

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О КРИВОЙ ПОГОНИ

В. С. Пугачев

(Москва)

В настоящей статье рассматривается следующее обобщение классической задачи о кривой погони. Точка  $A$  движется прямолинейно с постоянной скоростью  $v$ . Точка  $B$  движется с постоянной скоростью  $\omega$  так, что касательная к ее траектории в каждый данный момент направлена в точку  $C$ , лежащую на пути точки  $A$ , причем расстояние  $AC$  является данной функцией расстояния  $r$  между точками  $B$  и  $C$ . Требуется определить траекторию точки  $B$ , которую мы будем называть кривой погони.

Военный самолет с оружием, закрепленным неподвижно, для стрельбы вперед при атаке цели должен быть направлен в точку, лежащую впереди цели на расстоянии, равном скорости цели, умноженной на время полета снаряда до этой точки. Время полета снаряда до данной точки при стрельбе с самолета можно с достаточной точностью считать зависящим только от удаления этой точки от точки вылета снаряда. Отсюда ясен практический смысл поставленной задачи.

В частном случае, когда  $AC = 0$ , получается классическая задача о кривой погони.

В общем случае решение поставленной задачи приводится к квадратурам. Мы покажем здесь, как это можно сделать, и, кроме того, дадим качественное исследование кривой погони в различных случаях.

1. Обозначим через  $t$  время и примем за начало неподвижной системы координат точку  $O$ , в которой точка  $A$  находится в момент  $t = 0$ . Ось абсцисс  $Ox$  направим по направлению движения точки  $A$  (фиг. 1), ось ординат  $Oy$  — перпендикулярно оси  $Ox$  в плоскости треугольника  $ABC$ .

По условию вектор скорости точки  $B$  в любой момент направлен в точку  $C$ , причем

$$AC = f(r), \quad r = BC \tag{1.1}$$

Относительно функции  $f(r)$  сделаем предположение, что она непрерывна и имеет непрерывные первую и вторую производные. Из фиг. 1 нетрудно вывести следующие дифференциальные уравнения траектории точки  $B$

$$\frac{-\dot{x}}{x - vt - f(r)} = \frac{-\dot{y}}{y} = \frac{\omega}{r} \left( r^2 = [x - vt - f(r)]^2 + y^2 \right) \tag{1.2}$$

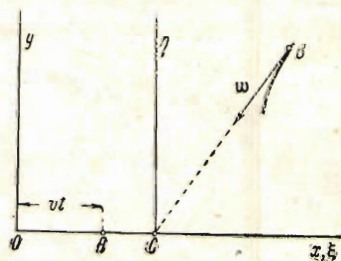
где точкой обозначено дифференцирование по времени.

Уравнения (1.2) представляют собой систему двух дифференциальных уравнений первого порядка. Эти уравнения приводятся к двум отдельным уравнениям первого порядка, интегрируемым в квадратурах. Для этого достаточно принять за неизвестные функции вместо  $x, y$  величины  $r, t$ , а в качестве независимого переменного принять величину

$$z = \frac{vt + f(r) - x}{r} \tag{1.3}$$

Уравнение (1.2) при этом преобразуется к виду

$$\frac{dr}{dz} = - \frac{r(1 - kz)}{[k - f'(r)](1 - z^2)}, \quad \frac{dt}{dz} = \frac{r}{\omega} \frac{1 - f'(r)z}{[k - f'(r)](1 - z^2)} \quad \left( k = \frac{v}{\omega} \right) \tag{1.4}$$



Фиг. 1.

2. Для установления характера интегральных кривых уравнения (1.5) исследуем поведение интегралов этого уравнения при  $r \rightarrow 0$ .

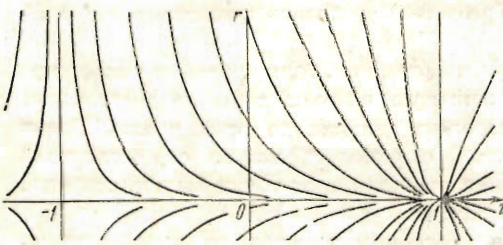
Сначала будем предполагать, что  $k \neq 1$ . Очевидно, что интегральные кривые могут пересекаться с осью  $z$  лишь в точках  $z = \pm 1$  и что ось  $z$  и прямые  $z = \pm 1$  являются интегральными кривыми первого уравнения (1.4). Для того чтобы определить характер особых точек  $r=0$ ,  $z = \pm 1$ , положим

$$z = \pm 1 + u, \quad a = f'(0), \quad f'(r) = a + \varphi(r)r \quad (2.1)$$

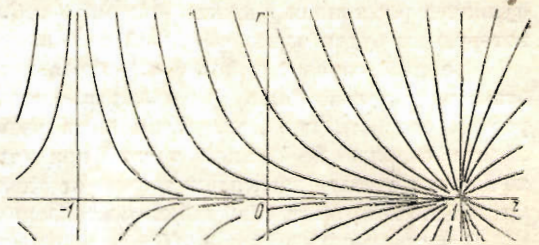
Очевидно, что величина  $\varphi(0)$  конечна в силу ограничений, наложенных на  $f(r)$ . Первое уравнение (1.4) преобразуется к виду

$$\frac{dr}{du} = \frac{(1 \mp k)r \mp ur}{[k - a - \varphi(r)r]u(u \pm 2)} \quad (2.2)$$

Это элементарное уравнение, к которому применима классическая теория Пуанкаре. Предполагая, что  $a < k$ , приходим к выводу, что точка  $r=0$ ,  $z = -1$  всегда является

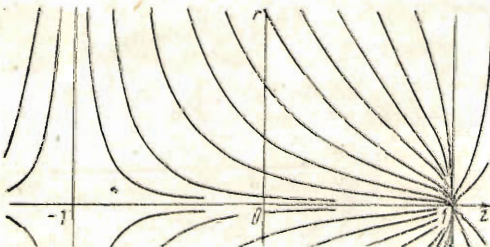


Фиг. 2.

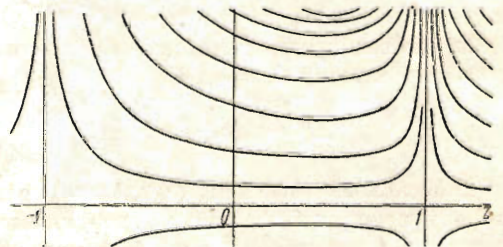


Фиг. 3.

седлом, а точка  $r=0$ ,  $z = +1$  при  $k < 1$  является узлом, а при  $k > 1$  — седлом. В первом случае при  $k < (1+2a)/3$  все интегральные кривые, оканчивающиеся в точке  $r=0$ ,  $z = +1$ , касаются оси  $z$  (фиг. 2); при  $k = (1+2a)/3$  интегральные кривые подходят к точке  $r=0$ ,  $z = +1$  со всех возможных направлений (фиг. 3); при  $(1+2a)/3 < k < 1$  все



Фиг. 4.



Фиг. 5.

интегральные кривые, оканчивающиеся в точке  $r=0$ ,  $z = +1$ , касаются в этой точке прямой  $z = 1$  (фиг. 4). Ход интегральных кривых в случае  $k > 1$  показан на фиг. 5.

При  $k=1$  первое уравнение (1.4) приводится к виду

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{r}{[k - f'(r)](1+z)} \quad (2.3)$$

Подобно предыдущему убеждаемся в том, что интегральные кривые могут пересекаться с осью  $z$  лишь в точке  $r=0$ ,  $z = -1$  и что ось  $z$  и прямая  $z = -1$  являются интегральными кривыми. Для исследования характера особой точки  $r=0$ ,  $z = -1$  введем переменную  $u$ , приняв в формуле (2.1) нижний знак. Тогда уравнение (2.3) преобразуется к виду

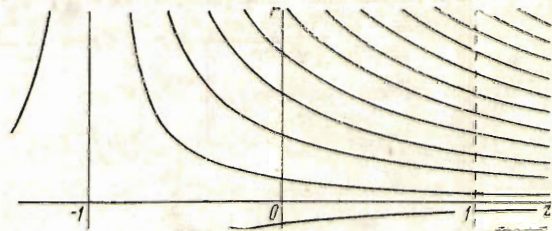
$$\frac{dr}{du} = -\frac{r}{[1 - a - \varphi(r)r]u} \quad (2.4)$$

Отсюда, предполагая попрежнему, что  $a < k = 1$ , приходим к заключению, что точка  $r = 0, z = -1$  является седлом и интегральные кривые идут, как показано на фиг. 6.

Если предположить, что  $a > k$ , что, впрочем, не имеет практического интереса, то приходим к выводу, что точка  $r = 0, z = -1$  всегда является узлом, а точка  $r = 0, z = +1$  при  $k < 1$  является седлом, при  $k = 1$  не является особой, а при  $k > 1$  — узлом. В последнем случае при  $k > (1 + 2a)/3$  интегральные кривые приходят в точку  $r = 0, z = +1$ , касаясь оси  $z$ ; при  $k = (1 + 2a)/3$  имеют в точке  $r = 0, z = +1$  всевозможные направления; при  $k < (1 + 2a)/3$  касаются прямой  $z = 1$ .

При  $k = a$ , как нетрудно видеть из (2.2), ось  $z$  не является интегральной кривой и не существует особых точек на оси  $z$ .

Посмотрим теперь, какие свойства кривой погони вытекают из произведенного исследования. Для этого будем рассматривать кривую погони в подвижной системе координат  $\xi C \eta$ , имеющей начало в точке  $C$ , оси которой параллельны осям системы  $Oxy$  (фиг. 1). Как нетрудно видеть из фиг. 1 и формул (1.2) и (1.3):



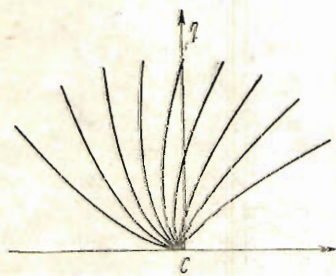
Фиг. 6.

$$\xi = -rz, \quad \eta = r\sqrt{1 - z^2} \tag{2.5}$$

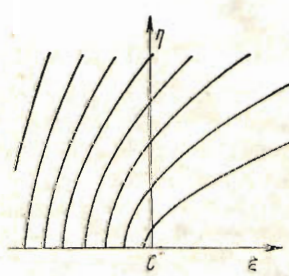
Отсюда заключаем, что полуплоскости  $\eta > 0$  соответствует участок плоскости  $rz$ , ограниченный отрезком  $|z| \leq 1$  и полупрямыми  $r \geq 0, z = \pm 1$ , причем последние отображаются преобразованием (2.5) на отрицательную и положительную полуоси  $C\xi$  соответственно. Далее нетрудно видеть, что произвольная кривая, оканчивающаяся в точке  $(z_0, 0)$ , отображается на кривую плоскости  $C\xi$ , оканчивающуюся в начале координат  $C$  и имеющую в точке  $C$  касательную

$$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{\sqrt{1 - z_0^2}}{z_0} \tag{2.6}$$

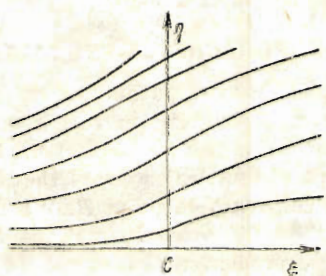
Из произведенного исследования поведения интегральных кривых первого уравнения (1.4) вытекают следующие свойства кривой погони. При  $a < k < 1$  все кривые погони приходят в точку  $C$  и касаются в этой точке отрицательной полуоси  $C\xi$  (фиг. 7); кривыми



Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

погони являются также положительная и отрицательная полуоси  $C\xi$ . При  $a < k = 1$  в каждой точке отрицательной полуоси  $C\xi$  оканчивается одна и только одна кривая погони; единственной кривой погони, оканчивающейся в точке  $C$ , является положительная полуось  $C\xi$  (фиг. 8). При  $a < k, k > 1$  единственными кривыми погони, проходящими через точку  $C$ , являются положительная и отрицательная полуоси  $C\xi$  (фиг. 9). При  $a > k < 1$  все кривые погони приходят в точку  $C$ , касаясь положительной полуоси  $C\xi$ , кроме отрицательной полуоси  $C\xi$ , которая также является кривой погони. При  $a > k = 1$  в каж-

дой точке отрицательной полуоси  $C\xi$  оканчивается одна и только одна кривая погони. Кроме того, существует бесчисленное множество кривых погони, приходящих в точку  $C$ , касаясь положительной полуоси  $C\xi$ . При  $a > k > 1$  существует бесчисленное множество кривых погони, оканчивающихся в точке  $C$ , касаясь либо положительной, либо отрицательной полуоси  $C\xi$ . Наконец, при  $a = k$  все интегральные кривые приходят в точку  $C$ , причем касательные к ним в точке  $C$  имеют всевозможные направления; некоторые из них являются замкнутыми кривыми. При  $a \geq k$  первое уравнение (1.4) может иметь особые точки, не лежащие на оси  $z$ . Заметим еще, что, как показывает второе уравнение (1.4), при соблюдении условий  $f'(r) < 1$ ,  $f'(r) < k$  величина  $z$  монотонно возрастает с течением времени.

3. Принимая во внимание (2.1), можем представить первое уравнение (1.4) в виде

$$\left[ \frac{k-a}{r} - \varphi(r) \right] dr = -\frac{1-k}{2} \frac{dz}{1-z} - \frac{1+k}{2} \frac{dz}{1+z} \quad (3.1)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$r^{k-a} e^{-\Phi(r)} = C (1-z)^{\frac{1-k}{2}} (1+z)^{\frac{1+k}{2}} \quad (3.2)$$

где  $C$  — произвольная постоянная, а

$$\Phi(r) = \int_0^r \varphi(r) dr \quad (3.3)$$

Определив  $r$  в функции  $z$  из уравнения (3.2), найдем из второго уравнения (1.4)

$$t = \frac{1}{\omega} \int_{z_0}^z \frac{r [1-f'(r)z]}{[k-f'(r)](1-z^2)} dz \quad (3.4)$$

а из уравнений (1.3) и (1.2) можно получить параметрические уравнения кривой погони

$$x = vt + f(r) - rz, \quad y = r \sqrt{1-z^2} \quad (3.5)$$

Заметим, что если  $a < k$ , то при  $k < 1$ , т. е. когда скорость  $\omega$  точки  $B$  больше скорости  $v$  точки  $A$ , интеграл в формуле (3.4) остается конечным при  $z=1$ , что соответствует тому факту, что точка  $B$  догоняет точку  $A$  в конечное время; при  $k \geq 1$ , т. е. когда  $v \geq \omega$ , интеграл в формуле (3.4) неограниченно возрастает при  $z \rightarrow 1$ . Действительно, из формулы (3.2) нетрудно заключить, что при  $z \rightarrow 1$  величина  $r$  имеет порядок  $(1-z)^\alpha$ , где  $\alpha = (1-k)/(2k-2a)$ . Отсюда непосредственно вытекает справедливость выказанного утверждения.

Поступила в редакцию

13 II 1946

## V. S. PUGACHEV. GENERALISATION OF THE PROBLEM OF THE PURSUIT CURVE

The investigation is a generalisation of the classic problem of the pursuit curve. Point  $A$  moves rectilinearly with constant velocity. Point  $B$  moves with constant velocity  $\omega$  so that the tangent to its trajectory at any moment of time is directed at point  $C$  of trajectory of the point  $A$  making  $AC = f(r)$ , where  $r = BC$ . The task is to find the trajectory of point  $B$ . When  $f(r) = 0$  we have the classic problem of the pursuit curve.

The differential equations of the pursuit curve have the form (1.2). Taking  $r$  and time  $t$  as dependent variables and the value (1.3) as argument, equations (1.2) are reduced to the form (1.4).

Assuming function  $f(r)$  and its derivatives of the first and second order to be continuous, equation (1.4) is reduced to form (2.2) by means of formulae (2.1). This constitutes an investigation of the behaviour of the integral curves in the vicinity of the singular points  $r = 0$ ,  $z = 1$ . This makes it possible to establish the properties of the pursuit curve when  $r$  approaches zero.

Integrals of equation (1.4) are determined by formulae (3.2), (3.3) and (3.4). The parametric equations of the pursuit curve are given by formulae (3.5).