Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946

ЗАМЕТКИ

О ВЛИЯНИИ УСКОРЕНИЯ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПРОДОЛГОВАТЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ В ГАЗАХ

Ф. И. Франкль

(Москва)

Задача о движении продолговатого тела вращения в осевом направлении в несжимаемой жидкости может быть, как известно, приближенно решена при помощи распределения источников вдоль оси тела. При определении поля скоростей не играет роли, движется ли тело равномерно или же с ускорением. Наличие ускорения приходится учитывать при определении давлений, действующих на тело. Сопротивление тела, вызванное ускоренным движением, может быть вычислено либо непосредственно на основании этих давлений, либо при помощи так называемых присоединенных масс. Другое положение имеет место при движении тел в газе. В этом случае нужно учитывать конечность скорости звука. Если считать, что тело вызывает в потоке лишь малые возмущения, то потенциал скорости φ удовлетворяет волновому уравнению:

$$a^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{1}$$

где a — скорость звука. Метод источников остается тогда применимым, но при вычислении действия источников нужно пользоваться запаздывающим потенциалом.

Введем две системы координат: одну неподвижную xr, другую, движущуюся вместе с телом, ξr; при этом x и соответственно ξ — координаты вдоль оси тела, r — расстояние от оси. Координата ξ отсчитывается с головной точки тела.

Пусть $r = \bar{r}(\xi)$ уравнение тела вращения $(0 < \xi < l)$. Положение тела характеризуется неравенствами $-f(t) < x < l - f(t)$, где $f(t)$ — заданная функция времени, характеризующая движение тела. Координаты x и ξ связаны уравнением $x = \xi - f(t)$.

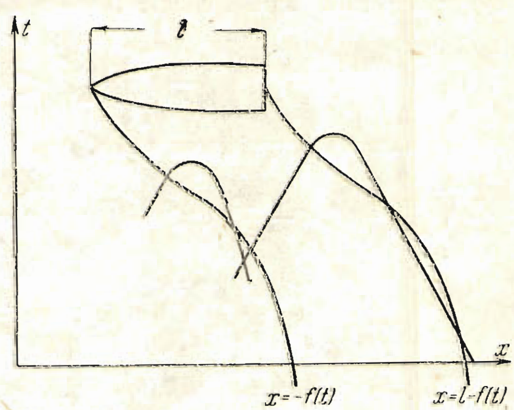
Пусть $q = q(x', t')$ — значение линейной плотности источника в точке x' в момент времени t', а $R = \sqrt{(x-x')^2 + r^2}$ — расстояние между источником и точкой приложения. Тогда потенциал скоростей возмущения

$$\varphi(x, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{R} q\left(x', t - \frac{R}{a}\right) dx'$$

причем интеграл берется в пределах, определяемых неравенствами

$$-f\left(t - \frac{R}{a}\right) < x' < l - f\left(t - \frac{R}{a}\right)$$

Чтобы установить область интегрирования, мы должны рассмотреть в плоскости $x't'$ полосу $-f(t') < x' < l - f(t')$, расположенную между линиями движения головной и кормовой точек тела вращения (фиг. 1), а также расположенную в этой полосе часть полугиперболы.



Фиг. 1.

$$t' = t - \frac{R}{a} = t - \frac{1}{a}\sqrt{(x' - x)^2 + R^2}$$

Абсциссы указанной части полугиперболы и образуют область интегрирования (фиг. 1). Когда видно из чертежа, область интегрирования может состоять как из одного, так и ив нескольких отрезков. Концы соответствующих дуг гиперболы могут лежат либо на линии движения головной точки, либо на линии движения концевой. В частности, при движении тела со сверхзвуковой скоростью возможно, что внутри рассматриваемой полосы лежит всего одна дуга гиперболы, оба конца которой лежат на линии движения головной точки (так это будет, например, при равномерном сверхзвуковом движении или при движенин, близком к такому).

Функцию $q(x', t')$ приходится определить из интегрального уравнения, выражающего, что нормальная составляющая скорости газа на поверхности тела равна нормальной составляющей движения тела:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\int\left[\frac{1}{R}q\left(x', t-\frac{R}{a}\right)\right]_{r=\bar{r}} dx' = \frac{d\bar{r}/d\xi}{\sqrt{1+[\bar{r}'(\xi)]^2}} f'(t) \tag{2}$$

Здесь $\partial/\partial n$ означает дифференцирование по внешней нормали, а $\xi = x + f(t)$.

В дальнейшем мы будем считать производную $\partial\bar{r}/\partial\xi$ малой и дадим приближенное решение уравнения (2). При указанном допущении $\partial\varphi/\partial n$ может быть заменено через $\partial\varphi/\partial r$. Примем для простоты, что область интегрирования сводится к отрезку (x_1, x_2). Тогда уравнение (2) принимает вид

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{1}{R}q\left(x', t-\frac{R}{a}\right)\right]_{r=\bar{r}} dx' = \frac{1}{4\pi}\left\{r\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{q}{R^3}+\frac{1}{aR^2}\frac{\partial q}{\partial t'}\right)_{r=\bar{r}} dx' -\right.$$

$$\left.\frac{1}{R_2}q\left(x_2, t-\frac{R_2}{a}\right)\frac{dx_2}{dr}+\frac{1}{R_1}q\left(x_1, t-\frac{R_1}{a}\right)\frac{\partial x_1}{\partial r}\right\} = f'(t)\frac{d\bar{r}}{d\xi} \tag{3}$$

Если считать $\bar{r}/l$ и $d\bar{r}/d\xi$ величинами малыми первого порядка и пренебречь их высшими степенями или производными, то приближенным решением уравнения (3) будет

$$q(x, t) = 2\pi f'(t)\bar{r}(\xi)\frac{d\bar{r}}{d\xi} \tag{4}$$

Покажем, что ошибка при подстановке этого выражения в уравнение (3) является величиной второго порядка малости. Для этой цели удобно $\bar{r}$ писать εr^*, где $r^* = r^*(\xi)$ — переменная величина порядка единицы относительно l, а ε — малое постоянное число. Степень числа ε в каждом выражении показывает тогда его порядок малости. Рассмотрим порядок членов левой части уравнения (3). Внеинтегральные члены левой части уравнения (3), содержащие q в качестве множителей при ограниченных (в общем случае) членах, будут второго порядка малости. Точно так же имеет второй порядок малости выражение

$$\left|\frac{r}{a}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial q}{\partial t'}\frac{dx'}{R^2}\right| < M\varepsilon^2 r\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx'}{R^2} < M\pi\varepsilon^2 \tag{5}$$

Что касается остающегося члена, то мы представим его в виде

$$\frac{r}{4\pi}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{R^3}q\left(x', t-\frac{R}{a}\right)dx' = \frac{r}{4\pi}q(x, t)\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx'}{R^3} + \frac{r}{4\pi}\int_{x_4}^{x_2}[q(x', t)-q(x, t)]\frac{dx'}{R^3} +$$

$$+\frac{r}{4\pi}\int_{x_1}^{x_2}\left[q\left(x', t-\frac{R}{a}\right)-q(x', t)\right]\frac{dx'}{R^3} \tag{6}$$

В результате вычисления первого интеграла этого выражения получим

$$r\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx'}{R^3} = \frac{1}{\varepsilon r^*(\xi)}[2+O(\varepsilon^2)] \tag{7}$$

---

[1] Это решение (4) использовано впервые Карманом [2] в случае равномерного движения (в частности, для получения приближенной величины волнового сопротивления).

Для оценок разностей, стоящих в скобках во втором и третьем интегралах выражения (6), соответственно имеем

$$q(x', t) - q(x, t) = O(\varepsilon^2) R, \qquad q(x', t) - q(x', t - R/a) = O(\varepsilon^2) R \tag{8}$$

Поэтому оценки для этих интегралов имеют вид

$$O(\varepsilon^2)\, r \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{R^2} \leqslant \pi O(\varepsilon^2) \tag{9}$$

так что эти интегралы — также величины второго порядка малости. Таким образом

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{1}{R} q\left(x', t - \frac{R}{a}\right)\right]_{r=\bar r} dx' = f'(t)\frac{d\bar r}{d\xi} + O(\varepsilon^2) \tag{10}$$

что и требовалось доказать.

Выражение для потенциала скоростей после подстановки (4) принимает вид

$$\varphi(x, t) = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{R} f'\left(t - \frac{R}{a}\right)\gamma(\xi')\, dx' \qquad \left(\gamma(\xi) = \bar r \frac{d\bar r}{d\xi}\right) \tag{11}$$

Для вычисления поля давлений имеем обобщенную формулу Бернулли

$$\frac{p - \bar p}{\rho} = -\frac{w^2}{2} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{12}$$

где p — давление в данной точке, $\bar p$ — даление в невозмущенной зоне, ρ — плотность и w — модуль скорости. Пренебрегая величинами второго порядка $w^2/2$ и учитывая, что

$$\xi' = x' + f\left(t - \frac{R}{a}\right), \qquad \frac{\partial\xi'}{\partial t} = f'\left(t - \frac{R}{a}\right) \tag{13}$$

получим

$$\frac{p - \bar p}{\rho} = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left\{\left[f'\left(t - \frac{R}{a}\right)\right]^2 \gamma'(\xi') + f''\left(t - \frac{R}{a}\right)\gamma(\xi')\right\}\frac{dx'}{R} - \\ - \left[\frac{\gamma(\xi')}{2R} f'\left(t - \frac{R}{a}\right)\right]_{x' = x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} \tag{14}$$

В частном случае, когда ищется давление на поверхности снаряда, движение которого близко к равномерному сверхзвуковому, точка x_2 лежит на линии движения головной точки снаряда и последний член в правой части (14) равен нулю. Получим

$$\frac{p - \bar p}{\rho} = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left\{\left[f'\left(t - \frac{R}{a}\right)\right]^2 \gamma'(\xi') + f''\left(t - \frac{R}{a}\right)\right\}\frac{dx'}{R} \tag{15}$$

где x_1 и x_2 определяются из уравнения

$$x_{1,2} = f\left(t - \frac{1}{a}\sqrt{(x_{1,2} - x)^2 + \bar r^2}\right) \tag{16}$$

В случае равномерного движения $x = \xi' - vt + c$ и уравнения (15 и 16) принимают вид

$$\frac{p - \bar p}{\rho} = \frac{v^2}{2}\int_{x_1^*}^{x_2^*}\gamma'(\xi')\frac{dx'}{R}, \qquad x_{1.2}^* = -v\left(t - \frac{1}{a}\sqrt{(x_{1.2}^* - x)^2 + r^2}\right) + c \tag{17}$$

Добавочное давление, вызванное ускорением, поэтому дается формулой

$$\delta p = \frac{\rho}{2}\left\{\int_{x_1}^{x_2} f''\left(t - \frac{R}{a}\right)\gamma(\xi')\frac{dx'}{R} + \int_{x_1}^{x_2}\left(\left[f'\left(t - \frac{R}{a}\right)\right]^2 - [f'(t)]^2\right)\gamma'(\xi')\frac{dx'}{R} + \right. \\ \left. + [f'(t)]^2\int_{x}^{x_2}[\gamma'(\xi') - \gamma'(\xi^{*'})]\frac{dx'}{R} + \int_{x_1}^{x_1^*}[f'(t)]^2\gamma'(\xi')\frac{dx'}{R} + \int_{x_2^*}^{x_2}[f'(t)]^2\gamma'(\xi')\frac{dx'}{R}\right. \tag{18}$$

где $\xi^{*\prime}$ определяется из формулы

$$x' = \xi^{*\prime} - f'(t)\,t' + f'(t)\,t - f(t) \tag{19}$$

На основании структуры формулы (18) легко видеть, что относительное увеличение давления, вызванное ускорением, имеет при скоростях, сравнимых со скоростью звука, порядок величины bl/v^2, где $b = f''(t)$ — ускорение. Поэтому для ракетных снарядов обычных размеров при ускорениях не свыше 1000 м / сек² и скоростями, сравнимыми со скоростью звука, добавочные давления, вызванные ускорением пренебрежимо малы.

Это подтверждается также следующим примерным расчетом. Длина головной части снаряда равна $l = 0.25$ м, максимальный радиус $\bar{r} = 0.07$ м. Образующая головной части — дуга параболы, которая плавно переходит в цилиндрическую часть, так что она дается уравнением $\bar{r} = 0.56\,\xi - 1.12\,\xi^2$ (масштаб — метры).

Движение — равномерно ускоренное с ускорением 1000 м/сек², так что линия движения снаряда $x = -5\,000\,t^2 \quad (t > 0),\; x = 0 \quad (t < 0)$.

Распределение давлений по головной части снаряда находится в момент времени $t = 0.5$ сек., так что скорость равна $v = 500$ м / сек. Плотность воздуха $\rho = 0.125$ кгм$^{-1}$ сек^2.

Были получены распределения давлений (с учетом ускорения) и добавочных давлений δp, вызванных ускорением

$\xi =$	0.05	0.10	0.15	0.20	$\xi =$	0.05	0.10	0.15	0.20	(метр)
$p - \bar{p} =$	8550	7448	5970	3588	$\delta p =$	-5.0	-5.5	-11.0	-16.0	(кг / м²)

Отсюда получается волновое сопротивление и соответствующее добавочное сопротивление

$$Q = 2\pi \int_0^l \bar{r}\frac{d\bar{r}}{d\xi}(p - \bar{p})\,d\xi = 100, \qquad \delta Q = 2\pi \int_0^l \bar{r}\frac{d\bar{r}}{d\xi}\delta p\,d\xi = 0.13 \quad \text{(кг)} \tag{20}$$

Добавочные давления δp, вызванные ускорением, были вычислены на основачии приближенной формулы (18), которая для рассматриваемого примера имеет вид

$$\delta p = \frac{\rho b}{2}\left\{\int_{x_1}^{x_2}\frac{\gamma(\xi')}{R}\,dx' - 2\frac{bt}{a}\int_{x_1}^{x_2}\gamma'(\xi')\,dx' + \left(\frac{bt}{a}\right)^2\int_{x_1}^{x_2}\gamma''(\xi')\,R\,dx' + \right.$$
$$\left. + b\gamma'(0)\left(\frac{t_2{}^2\delta x_2}{R_2} - \frac{t_1{}^2\delta x_1}{R}\right)\right\} \tag{21}$$

где

$$\delta x_1 = x_1 - x_1{}^* \approx \frac{\frac{b}{2}\left(\frac{R_1}{a}\right)^2}{\frac{bt}{a}\,\frac{x_1 - x}{R_1} - 1}, \qquad \delta x_2 = x_2 - x_2{}^* \approx \frac{\frac{b}{2}\left(\frac{R_2}{a}\right)^2}{\frac{bt}{a}\,\frac{x - x_2}{R_2} - 1} \tag{22}$$

Поступила в редакцию
5 V 1946

F. J. FRANKL. INFLUENCE OF THE ACCELERATION OF ELONGATED BODIES OF REVOLUTION UPON THE RESISTANCE OF THE GAS

Increase of resistance caused by acceleration of a body in an incompressible fluid may be found by means of the inertia coefficient. The present paper deals with the influence in a compressible gas of the speed of sound on this additional resistance.

Employing the method of retarding potential, the relative increase of wave resistance caused by acceleration is found to be of the order bl/v^2 (where b is acceleration; l is the length of the „head" of the projectile; v is the velocity), if the velocity of the projectile is of the same order as the speed of sound.

This result indcates that in practice this additional resistance may be neglected.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lamb H. Hydrodynamics. Cambridge. 6th Ed. 1932.
2. Карман Т. Проблема сопротивления в сжимаемой жидкости. Доклады на конференции по большим скоростям. Рим. 30 IX—6 X 1935.