma q_\nu \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, k \\ r = k+1, \ldots, s \end{pmatrix}$$

Предложение доказано.

3. Рассмотрим теперь освобождение системы от части μ связей (2) и допустим, что оставшиеся связи могут быть разрешены относительно

$$q_r' = G_r(t, q_s, q'_{k+\mu}) \qquad (r = k+\mu+1, \ldots, s) \tag{7}$$

Обозначая возможные перемещения для освобожденной системы через $\bar{\sigma} x_i, \ldots$, имеем

$$\bar{\sigma} x_i = \sum_{\nu=1}^{k+\mu} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_\nu} + \sum_{r=k+\mu+1}^{s} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_r} \frac{\partial G_r}{\partial q_\nu'} \right\} \bar{\sigma} q_\nu, \ldots$$

Докажем, что возможные перемещения $\sigma x_i, \ldots$ начальной системы находятся среди возможных перемещений $\sigma x_i, \ldots$ системы освобожденной. В самом деле, равенства $\sigma x_i = \bar{\sigma} x_i, \ldots$ будут иметь место при условиях

$$\sum_{\nu=1}^{k} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_\nu} + \sum_{r=k+1}^{s} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_r} \frac{\partial F_r}{\partial q_\nu'} \right\} \sigma q_\nu = \sum_{\nu=1}^{k+\mu} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_\nu} + \sum_{r=k+\mu+1}^{s} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_r} \frac{\partial G_r}{\partial q_\nu'} \right\} \bar{\sigma} q_\nu, \ldots$$

Чтобы эти соотношения были удовлетворены, достаточно принять

$$\bar{\sigma} q_\nu = \sigma q_\nu, \qquad \bar{\sigma} q_j = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial F_j}{\partial q_\nu} \sigma q_\nu \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, k \\ j = k+1, \ldots, \mu \end{pmatrix}$$

так как согласно (7) и (3) имеем

$$F_r(t, q_s, q_k') = G_r(t, q_s, q_k', F_{k+1}, \ldots, F_{k+\mu})$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial G_r}{\partial q_\nu'} + \sum_{j=k+1}^{k+\mu} \frac{\partial G_r}{\partial q_j'} \frac{\partial F_j}{\partial q_\nu'} = \frac{\partial F_r}{\partial q_\nu'}$$

Предложение доказано.

4. Если возможные перемещения для неосвобожденной системы находятся среди возможных перемещений освобожденной системы, то движения этих систем обладают свойствами, доказанными для общего случая Н. Г. Четаевым, а для линейных систем — Е. Махом [4] и Е. А. Болотовым [3].

Е. А. Болотов рассматривал для линейных связей освобождения, какие получаются из рассмотренного способа, если за исходные лагранжевы переменные $q_1, \ldots, q_s$ взять декартовы координаты точек x_i, y_i, z_r. Н. Г. Четаев рассматривал некоторое параметрическое освобождение, в котором даже для линейных голономных связей параметры могут менять геометрический смысл при освобождениях, и заметил, что освобождения и в общем случае возможно осуществлять по способу, аналогичному предложенному Е. А. Болотовым.

Приведем те общие предложения Н. Г. Четаева [1] о свойствах освобожденных систем, какие будут иметь место также в предложенном способе освобождения.

Обозначим через $dx_i', \ldots$ изменения скорости точки m_i за промежуток времени dt для движения действительного при связях (4), а через $\delta x_i'$ изменения этих же величин для какого-либо мыслимого в смысле Гаусса [1] движения, т. е. при предположении одинаковости для рассматриваемого момента координат $x_i, \ldots$ и скоростей $x_i', \ldots$ и действующих на систему сил $X_i, \ldots$ для действительного и любого из мыслимых движений. Из уравнений связей (4) выводим

$$dx_i' - \delta x_i' = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial a_i}{\partial q_\nu'} (dq_\nu' - \delta q_\nu'), \ldots$$

или, принимая $\sigma q_\nu = dq_\nu' - \delta q_\nu', \ldots$ из (5), имеем

$$\sigma x_i = dx_i' - \delta x_i', \ldots \tag{8}$$

Подставляя эти значения возможных перемещений (8) в принцип Даламбера

$$\sum [(m_i dx_i' - X_i dt) \sigma x_i + \ldots] = 0$$

имеем

$$\sum [(m_i dx_i' - X_i dt)(dx_i' - \delta x_i') + \ldots] = 0 \tag{9}$$

Обозначим через $\partial x_i', \ldots$ изменения скорости точки за тот же промежуток времени dt для движения действительного при освобождении системы от части связей при прежних значениях $x_i, \ldots, x_i', \ldots$ в момент t и при прежних внешних силах. Если возможные перемещения $\delta x_i, \ldots$ неосвобожденной системы находятся среди возможных перемещений системы освобожденной, то, подставляя (8) в принцип Даламбера для освобожденной системы, будем иметь

$$\sum [(m_i\, \partial x_i' - X_i\, dt)(dx_i' - \delta x_i') + \ldots] = 0$$

Вычитая это равенство из предыдущего (9), имеем

$$A_{d\delta} + A_{d\partial} - A_{\partial\delta} = 0 \tag{10}$$

где

$$A_{d\delta} = \sum m_i [(dx_i' - \delta x_i')^2 + \ldots]$$

Аналогично пишутся выражения $A_{d\partial}$ и $A_{\partial\delta}$. Величина $A_{d\delta}$ характеризует меру отклонения движения (d) от движения (δ); подобный смысл имеют величины $A_{d\partial}$ и $A_{\partial\delta}$.

Из соотношения (10) следуют два неравенства

$$A_{d\delta} < A_{\partial\delta}, \qquad A_{d\partial} < A_{\partial\delta} \tag{11}$$

последнее из которых при полном освобождении системы от всех связей представляет принцип наименьшего принуждения Гаусса.

Соотношению (10) можно придать вид

$$A_{\partial\delta} - A_{d\delta} - A_{d\partial} = A_{I-\delta,\, \partial-\delta} \tag{12}$$

N. E. KOCHIN.—RELEASE OF DYNAMIC SYSTEMS FROM CONSTRAINTS

The present calculations were found in the papers of the late N. E. Kochin. The results are felt to be not without interest to analytical mechanics. Kochin suggests a method of release of dynamic systems from constraints, in which the geometrical sense of the coordinates q_s is preserved. A particular case of the proposed method is that suggested for linear systems by E. A. Bolotov [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. О принципе Гаусса. Изв. Физ.-матем. о-ва при Казанском университете. 1932-33. Т. VI. Сер. 3, стр. 68 — 71.
2. Gauss K. F. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 14.
3. Болотов Е. А. О принципе Гаусса. Изв. Физ.-матем. о-ва при Казанском университете. 1918. стр. 108.
4. Мах Э. Механика. Историко-критический очерк ее развития. Разр. авт. пер. с 6-го испр. и доп. немецк. изд. Г. А. Котляра под ред. Н. А. Гезехуса. СПБ. 1909.
