

О ПОДЪЕМНОЙ СИЛЕ СТРЕЛОВИДНОГО КРЫЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

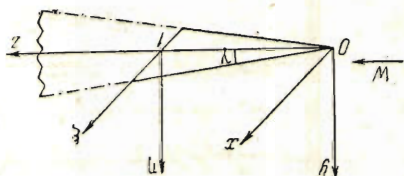
М. И. Гуревич

(Москва)

§ 1. **Постановка задачи и введение.** Рассмотрим обтекание конического тела потоком идеальной сжимаемой жидкости. Пусть в бесконечности набегающий поток имеет скорость W , направленную по оси z . Система декартовых координат x, y, z с началом в вершине конуса O представлена на фиг. 1. Из соображений теории размерностей можно установить, что вдоль любого луча, выходящего из O , составляющие скорости по осям координат $u, v, W + w$ будут сохранять постоянное значение. Предположим еще, что наше коническое тело имеет такую форму и так расположено по отношению к потоку, что u, v, w малы по сравнению с W , тогда, как известно, уравнение непрерывности можно представить в виде

$$F_{xx} + F_{yy} - F_{zz}(M^2 - 1) = 0 \quad (1.1)$$

Здесь под F можно в равной мере подразумевать как потенциал скоростей φ , так и составляющие скорости u, v, w ; через $M = W/a$ обозначается число Маха-Берстоу, причем a есть скорость звука в бесконечности вверх по течению от тела. Будем считать, что поток всюду сверхзвуковой ($M > 1$).



Фиг. 1.

В силу линейности уравнения (1.1) можно накладывать друг на друга конические течения с различными вершинами конусов. Уравнение (1.1) принадлежит к гиперболическому типу. Это означает, что каждая точка течения может оказывать влияние только на точки, расположенные внутри ее конуса Маха, и мы можем известным образом обрезать наше тело без того, чтобы это влияло на течение вокруг его оставшейся передней части. Однако при этом следует иметь в виду, что конусы Маха, построенные для тех точек тела, по которым произведен разрез, нигде не должны пересекать оставшихся частей тела. А. Бузман^[1] указал на аналогию, существующую между задачей о конических течениях при сверхзвуковой скорости потока и малых дополнительных скоростях, и плоской задачей при дозвуковом течении в приближенной постановке С. А. Чаплыгина^[2], делающейся точной, когда уравнение состояния газа имеет вид

$$p = \frac{C_1}{\rho} + C_2$$

где p — давление, ρ — плотность жидкости, C_1 и C_2 — константы. Воспользо-

вавшись преобразованиями С. А. Чаплыгина, А. Буземан свел определение u, v, w внутри конуса Маха к решению уравнения Лапласа в двух измерениях. Во избежание ссылок в § 2, 3, 4, приведен прямой вывод нужных нам формул А. Буземана¹, дальнейшие параграфы посвящены исследованию подъемной силы стреловидного крыла.

§ 2. Преобразование уравнений непрерывности. Для конических течений u, v, w можно представить как функции одних только отношений координат $\xi = x/z, \eta = y/z$. Величины ξ и η удобно рассматривать как декартовы координаты в плоскости, перпендикулярной к оси z и пересекающей ее на расстоянии 1 от начала координат (фиг. 1). Конус Маха для точки O вырезает в плоскости ξ, η круг радиуса $A = 1/\sqrt{M^2 - 1}$.

Положим, для определенности, $F = w$. Легко убедиться в том, что уравнение (1.1) в переменных ξ, η будет внутри круга радиуса A эллиптического, а вне его — гиперболического типа. Как мы уже упоминали, определение w внутри круга сводится к решению уравнения Лапласа. Задачу вне конуса Маха надлежит решать отдельно. Оба решения сопрягаются на конусе Маха так, чтобы при переходе через него скорости менялись непрерывно.

Приступим к преобразованию уравнения (1.1). Оно сводится к уравнению Лапласа в трех измерениях для независимых переменных:

$$x^* = ix\sqrt{M^2 - 1}, \quad y^* = iy\sqrt{M^2 - 1}, \quad z^* = z \quad (2.1)$$

В сферических координатах r, σ, ϑ , где

$$x^* = r \cos \sigma \sin \vartheta, \quad y^* = r \sin \sigma \sin \vartheta, \quad z^* = r \cos \vartheta \quad (2.2)$$

уравнение (1.1) будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r \sin \vartheta) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{F_\sigma}{\sin \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (F_\vartheta \sin \vartheta) = 0$$

В силу постоянства скорости вдоль лучей², выходящих из O , имеем

$$w_{\sigma\sigma} + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} (w_\vartheta \sin \vartheta) = 0 \quad (2.3)$$

Находясь внутри конуса Маха, можно избавиться от мнимых преобразований, положив $\vartheta = i\theta$; тогда (2.1), (2.2), (2.3) заменяются на

$$\xi = A \cos \sigma \operatorname{th} \theta, \quad \eta = A \sin \sigma \operatorname{th} \theta \quad (2.4)$$

$$w_{\sigma\sigma} + \operatorname{sh} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (w_\theta \operatorname{sh} \theta) = 0 \quad (2.5)$$

Для сведения уравнения (2.5) к уравнению Лапласа в полярной форме нам остается ввести новое независимое переменное ε , определяемое из условия $d\varepsilon/d\theta = \varepsilon/\operatorname{sh} \theta$; откуда

$$\varepsilon = \operatorname{th} \frac{\theta}{2}, \quad w_{\sigma\sigma} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (w_\varepsilon \varepsilon) = 0 \quad (2.6)$$

¹ Пользуюсь случаем принести благодарность Л. И. Седову, который во многом помог мне выяснить сущность метода А. Буземана.

² Условие это может быть выражено в виде

$$xw_x + yw_y + zw_z = 0, \quad \text{откуда} \quad x^*w_{x^*} + y^*w_{y^*} + z^*w_{z^*} = rw_z = 0$$

Тот же вывод можно повторить для u и v , но не для φ , так как $\varphi_r \neq 0$.

Итак, w есть действительная часть некоторой функции комплексного переменного, которую мы обозначим через

$$Af(\varepsilon e^{i\sigma}) = Af(\tau) = w + is$$

Из (2.4) и (2.6) следует, что для преобразования круга с центром в O и радиусом A на плоскости ξ, η (внутренность конуса Маха) на единичный круг плоскости τ с центром в начале координат мы, сохраняя неизменными полярные углы σ , должны радиусы-векторы преобразовать по формуле

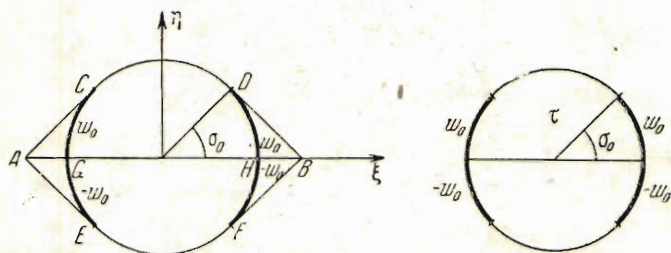
$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = A \operatorname{th} \theta = \frac{2A \operatorname{th} \theta / 2}{1 + \operatorname{th}^2 \theta / 2} = \frac{2A\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \quad (2.7)$$

§ 3. Вычисление составляющих скоростей по осям x и y . Имея функцию $f(\tau)$, можно интегрированием найти

$$\omega = u + iv = -\frac{1}{2} \int \left(\tau df + \frac{\bar{d}f}{\bar{\tau}} \right) \quad (3.1)$$

Эта формула получается посредством составления $d\omega = \omega_\xi d\xi + \omega_\eta d\eta$ и последующим преобразованием к переменным $\tau, \bar{\tau}$. Частные производные ω_ξ, ω_η вычисляются при помощи соотношений $u_x = v_y, u_z = w_x, v_z = w_y$, и уравнения (1.1). Заметим кстати, что согласно аналогии Буземана величинам u, v, w соответствуют у С. А. Чаплыгина $x, y, -\psi$, и формула (3.1) по существу совпадает с формулой С. А. Чаплыгина^[2] [гл. V, формула (94)].

§ 4. Граничные условия. Рассмотрим граничные условия, которые встретятся нам в задаче о стреловидном крыле. Если крыло не выходит из конуса Маха, то на круге $|\tau|=1$ добавочные скорости u, v, w равны нулю¹.



Фиг. 2.

Пусть мы имеем плоское крыло, образующее бесконечно малый угол σ с осью z и угол σ с осью x . Нормальная скорость $\operatorname{Im}(\omega e^{-i\sigma})$ вдоль него имеет постоянную величину. Отсюда, пользуясь (3.3), получаем

$$\operatorname{Im}(\omega e^{-i\sigma}) = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{A} \int \left[\frac{1}{\varepsilon} (dw - ids) + \varepsilon (dw + ids) \right] \right\} = \operatorname{const} \quad (4.1)$$

$$ds = 0$$

Пусть части стреловидного плоского крыла, бесконечно мало наклоненного

¹ Заметим, что вдоль тех частей конуса Маха, вдоль которых $d\omega = 0$, u и v также будут константами, так как из (3.1) при $\tau = e^{i\sigma}$ следует, что $d\omega = -\frac{1}{2} (e^{i\sigma} ds - i ds / e^{-i\sigma}) = 0$.

к плоскости x, z , выходят из конуса Маха (фиг. 2). Зона влияния выступающих частей крыла заполняет в пространстве внутренности конусов Маха, проведенных из каждой точки крыла. В плоскости $\xi\eta$ эта зона представляется областью $ACDBEF$, которая ограничена касательными AC, AE, DB, BF , проведенными из кромок крыла к конусу Маха и дугами CD и EF .

Течение вне конуса Маха составляется, очевидно, из плоских течений. Поэтому в каждой из областей ACG, AGE, DBH, FHB скорости и давления будут сохранять постоянные значения, причем при переходе через крыло ω будет менять знак. Для крыла, симметричного относительно оси η , граничные условия для $f(\tau)$ на соответствующих дугах круга будут $\omega = \omega_0$ на CG и HD , $\omega = -\omega_0$ на GE и FH , $\omega = 0$ на CD и EF (4.2)

§ 5. Стреловидное крыло, выходящее из конуса Маха. Мы рассмотрим только плоское стреловидное крыло с углом стреловидности γ (фиг. 1) симметричное по отношению к плоскости $x=0$, образующее с плоскостью $y=0$ малый угол β и, наконец, обрезанное по прямой, которую будем считать приближенно совпадающей с осью $\eta=0$.

Начнем анализ с того случая, когда концы крыла выходят за конус Маха ($\operatorname{tg} \gamma > A$). Функцию $f(\tau)$ легко построить по особенностям

$$\omega + is = Af(\tau) = \frac{i\omega_0}{\pi} \operatorname{lg} \frac{\tau^2 - e^{-2i\sigma_0}}{\tau^2 e^{-2i\sigma_0} - 1} \quad (5.1)$$

В справедливости (5.1) нетрудно убедиться и путем прямой проверки условий (4.1) и (4.2), так как аналитичность $Af(\tau)$ внутри круга $|\tau|=1$ очевидна.

Мы должны выразить ω_0 и σ_0 через задаваемые величины — угол атаки β (или, что одно и то же, через вертикальную скорость на крыле $v_0 = -W\beta$) и угол стреловидности γ . Из фиг. 1 и 2 легко усмотреть, что

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{A}{\cos \sigma_0} \quad (5.2)$$

Скорость c_0 можно выразить через ω_0 посредством интегрирования (3.1)

$$c_0 = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_1^0 \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right) \frac{df}{d\tau} d\tau = -\frac{\omega_0 \sin \sigma_0}{\pi A} \operatorname{Im} \left\{ \left[\operatorname{lg} \frac{(z - e^{-i\sigma_0})(z - e^{i\sigma_0})}{(z + e^{-i\sigma_0})(z + e^{i\sigma_0})} \right]_1^0 \right\}$$

Отсюда

$$\omega_0 = -\frac{Ac_0}{\sin \sigma_0} \quad \text{или} \quad \frac{\omega_0}{W} = \frac{\beta A}{\sin \sigma_0} \quad (5.3)$$

Вычислим теперь коэффициент подъемной силы крыла

$$C_y = \frac{2Y}{\rho W^2 S} = \frac{2}{W \operatorname{tg} \gamma} \int_{-\operatorname{tg} \gamma}^{\operatorname{tg} \gamma} \omega d\xi \quad (5.4)$$

где Y — подъемная сила крыла, ρ — плотность газа и $S = \operatorname{tg} \gamma$ — площадь крыла.

Замечая, что вдоль частей крыла, выходящих из конуса Маха, $w = \pm w_0$, получаем

$$C_y = \frac{2}{W \operatorname{tg} \gamma} \left[2w_0 (\operatorname{tg} \gamma - A) + \int_{-1}^1 w d \left(\frac{2A\tau}{1+\tau^2} \right) \right]$$

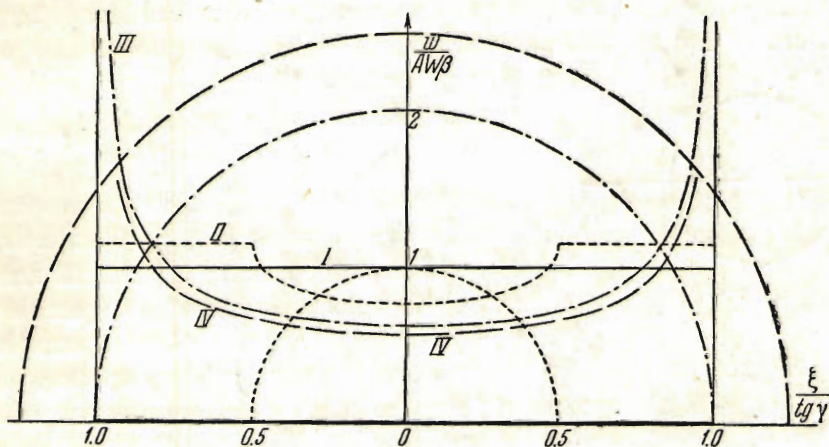
или, интегрируя по частям,

$$C_y = \frac{4w_0}{W \operatorname{tg} \gamma} \left[\operatorname{tg} \gamma - A \int_{-1}^1 \frac{\tau}{1+\tau^2} \frac{d(w+is)}{w_0} \right] \quad (5.5)$$

и, наконец, подробнее

$$C_y = \frac{4w_0}{W \operatorname{tg} \gamma} \left[\operatorname{tg} \gamma - \frac{4A}{\pi} \sin 2\sigma_0 \int_{-1}^1 \frac{\tau^2}{1+\tau^2} \frac{d\tau}{(\tau^2 - e^{-2i\sigma_0})(\tau^2 - e^{2i\sigma_0})} \right] \quad (5.6)$$

Интеграл, входящий в (5.6), удобнее всего вычислять, деформируя контур интегрирования в верхнюю полуокружность единичного радиуса с обходом полюсов $\tau_1 = e^{i\sigma_0}$, $\tau_2 = -e^{-i\sigma_0}$, $\tau_3 = i$ по бесконечно малым полуокружностям.



Фиг. 3.

Из (5.5) и граничных условий на конусе Маха легко усмотреть, что интегралы по дугам верхней полуокружности $|\tau| = 1$ будут мнимыми и, очевидно, взаимно уничтожаются. Вычисление C_y сведется, таким образом, к нахождению полувычетов в точках τ_1 , τ_2 , τ_3 . После вычисления получим

$$\int_{-1}^1 \frac{\tau}{1+\tau^2} \frac{d(w+is)}{w_0} = \frac{1}{\cos \sigma_0} - \operatorname{tg} \sigma_0$$

Отсюда, используя (5.6) и (5.3), получаем окончательно

$$C_y = 4\beta A = \frac{4\beta}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (5.7)$$

Эта формула совпадает с известной формулой Аккерета^[3] для плоского крыла, которое является частным случаем стреловидного (при $\gamma = \pi/2$).

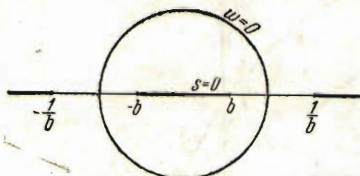
Распределение подъемной силы, или, точнее, величины $\omega/(AW\beta)$, пропорциональной интенсивности подъемной силы, для стреловидного крыла, выходящего из конуса Маха, показано на фиг. 3 (кривая *II*). На частях крыла, выходящих из конуса Маха, интенсивность подъемной силы постоянна. Внутри конуса Маха кривая *II* рассчитывалась по формуле (5.8), вытекающей из (5.1):

$$\frac{\omega}{AW\beta} = \frac{1}{\sin \alpha_0} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\cos \alpha_0 (1 - \tau^2)}{\sin \alpha_0 (1 + \tau^2)} \right) \quad (5.8)$$

По оси абсцисс откладывались значения ξ , отнесенные к половине размаха крыла. Конусы Маха на фиг. 3 изображены в виде полукругов, вычерченных соответствующим пунктиром. Чем ближе конус Маха приближается к кромкам крыла, тем интенсивнее работают края крыла (при $\operatorname{tg} \gamma/A = 1$, кривая *III*, на краях крыла $\omega/(AW\beta) = \infty$). При $A/\operatorname{tg} \gamma = 0$ (случай Аккерета) интенсивность подъемной силы вдоль крыла постоянна. Кривая *IV* дает распределение интенсивности подъемной силы для крыла, расположенного внутри конуса Маха (см. § 6). В этом случае на краях крыла $\omega/(AW\beta) = \infty$.

§ 6. Стреловидное крыло, расположенное внутри конуса Маха. Рассмотрим теперь случай, когда крыло не выходит из конуса Маха ($\operatorname{tg} \gamma < A$). В плоскости τ крыло изобразится отрезком действительной оси от $-b$ до b , где согласно (2.7)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2Ab}{1 + b^2} \quad (6.1)$$



Фиг. 4.

Условия (4.1) и (4.2) в плоскости τ принимают вид: $\omega = 0$ на круге, $s = 0$ на крыле.

Из симметрии граничных условий для $Af(\tau)$ следует, что при переходе через крыло ω меняет знак. Функция $Af(\tau)$ может быть продолжена по принципу зеркального отображения на всю плоскость с разрезами от $-\infty$ до $-1/b$, от $-b$ до b и от $1/b$ до ∞ (фиг. 4). Проще всего построить $\omega + is = Af(\tau)$ по особым точкам и нулям:

$$\omega + is = B \frac{\tau^2 + 1}{\sqrt{(b^2 - \tau^2)(1/b^2 - \tau^2)}} \quad (6.2)$$

Здесь B обозначает действительную константу, подлежащую определению. Формулу (6.2) легко проверить и непосредственно. Найдем величину v_0 на пластинке. Для этого выполним в (3.1) интеграцию по мнимому радиусу. Так как вдоль мнимой оси $\tau = -\bar{\tau}$, $-\bar{d}f/d\bar{\tau} = df/d\tau$, то

$$(\omega)_{\tau=0} = -\frac{1}{2} \int_{-i}^0 \frac{\tau^2 - 1}{\tau} \frac{df}{d\tau} d\tau = -B \frac{(b+1/b)^2}{2A} \int_0^i \frac{(1-\tau^2)^2 d\tau}{(b^2 - \tau^2)^{3/2} (1/b^2 - \tau^2)^{3/2}}$$

Отсюда

$$v_0 = -\frac{B(b+1/b)^2}{2A} \int_0^1 \frac{(1+\varepsilon^2)^2 d\varepsilon}{(b^2 + \varepsilon^2)(1/b^2 + \varepsilon^2)\sqrt{(b^2 + \varepsilon^2)(1/b^2 + \varepsilon^2)}} \quad (6.3)$$

Полагая

$$\varepsilon = b \operatorname{tg} \varphi, \quad \sqrt{1 - b^4} = k, \quad b^2 = k', \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = 1/\sqrt{k'} \quad (6.4)$$

мы легко преобразуем интеграл, стоящий в правой части (6.3), к каноническому виду:

$$v_0 = -\frac{Bb(b+1/b)^2}{2A} \int_0^{\varphi_1} \frac{[1-(1-k')\sin^2\varphi]^2 d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

или

$$v_0 = -\frac{B}{2A\sqrt{k'}} \left[k'^2 \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + 2k'F(\varphi_1, k) + E(\varphi_1, k) \right]$$

где $F(\varphi_1, k)$ и $E(\varphi_1, k)$ — эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода. Как известно ([4], стр. 37, формула 126)

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{3/2}} = \frac{E(\varphi_1, k)}{k'^2} - \frac{k^2}{k'^2} \frac{\sin\varphi_1 \cos\varphi_1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}} = \frac{E(\varphi_1, k)}{k'^2} - \frac{1-k'}{k'^2}$$

Отсюда

$$-\frac{B}{Av_0} = \frac{\sqrt{k'}}{k'F(\varphi_1, k) + E(\varphi_1, k) - (1-k')/2} \quad (6.5)$$

При помощи (6.5) из (6.2), а также из (5.1) при помощи (5.3) получаем, что в предельном случае, когда крыло касается конуса Маха ($\sigma_0 = 0, b = 1$),

$$\omega + is = \frac{2v_0 A}{\pi} \frac{\tau^2 + 1}{\tau^2 - 1} \quad (6.2a)$$

Займемся теперь вычислением коэффициента подъемной силы крыла. Переходя в (5.4) при помощи (2.7) к переменной ε , получаем

$$C_y = \frac{4A}{W \operatorname{tg} \gamma} \int_{-b}^b \omega \frac{1-\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2} d\varepsilon \quad (6.6)$$

Интеграл, входящий в (6.6), можно заменить контурным интегралом вокруг крыла

$$C_y = \frac{2A}{W \operatorname{tg} \gamma} \int (w + is) \frac{1-\tau^2}{(1+\tau^2)^2} d\tau \quad (6.7)$$

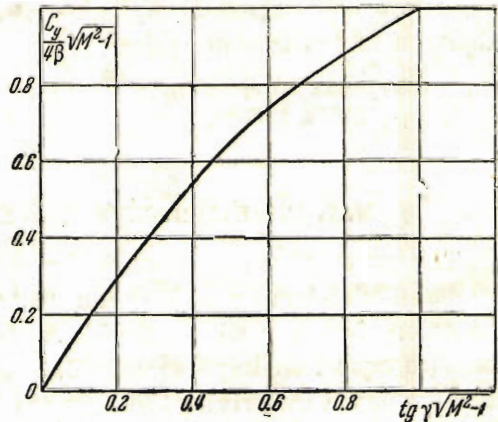
Этот интеграл удобнее всего вычислять, деформируя контур интегрирования в единичный круг с обходом полюсов в точках $\tau = \pm i$ по бесконечно малым полуокружностям. Так как на круге $\omega = 0$, то, как легко видеть, интегралы по дугам окружности будут мнимыми и взаимно уничтожатся. Вычисление C_y сводится, таким образом, к нахождению полувычетов в точках $\tau = \pm i$

$$C_y = \frac{2AB}{W \operatorname{tg} \gamma} \int \frac{1-\tau^2}{\sqrt{(b^2-\tau^2)(1/b^2-\tau^2)}} \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \frac{2\pi B}{W}$$

откуда

$$\frac{C_y}{\beta A} = \frac{2\pi \sqrt{k'}}{k'F(\varphi_1, k) + E(\varphi_1, k) - (1-k')/2} \quad (6.8)$$

Из формул (5.7), (6.1), (6.8) видно, что $C_y \sqrt{M^2-1}/(4\beta)$ является функцией $\sqrt{M^2-1} \operatorname{tg} \gamma$. Расчеты (фиг. 5) можно производить, задаваясь различными значениями параметра k . Центр давления треугольного крыла расположен в центре тяжести треугольника.



Фиг. 5.

§ 7. Замечания о сопротивлении. Когда крыло выходит из конуса Маха, скорости на кромках крыла будут конечны, и качество крыла $Y/X = 1/\beta$, где X — сопротивление. В том случае, когда крыло находится целиком внутри конуса Маха, вследствие наличия на передних острых кромках бесконечных скоростей следует ожидать появления подсосывающих сил, увеличивающих качество крыла.

Сопротивление крыла может быть вычислено при помощи теоремы количества движения, примененной к объему газа, заключающемуся в цилиндре, который охватывает крыло и конус Маха, причем одно из оснований цилиндра лежит в плоскости ξ , η , а другое влево от начала координат в области невозмущенного потока. Имеем

$$X = \frac{\rho}{2} \iint [u^2 + v^2 + (M^2 - 1)w^2] d\xi d\eta \quad (7.1)$$

Здесь интеграция распространяется на все основание цилиндра в плоскости ξ , η . При выводе (7.1) мы воспользовались также интегралом Бернулли, в котором после разложения по степеням u , v , w пренебрегали всеми членами, содержащими дополнительные скорости в степенях выше второй, и воспользовались условием адиабатичности и уравнением непрерывности в интегральной форме.

Поступила в редакцию
24 IV 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

M. I. GUREVICH. LIFT FORCE OF AN ARROW-SHAPED WING

The paper takes up the conical supersonic flow of an ideal gas ($M = W/a > 1$) for small additional velocities u , v , w . As is known, A. Buseman reduced the determination of u , v , w within the Mach cone to the solution of the two-dimensional Laplace equation. In paragraphs 2, 3, 4, the author gives a variant for the procedure employed in deriving the Buseman formula. Expression (2.7) is employed for the transformation of the radius vector. Expression (3.1) gives the relationship between the additional velocities. The boundary conditions are outlined in paragraph 4. Paragraph 5 investigates the lift force of a plane triangular wing whose edges protrude beyond the Mach cone. The additional velocity along the z -axis is determined by formula (5.1); the expression for the constant coefficient of the lift force by (5.7). Paragraph 6 takes up a triangular wing entirely within the Mach cone. Velocity is determined by (6.2), and coefficient of lift force by (6.8). The centre of pressure on the triangular wing coincides with its centre of gravity.

ЛИТЕРАТУРА

1. Busemann A. Infinitesimale kegelige Überschallströmung. Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung. 1943. Н. 3.
2. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Полное собрание соч. Т. II. Изд. АН СССР. 1933.
3. Ackeret J. Luftkräfte auf Flügel, die mit grösserer als Schallgeschwindigkeit bewegt werden. «Zeitschr. f. Flugt. u. Motorl». 1928. Т. 16.
4. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. Изд. АН СССР. 1941.