

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ ПО РАЗМАХУ КРЫЛА В ОТКРЫТОЙ И ПОЛУОТКРЫТОЙ СТРУЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

И. А. Паничкин

(Москва)

В данной работе мы находим распределение циркуляции по размаху прямоугольного крыла в открытой (свободной) струе прямоугольного сечения. Одновременно находим и циркуляцию по размаху крыла в струе прямоугольного сечения с горизонтальными твердыми стенками и свободными боковыми (полуоткрытая струя).

При нахождении циркуляции по размаху крыла в струе пользуемся функцией Шварца^[1], отображающей прямоугольник на круг с разрезами, а также известными результатами по влиянию границ потока круглого сечения на крыло^[2].

1. Представим сечение трубы в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ прямоугольником со сторонами $2l$ и $2h$ (фиг. 1).

Функция

$$z^* = K \frac{z}{l} \quad (z^* = x^* + iy^*) \quad (1.1)$$

отображает этот прямоугольник в прямоугольник (фиг. 2) плоскости z^* со сторонами $2K$ и $K' = 2K\varepsilon$, где K — значение полного эллиптического интеграла первого рода с модулем k , причем $\varepsilon = h/l$. Модуль k представляет собой некоторую функцию от ε .

В самом деле, отношение $K'/K = 2\varepsilon$ определяет параметр $q = e^{-2\pi\varepsilon}$, а следовательно, и тэта-функции. Тогда модуль эллиптической функции будет

$$k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} = f(\varepsilon) = \sin \theta$$

Значения K , K' , k для некоторых значений ε приведены в табл. 4.

Введем эллиптическую функцию Якоби с модулем $k = f(\varepsilon)$

$$\zeta = l \operatorname{sn} z^* \quad (\zeta = \xi + i\eta) \quad (1.2)$$

которая отображает прямоугольник^[1] плоскости z^* в круг с разрезами (фиг. 3).

Пользуясь теоремой сложения и принимая во внимание соотношения

$$\operatorname{sn} iy^* = i \frac{\operatorname{sn}' y^*}{\operatorname{cn}' y^*}, \quad \operatorname{cn} iy^* = \frac{1}{\operatorname{cn}' y^*}, \quad \operatorname{dn} iy^* = \frac{\operatorname{dn}' y^*}{\operatorname{cn}' y^*}$$

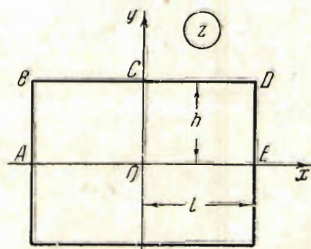
найдем соответственно действительную и мнимую части (1.2):

$$\xi = l \frac{\operatorname{sn} x^* \operatorname{dn}' y^*}{1 - \operatorname{dn}^2 x^* \operatorname{sn}'^2 y^*}, \quad \eta = l \frac{\operatorname{cn} x^* \operatorname{dn} x^* \operatorname{sn}' y^* \operatorname{cn}' y^*}{1 - \operatorname{dn}^2 x^* \operatorname{sn}'^2 y^*} \quad (1.3)$$

Знак штрих у функций означает, что эти функции отнесены к дополнительному модулю $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Полагая $y^* = \pm K'/2$ в формуле (1.3), найдем

$$\xi = l \frac{1+k}{\sqrt{k}} \frac{\operatorname{sn} x^*}{1+k \operatorname{sn}^2 x^*}, \quad \eta = \pm l \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\operatorname{cn} x^* \operatorname{dn} x^*}{1+k \operatorname{sn}^2 x^*}, \quad \xi^2 + \eta^2 = R^2$$

где $R = l/\sqrt{k}$. Значения $1/\sqrt{k}$ для некоторых ε приводим в табл. 4.



Фиг. 1.

Следовательно, горизонтальной стороне B^*D^* прямоугольника плоскости z^* соответствует полуокружность $B_1C_1D_1$ радиуса $R=l/\sqrt{k}$ (фиг. 3).

Вертикальные отрезки A^*B^* и E^*D^* , для которых $z^* = \pm K + iy^*$, $0 \leq |y^*| \leq 1/2 K'$,

Таблица 4

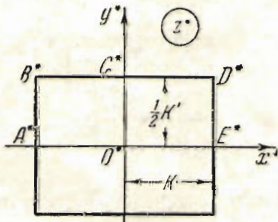
s	$10 + \lg q$	θ	k	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	K	K'
3.0	4.8138	0°00'	0	∞	1.57080	9.42480
2.5	3.1782	0°05'	0.00145	26.2605	1.57081	7.85405
2.0	4.5426	0°25'	0.00756	11.5009	1.57085	6.28340
1.5	5.9069	2°04'	0.03606	5.2659	1.57131	4.71393
1.2	6.7255	5°17'	0.09208	3.2954	1.57388	3.77731
1.0	7.2743	9°53'	0.17164	2.4140	1.58257	3.16514
0.9	7.5442	13°30'	0.23345	2.0697	1.59291	2.86724
0.8	7.8170	18°24'	0.31565	1.7799	1.61227	2.57963
0.7	8.0899	25°00'	0.42262	1.5382	1.64900	2.30860
0.6	8.3628	33°45'	0.55557	1.3416	1.71902	2.06282
0.5	8.6356	45°00'	0.70711	1.1892	1.85407	1.85407
0.4	8.9085	58°40'	0.85416	1.0821	2.12157	1.69726
0.3	9.1814	73°24'	0.95832	1.0215	2.67451	1.60471

преобразуются в отрезки действительной оси A_1B_1 и E_1D_1 , так как

$$\eta = 0, \quad \xi = \pm \frac{l}{\operatorname{dn}' y^*} \quad \left(l < |\xi| \leq \frac{l}{\sqrt{k}} \right)$$

Отрезок A^*E^* , для которого $-K \leq x^* \leq K$, $y^* = 0$, переходит в отрезок A_1E_1 , так как

$$\eta = 0, \quad \xi = l \operatorname{sn} x^* \quad (-l \leq \xi \leq l)$$



Указанные на фиг. 3 разрезы обеспечивают взаимно однозначное отображение прямоугольника на круг.

Подставляя z^* согласно (1.1) в (1.2), получим функцию Шварца

$$\zeta = l \operatorname{sn} \left(K \frac{z}{l} \right) \quad (1.4)$$

Фиг. 2.

которая отображает однозначно прямоугольник плоскости z (фиг. 1) со сторонами $2l$ и $2h$ в круг с разрезами (фиг. 3), причем отображение будет всюду конформным за исключением точек $x=l$ и $x=-l$.

Для отрезка $y=0$, $-l \leq x \leq l$ из формулы (1.4), принимая во внимание, что для этого отрезка $\xi/l = \operatorname{sn} (Kx/l)$, имеем

$$\frac{d\xi}{dx} = K \operatorname{cn} \left(K \frac{x}{l} \right) \operatorname{dn} \left(K \frac{x}{l} \right) = K \sqrt{\left(1 - \frac{\xi^2}{l^2} \right) \left(1 - k^2 \frac{\xi^2}{l^2} \right)} = \omega(\xi) \quad (1.5)$$

2. Рассмотрим прямоугольное крыло размахом $2s$ и удлинением $\lambda = 2s/t$, где t — хорда, в струе прямоугольного сечения (фиг. 1).

Пусть для этого крыла имеет место уравнение Прайдтля

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2} a_0 t V \left[x_0 + \frac{\omega(x)}{V} \right] \quad (2.1)$$

где V — скорость основного потока, $a_0 = (dC_H/da)_{\lambda=\infty}$ и $\omega(x)$ — индуктивная скорость на крыле как от вихрей самого крыла, так и от влияния границ потока.

Преобразование (1.4) переводит длину s в длину

$$s_1 = l \operatorname{sn} \left(K \frac{s}{l} \right) \quad (s_1 < l) \quad (2.2)$$

Циркуляция $\Gamma(x)$ и $\omega(x) dx$, где dx — элемент длины крыла, как известно, являются инвариантами конформного преобразования; эти величины для круглой трубы будем

Таблица 2

s	3.0	2.5	2.0	1.5	1.2	1.0	0.8	0.6	0.4
$\frac{k}{\sigma}$	0	0.00145	0.00756	0.03606	0.09208	0.17164	0.31565	0.55557	0.85416
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.1564	0.1564	0.1564	0.1564	0.1564	0.1564	0.1604	0.1707	0.2093
0.2	0.3090	0.3090	0.3090	0.3090	0.3095	0.3112	0.3164	0.3351	0.4035
0.3	0.4540	0.4540	0.4540	0.4540	0.4548	0.4565	0.4636	0.4873	0.5711
0.4	0.5878	0.5878	0.5878	0.5880	0.5885	0.5906	0.5978	0.6230	0.7067
0.5	0.7071	0.7071	0.7071	0.7073	0.7077	0.7100	0.7163	0.7388	0.8110
0.6	0.8090	0.8090	0.8090	0.8092	0.8095	0.8110	0.8163	0.8339	0.8874
0.7	0.8910	0.8910	0.8910	0.8910	0.8913	0.8923	0.8957	0.9070	0.9404
0.8	0.9511	0.9511	0.9511	0.9511	0.9512	0.9518	0.9534	0.9589	0.9747
0.9	0.9877	0.9877	0.9877	0.9877	0.9877	0.9879	0.9883	0.9897	0.9938
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

отмечать индексом 1. Уравнение (2.1) в плоскости ξ примет вид

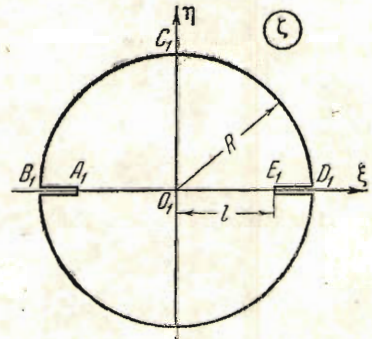
$$\Gamma_1(\xi) = \frac{1}{2} a_0 t V \left[\alpha_0 + \frac{\omega_1(\xi)}{V} \omega(\xi) \right] \quad (2.3)$$

где функция $\omega(\xi)$ определяется по формуле (1.5).

Для индуктивной скорости на крыле в струе с круглым поперечным сечением, пользуясь работой В. В. Голубева^[2], имеем

$$\omega_1(\xi) = \omega_{0i}(\xi) + \omega_{1i}(\xi)$$

$$\omega_{0i} = \frac{1}{4\pi} \int_{-s_1}^{+s_1} \frac{\Gamma_1'(u) du}{u - \xi}, \quad \omega_{1i} = \pm \frac{1}{4\pi} \int_{-s_1}^{+s} \frac{i\Gamma_1'(u) u du}{R^2 - \xi u} \quad (2.4)$$



Фиг. 3.

где знак плюс соответствует открытой струе круглого сечения, а знак минус — закрытой.

Рассматривая граничные условия, можно показать, что если прямоугольная струя открытая, то для струи с круглым сечением в формуле (2.4) надо брать знак плюс. Если же прямоугольная струя есть струя с горизонтальными твердыми стенками и боковыми свободными, то в формуле (2.4) надо брать знак минус.

Введем обозначения

$$\frac{\xi}{s_1} = \xi', \quad \omega(\xi) = \omega_1(\xi'), \quad \Gamma_1(\xi) = \Gamma_2(\xi'), \quad \frac{\Gamma_2(\xi')}{4\pi V s_1 a_0} = \Gamma_3(\xi')$$

$$\frac{s}{l} = \sigma, \quad s_1 = \sigma_1, \quad \frac{s_1}{R} = \sqrt{k} \sigma_1, \quad \mu = \frac{4\pi \lambda_1}{a_0} \approx 2\lambda_1, \quad \lambda_1 = \lambda \frac{\sigma_1}{\sigma}$$

Значения $\sigma_1 = \text{sn}(K\sigma)$ для некоторых σ и λ приведены в табл. 2.

В этих обозначениях уравнение (2.3) после подстановки (2.4) примет вид

$$\mu \Gamma_3(\xi) = 1 + \omega_1(\xi) \int_{-1}^{+1} \frac{d\Gamma_3(u)}{du} \left(\frac{1}{u - \xi} \pm \frac{k\sigma_1^2 u}{1 - k\sigma_1^2 \xi u} \right) du \quad (2.5)$$

где штрихи в обозначениях для простоты записи опущены.

Вводя функцию $F(\xi) = \mu \Gamma_3(\xi) - 1$, уравнение (2.5) приведем к виду

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dF(u)}{du} \left(\frac{1}{u-\xi} \pm \frac{k\sigma_1^2 u}{1-k\sigma_1^2 \xi u} \right) du = \mu \frac{F(\xi)}{\omega_1(\xi)} \quad (2.6)$$

Далее, обозначая в уравнении (2.6)

$$\xi = -\cos \varphi, \quad u = -\cos \psi, \quad F(\xi) = G(\varphi), \quad \omega_1(\xi) = \omega_2(\varphi) \quad (2.7)$$

получим

$$\mu \frac{G(\varphi)}{\omega_2(\varphi)} + \int_0^\pi \frac{dG(\psi)}{d\psi} \left(\frac{1}{\cos \psi - \cos \varphi} \pm \frac{k\sigma_1^2 \cos \psi}{1 - k\sigma_1^2 \cos \varphi \cos \psi} \right) d\psi = 0 \quad (2.8)$$

Таблица 3

$\nu \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.50000	0.37500	0.31250	0.27344	0.24609	0.22559	0.20947	0.19608
1		0.42500	0.45625	0.46406	0.46406	0.46113	0.45710	0.45274
2			0.03125	0.05469	0.07031	0.08057	0.08728	0.09164
3				0.00781	0.01758	0.02686	0.03491	0.04166
4					0.00195	0.00537	0.00952	0.01389
5						0.00049	0.00159	0.00320
6							0.00012	0.00046
7								0.00003

Решение уравнения (2.8) будем искать в виде

$$G(\varphi) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} G_n \sin(2n+1)\varphi \quad (2.9)$$

Подставив решение (2.9) в уравнение (2.8), придем к вычислению следующих интегралов:

$$J_1 = \int_0^\pi \frac{G'(\psi) d\psi}{\cos \psi - \cos \varphi} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) G_n p_n(\varphi), \quad p_n(\varphi) = \frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin \varphi}$$

$$J_2 = \int_0^\pi \frac{G'(\psi) \cos \psi d\psi}{1 - k\sigma_1^2 \cos \varphi \cos \psi} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) G_n \sum_{m=0}^{\infty} k^m \sigma_1^{2m} \cos^m \varphi \int_0^\pi \cos(2n+1)\psi \cos^{m+1} \psi d\psi$$

При $m=2\nu$ ($\nu=0, 1, 2, \dots$) и целом n

$$\int_0^\pi \cos(2n+1)\psi \cos^{2\nu+1} \psi d\psi = \begin{cases} 0 & (\nu=0, 1, 2, \dots, n-1) \\ \pi J_{n\nu} & (\nu=n, n+1, \dots) \end{cases}$$

При $m=2\nu+1$ ($\nu=0, 1, 2, \dots$)

$$\int_0^\pi \cos(2n+1)\psi \cos^{2\nu+2} \psi d\psi = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

Следовательно, после преобразований,

$$J_2 = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) G_n N_n(\varphi) \tag{2.10}$$

где

$$N_n(\varphi) = \sum_{\nu=n}^{\infty} k^{2\nu} \sigma_1^{4\nu} J_{n\nu} \cos^{2\nu} \varphi, \quad J_{n\nu} = \frac{1}{2^{2\nu+1}} \frac{(2\nu+1)!}{(\nu-n)! (\nu+n+1)!} \tag{2.11}$$

причем $\nu \geq n$. Значения $J_{n\nu}$ для некоторых значений n и ν приведены в табл. 3.

Далее, в уравнении (2.8) обозначим $\frac{K}{\omega_2(\varphi)} = M(\varphi)$. Функцию $M(\varphi)$ разложим в ряд

$$M(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{(1-\sigma_1^2 \cos^2 \varphi)(1-k^2 \sigma_1^2 \cos^2 \varphi)}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sigma_1^{2n} \cos^{2n} \varphi \tag{2.12}$$

где

$$P_n = \sum_{m=0}^{\infty} p_m P_{n-m} k^{2m}, \quad p_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

Значения P_n для некоторых значений n и ϵ приводим в табл. 4.

Таблица 4

		P_n	1.00000	0.50000	0.37500	0.31250	0.27344	0.24609	0.22559	0.20947
ϵ	n	0	1	2	3	4	5	6	7	
		k								
3.0	0	1.00000	0.50000	0.37500	0.31250	0.27344	0.24609	0.22559	0.20947	
2.5	0.00445	1.00000	0.50000	0.37500	0.31250	0.27344	0.24609	0.22559	0.20947	
2.0	0.00756	1.00000	0.50003	0.37501	0.31251	0.27345	0.24610	0.22560	0.20948	
1.5	0.03606	1.00000	0.50065	0.37533	0.31274	0.27364	0.24627	0.22575	0.20962	
1.2	0.09208	1.00000	0.50424	0.37715	0.31440	0.27477	0.24726	0.22664	0.21044	
1.0	0.17164	1.00000	0.51473	0.38269	0.31820	0.27817	0.25023	0.22931	0.21287	
0.9	0.23345	1.00000	0.52725	0.38973	0.32333	0.28240	0.25391	0.23263	0.21590	
0.8	0.31565	1.00000	0.54982	0.40363	0.33335	0.29059	0.26101	0.23898	0.22172	
0.7	0.42262	1.00000	0.58931	0.43161	0.35375	0.30701	0.27510	0.25154	0.23315	
0.6	0.55557	1.00000	0.65433	0.48789	0.39743	0.34214	0.30483	0.27768	0.25678	
0.5	0.70711	1.00000	0.75000	0.59375	0.49248	0.42335	0.37463	0.33873	0.31124	
0.4	0.85446	1.00000	0.86480	0.75701	0.67046	0.60045	0.54334	0.49639	0.45243	
0.3	0.95832	1.00000	0.95919	0.92088	0.88490	0.85103	0.81929	0.78941	0.76125	

Принимая во внимание значения интегралов J_1, J_2 , уравнение (2.8) после преобразований, запишем

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \{ \tau_n [\sin(2n+1)\varphi \pm k\sigma_1^2 N_n(\varphi) \sin \varphi] + M(\varphi) \sin(2n+1)\varphi \sin \varphi \} = M(\varphi) \sin \varphi \tag{2.13}$$

где

$$\tau_n = \frac{\pi(2n+1)K}{\mu}$$

Соотношение (2.13) должно тождественно выполняться при любом значении φ , что будет всегда иметь место, если мы левую и правую части (2.13) разложим в ряды по синусам кратных дуг и приравняем коэффициенты обеих частей при одинаковых дугах.

Произведем разложение членов соотношения (2.13) в ряды по синусам кратных дуг. Так как

$$\cos^{2\nu} \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_{n=0}^{\nu} \binom{2\nu}{n} E\left(\frac{n}{\nu}\right) [\sin(2\nu-2n+1)\varphi - \sin(2\nu-2n-1)\varphi]$$

где

$$\binom{2\nu}{n} = \frac{(2\nu)!}{n!(2\nu-n)!}, \quad E\left(\frac{n}{\nu}\right) = \begin{cases} 1 & (n=0, 1, 2, \dots, n-1) \\ 1/2 & (n=\nu) \end{cases}$$

то, умножая (2.12) на $\sin \varphi$, получим для правой части (2.13)

$$M(\varphi) \sin \varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu} \sigma_1^{2\nu} \cos^{2\nu} \varphi \sin \varphi = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} \sin(2\nu+1)\varphi$$

где

$$A_{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n J_{\nu n}^* \sigma_1^{2n}, \quad J_{\nu n}^* = \frac{2\nu+1}{2n+1} J_{\nu n} \quad (2.14)$$

Таблица 5

n	x \ \nu	ν			
		0	1	2	3
0	0	0.8488	0.8488	-0.5093	-0.1213
	1	-0.1697	0.5093	0.6064	-0.3961
	2	-0.0243	-0.2184	0.4715	0.5401
	3	-0.0081	-0.0404	-0.2315	0.4570
1	0	-0.1697	0.5093	0.6064	-0.3961
	1	0.6548	0.2668	0.2452	0.4961
	2	-0.2021	0.4123	0.2094	0.2133
	3	-0.0360	-0.2536	0.3887	0.1944
2	0	-0.02425	-0.2184	0.4715	0.5401
	1	-0.0202	0.4123	0.2094	0.2133
	2	0.6430	0.2345	0.1623	0.1504
	3	-0.2077	0.3953	0.1752	0.1365
3	0	-0.0081	-0.0404	-0.2315	0.4570
	1	-0.0360	-0.2536	0.3887	0.1944
	2	-0.2077	0.3953	0.1752	0.1365
	3	0.6399	0.2220	0.1443	0.1170

В левой части (2.13) выражение

$$R(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n G_n N_n(\varphi) \sin \varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} k^{2\nu} \sigma_1^{4\nu} B_{\nu} \cos^{2\nu} \varphi \sin \varphi = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu} \sin(2\nu+1)\varphi \quad (2.15)$$

где

$$C_{\nu} = \sum_{n=\nu}^{\infty} k^{2n} \sigma_1^{4n} B_n J_{\nu n}^*, \quad B_n = \sum_{x=0}^n \tau_x G_x J_{xn}$$

Затем выражение в левой части (2.13)

$$T(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n M(\varphi) \sin(2n+1)\varphi \sin \varphi = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{\nu} G_n \sin(2n+1)\varphi \sin(2\nu+1)\varphi$$

Воспользовавшись разложением в ряд Фурье

$$\sin(2n+1)\varphi \sin(2\nu+1)\varphi = \sum_{x=0}^{\infty} b_{xn}^{(\nu)} \sin(2x+1)\varphi$$

где

$$b_{xn}^{(\nu)} = b_{nx}^{(\nu)} = \frac{2(2\nu+1)}{\pi} \left[\frac{1}{4(n+x+1)^2 - (2\nu-1)^2} - \frac{1}{4(n-x)^2 - (2\nu+1)^2} \right]$$

после преобразований получим

$$T(\varphi) = 2 \sum_{x=0}^{\infty} D_x \sin(2x+1)\varphi, \quad D_x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{\nu} G_n b_{xn}^{(\nu)} \quad (2.16)$$

Значения коэффициентов $b_{xn}^{(\nu)}$ для некоторых значений x, n, ν приведены в табл. 5.

Таблица 6

Относительные координаты	x/s	0	0.25	0.50	0.75	0.875	1
Открытая струя	$\varepsilon = 0.6$	0.618	0.618	0.609	0.548	0.474	0
	$\varepsilon = 1.0$	0.676	0.674	0.654	0.573	0.482	0
Полуоткрытая струя	$\varepsilon = 0.6$	0.689	0.689	0.673	0.599	0.513	0
	$\varepsilon = 1.0$	0.700	0.697	0.674	0.585	0.491	0

Подставляя выражения (2.14), (2.15) и (2.16) в (2.13), приравнявая коэффициенты в левой и правой частях равенства при одинаковых дугах и подставляя выражения для C_n и D_n , будем иметь

$$\tau_n G_n \pm 2k\sigma_1^2 \sum_{m=n}^{\infty} \left(\sum_{x=0}^m \tau_x G_x J_{xm} \right) k^{2m} \sigma_1^{4m} J_{nm}^* + 2 \sum_{m=0}^{\infty} G_m \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} b_{nm}^{(\nu)} \right) = 2A_n$$

или

$$\frac{1}{2} \tau_n G_n + \sum_{x=0}^{\infty} G_x (F_{nx} \pm k\sigma_1^2 \tau_x N_{nx}) = A_n \quad * (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.17)$$

где

$$\tau_n = \frac{\pi(2n+1)K}{2\lambda_1}, \quad F_{nx} = F_{xn} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} b_{nx}^{(\nu)}, \quad N_{nx} = \sum_m^{\infty} k^{2m} \sigma_1^{4m} J_{xm} J_{nm}^*$$

причем суммирование по m начинается с наибольшего из чисел x или n .

Система уравнений (2.17) позволяет при оставлении конечного числа уравнений и того же числа неизвестных определить эти неизвестные коэффициенты, а по ним и определить решение (2.9) уравнения (2.8). В предельном случае при $l \rightarrow \infty$, $\sigma = s/l \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$,

$$F_{nx} \rightarrow F_{00} = \frac{1}{4}, \quad A_n \rightarrow A_0 = P_0 J_{00}^* = \frac{1}{2}, \quad \sigma_1 \rightarrow 0$$

система уравнений (2.17) примет известный вид для крыла в неограниченном потоке

$$\tau_n G_n + \sum_{x=0}^{\infty} b_{nx}^{(0)} G_x = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad \left(\tau_n = \frac{\pi(2n+1)}{2\lambda} \right)$$

Для крыла с относительным размахом $\sigma = 0.8$ и удлинением $\lambda = 8$ при $\varepsilon = 0.6$ и $\varepsilon = 1$ был проделан числовой расчет до определения относительной циркуляции

$$\Gamma = \frac{\mu \Gamma(x)}{4\pi \nu s_1 \sigma_0} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \sin(2n+1)\varphi \quad (2.18)$$

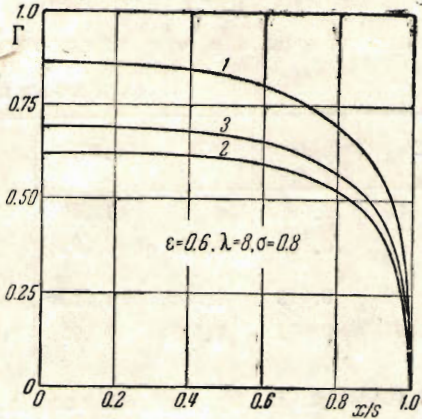
В системе (2.17) было оставлено шесть первых уравнений с шестью неизвестными коэффициентами G_n ($n=0, 1, 2, \dots, 5$). Заметим, что при относительном размахе $\sigma < 0,8$ практически вполне достаточно оставлять только четыре первых уравнения с тем же числом неизвестных G_n ($n=0, 1, 2, 3$).

С целью сравнения был проделан аналогичный расчет для указанного крыла в условиях неограниченного потока. Полученные значения Γ приведены в табл. 6.

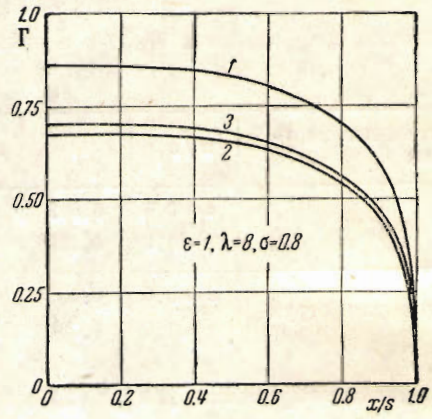
Для сравнения приводим значения величин Γ в условиях неограниченного потока

$x/s = 0$	0.3496	0.6497	0.8696	0.9459	1
$\Gamma = 0.864$	0.853	0.785	0.637	0.476	0

По этим данным и данным табл. 6 построены фиг. 4 и фиг. 5, где цифрами 1, 2 и 3



Фиг. 4.



Фиг. 5.

отмечены кривые Γ соответственно для неограниченного потока, для открытой струи и в струе с горизонтальными твердыми стенками и свободными боковыми.

Поступила в редакцию
5 III 1945

Институт механики
Академии Наук СССР

I. A. PANICHKIN. DETERMINATION OF THE CIRCULATION ALONG A SPAN OF A WING IN AN OPEN AND SEMI-OPEN FLOW OF RECTANGULAR CROSS-SECTION

The work gives the procedure for determining the distribution of circulation along the span of a wing both in an open flow of rectangular cross section and in a semi-open flow with horizontal rigid walls.

By means of function (1.4) mapping a rectangle on a circle with slits and employing the results of the influence of the boundary of a circular flow on the aerodynamic characteristics of the wing, as well as the invariants $\Gamma(x)$ and $w(x) dx$ of conformal representation, the problem is reduced to an equation (2.8) of the Prandtl type.

The solution of this equation is reduced to the solution of an infinite system of equations (2.17) with an infinite number of unknowns. Taking six equations with six unknown coefficients G_n ($n=0, 1, 2, \dots, 5$) for a wing with a relative span $\sigma=0.8$ and elongation $\lambda=8$ for rectangular flows $\epsilon=0.6$ and $\epsilon=1$ numerical computations are carried out to determine the relative circulation Γ (2.18) along the span of the wing. The results of the calculation are given in fig. 4 and 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Haller P. L'influence des limites de la veine fluide sur les caractéristiques aérodynamiques d'une surface portante. Zürich. 1934.
2. Голубев В. В. Теория крыла самолета конечного размаха. Тр. ЦАГИ. 1931. Вып. 108.