

К ТЕОРИИ СОПЛА ЛАВАЛЯ

С. В. Фалькович

(Москва)

В настоящей работе изучается движение газа в плоско-параллельном сопле Лавалля в окрестности поверхности перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым. Впервые эту задачу рассматривал Мейер^[1], разыскивая потенциал скоростей в виде степенного ряда по координатам x , y на плоскости потока. Далее случай сопла с плоской поверхностью перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым разбирался в одной работе С. А. Христиановича с сотрудниками^[2]. Для расчета сверхзвуковой части сопла, примыкающей к линии перехода, С. А. Христианович применил разложение угла наклона скорости и некоторой функции модуля скорости в степенные ряды, взяв в качестве независимых переменных потенциал скоростей и функцию тока. Наконец, в недавно появившейся работе Ф. И. Франкль^[3], применяя метод годографа С. А. Чаплыгина, производит подробное исследование характера потока около линии перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым. Используя результаты исследования Трикоми по теории дифференциальных уравнений смешанного эллиптического-гиперболического типа, Ф. И. Франкль вводит в качестве одной из независимых переменных вместо модуля скорости некоторую, специальным образом выбранную функцию этого модуля, вследствие чего ему удастся выяснить характер особенности потока в точке пересечения линии перехода с осью симметрии (центре сопла) и изучить поведение функции тока в окрестности этой точки, выделив главный член, имеющий вместе со своими производными наибольшую величину сравнительно с соответствующими поправками. Этот главный член представляется в работе Ф. И. Франкля в виде линейной комбинации двух гипергеометрических функций. Для нахождения этой линейной комбинации приходится решать ряд краевых задач, вследствие чего весь анализ получается довольно сложным.

В настоящей работе для исследования потока применяется другой метод, основанный на преобразовании уравнений движения к виду, который можно назвать каноническим для системы дифференциальных уравнений смешанного эллиптического-гиперболического типа, к которому относится система уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости. Изучая поведение интегралов этой системы в окрестности параболической линии, удастся легко выделить главный член решения в виде полинома третьей степени, вследствие чего расчет переходной части сопла значительно упрощается.

§ 1. Основные уравнения. Уравнения плоского установившегося безвихревого движения идеального газа при отсутствии трения и теплопроводности имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial (u\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial (v\varphi)}{\partial y} = 0. \quad (1.1)$$

$$\frac{W^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \quad (1.2)$$

где u, v — составляющие скорости по осям x и y , ρ — плотность, p — давление $W = \sqrt{u^2 + v^2}$ — величина скорости, $\kappa = c_p / c_v$, ρ_0 и p_0 — плотность и давление покоящегося газа.

Уравнения (1.1) представляют собой условие отсутствия вихрей и уравнение неразрывности. Уравнение (1.2) есть уравнение Бернулли для газа при адиабатическом движении, для которого имеем

$$\frac{p}{\rho_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa \quad (1.3)$$

для скорости звука a , при этом будем иметь

$$a^2 = \kappa \frac{p}{\rho} \quad (1.4)$$

Из (1.2), (1.3) и (1.4) легко получим уравнение

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\kappa-1}{2} \frac{W^2}{a_0^2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (1.5)$$

($a_0^2 = \kappa p_0 / \rho_0$ — скорость звука в покоящемся газе), из которого находим, что

$$\frac{d}{dW} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{W}{a^2} \quad (1.6)$$

Из уравнений (1.1) следует, что существуют две функции — потенциал скоростей $\varphi(x, y)$ и функция тока $\psi(x, y)$, определяемые уравнениями

$$d\varphi = u dx + v dy, \quad d\psi = \frac{\rho}{\rho_0} (-v dx + u dy) \quad (1.7)$$

Введем вместо составляющих скорости u и v полярные координаты, положив $u = W \cos \theta$, $v = W \sin \theta$, где θ — угол между вектором скорости и осью x , и разрешим уравнения (1.7) относительно dx и dy ; получим

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\cos \theta}{W} d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \theta}{W} d\psi \\ dy &= \frac{\sin \theta}{W} d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \theta}{W} d\psi. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Если рассматривать x и y , а также W и θ как функции переменных φ и ψ , то dx и dy должны быть полными дифференциалами, в силу чего необходимо, чтобы имели место равенства

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\cos \theta}{W} \right) = - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \theta}{W} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\sin \theta}{W} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \theta}{W} \right)$$

Выполняя дифференцирование и учитывая при этом, что согласно (1.5) ρ_0/ρ зависит лишь от величины скорости W , и воспользовавшись (1.6), получим

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \psi} + \frac{\cos \theta}{W} \frac{\partial W}{\partial \psi} &= + \frac{\rho_0}{\rho} \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \theta}{W} \left(1 - \frac{W^2}{a^2}\right) \frac{\partial W}{\partial \varphi} \\ \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial \psi} - \frac{\sin \theta}{W} \frac{\partial W}{\partial \psi} &= - \frac{\rho_0}{\rho} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \theta}{W} \left(1 - \frac{W^2}{a^2}\right) \frac{\partial W}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно производных $\partial \theta / \partial \varphi$ и $\partial \theta / \partial \psi$, находим окончательно

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{\rho}{\rho_0 W} \frac{\partial W}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{a^2 - W^2}{W^3} \frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.9)$$

Эта система дифференциальных уравнений будет эллиптического типа, когда величина скорости W меньше скорости звука, и гиперболического при сверхзвуковых скоростях.

Введем теперь в рассмотрение вместо скорости W новую функцию η , связанную с W следующим образом^[3]:

$$\eta = \left(\frac{3}{2} \int \frac{V a^2 - W^2}{a W} dW \right)^{2/3} \quad (1.10)$$

Тогда уравнения (1.9) примут вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial \psi} + b(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0, \quad \eta \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} - \frac{1}{b(\eta)} \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = 0 \quad (1.11)$$

где

$$b(\eta) = \frac{\rho_0}{\rho} \sqrt{\frac{a^2 - W^2}{\eta a^2}} \quad (1.12)$$

есть вследствие (1.10) функция переменного η .

Уравнения (1.11) и являются основными уравнениями для исследования плоских безвихревых движений газа при переходе скорости течения от дозвуковой к сверхзвуковой.

В некоторых случаях в этих уравнениях удобнее за независимые переменные выбирать θ и η и рассматривать в качестве искомым функций φ и ψ . После такого преобразования уравнения (1.11) примут вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + b(\eta) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \eta b(\eta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

§ 2. Исследование переменной η . Рассмотрим подробнее переменную η , определенную уравнением (1.10). Для вычисления интеграла, входящего в это уравнение, заметим, что квадрат скорости звука

$$a^2 = \frac{k+1}{2} a_*^2 - \frac{k-1}{2} W^2 \quad (2.1)$$

Подставляя это в (1.10), будем иметь

$$\eta = \left(\frac{3}{2} \int_{\lambda}^1 \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^2/h^2} \frac{d\lambda}{\lambda}} \right)^{2/3} \quad \left(\frac{W}{a_*} = \lambda, \quad h^2 = \frac{x+1}{x-1} \right) \quad (2.2)$$

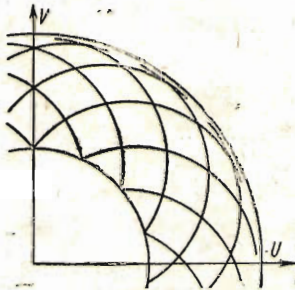
Выполняя интегрирование, получим

$$\eta = \left\{ \frac{3}{4} \ln \left[\left(\frac{1 - \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{h^2-\lambda^2}}}{1 + \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{h^2-\lambda^2}}} \right)^h \frac{1 + h \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{h^2-\lambda^2}}}{1 - h \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{h^2-\lambda^2}}} \right] \right\}^{2/3} \quad (2.3)$$

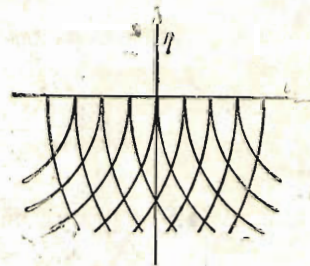
Разлагая (2.3) в ряд, найдем

$$\eta = \left(\frac{h(h^2-1)}{2} \right)^{2/3} \frac{1-\lambda^2}{h^2-\lambda^2} \left[1 + O(1-\lambda^2) \right]^{2/3} \quad (2.4)$$

Из (2.3) следует, что $\eta > 0$ при $\lambda < 1$ и $\eta < 0$ при $\lambda > 1$, т. е. в плоскости переменных θ, η области дозвуковых скоростей будет соответствовать область, лежащая в верхней полуплоскости, сверхзвуковым скоростям соот-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

ветствует область, лежащая в нижней полуплоскости. Линия перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым соответствует линии $\eta = 0$, т. е. ось абсцисс. Из (1.10) следует, что значению скорости $W = 0$ на плоскости θ, η соответствует бесконечно удаленная точка. При $\lambda > 1$ выражение (2.3) примет вид

$$\eta = - \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(h \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{h^2-1}{\lambda^2-\lambda^2}} - \operatorname{arctg} h \sqrt{\frac{\lambda^2-1}{h^2-\lambda^2}} \right)^{2/3} \quad (2.5)$$

Характеристики в плоскости годографа скорости для плоского безвихревого движения газа, как известно, являются эциклоидами (Фиг. 1), уравнения которых имеют вид^[4]

$$\theta = C \pm \left(h \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\lambda^2-1}{h^2-\lambda^2}} - \operatorname{arctg} h \sqrt{\frac{\lambda^2-1}{h^2-\lambda^2}} \right)$$

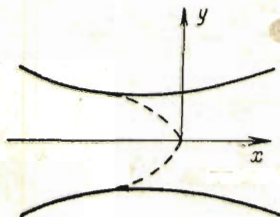
Так как при точечном преобразовании характеристики переходят в характеристики, то, пользуясь (2.5), найдем уравнения характеристик в плоскости переменных θ, η

$$\theta = \pm \frac{2}{3} \left(-\eta \right)^{3/2} + C \quad (2.6)$$

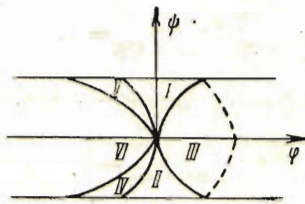
из которых следует, что характеристики примут вид полукубических парабол с точками возврата на оси абсцисс (Фиг. 2).

§ 3. Дифференциальные уравнения движения газа в окрестности звуковой линии. Рассмотрим течение в сопле Лавалья вблизи линии перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым. Линию эту будем в дальнейшем называть звуковой линией.

Если перемещаться вдоль прямой, перпендикулярной оси симметрии сопла, удаляясь от оси, то при этом мы будем пересекать линии тока с все увеличивающейся кривизной и, следовательно, встречать частицы газа, обладающие все большей скоростью, следовательно, звуковая линия должна быть кривой, выпуклой в сторону сверхзвуковых скоростей¹ с вершиной на оси симметрии (фиг. 3). Точку пересечения звуковой линии с осью симметрии будем, следуя Франклю, называть центром сопла.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

В плоскости переменных $\varphi\psi$ область течения изобразится в виде полосы, ширина которой определяется расходом газа, протекающего через сопло (фиг. 4).

За начало координат в плоскости $\varphi\psi$ выберем точку, соответствующую центру сопла на плоскости потока.

Определение потока сводится к отысканию двух функций $\eta = \eta(\varphi, \psi)$ и $\theta = \theta(\varphi, \psi)$, удовлетворяющих уравнениям (1.11). Так как поток должен быть симметричным относительно линии тока $\psi = 0$, то необходимо, чтобы искомые функции η и θ удовлетворяли условиям

$$\eta(\varphi, \psi) = \eta(\varphi, -\psi), \quad \theta(\varphi, \psi) = -\theta(\varphi, -\psi), \quad \eta(0, 0) = 0 \quad (3.1)$$

последнее следует из (2.2).

Разыскивая решение уравнений (1.11) в виде степенных рядов по переменным φ и ψ , будем иметь, принимая во внимание (3.1):

$$\begin{aligned} \eta &= a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\psi^2 + a_4\varphi^3 + a_5\varphi\psi^2 + \dots \\ \theta &= b_1\varphi\psi + b_2\varphi^2\psi + b_3\psi^3 + b_4\varphi^2\psi + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

откуда следует, что если рассматривать течение в окрестности начала координат, т. е. считать φ и ψ малыми величинами, то из (3.2) будем иметь

$$\eta = O(\varphi), \quad \theta = O(\varphi\psi), \quad \frac{\partial \eta}{\partial \psi} = O(\psi), \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = O(\psi), \quad \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = O(1), \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = O(\varphi) \quad (3.3)$$

¹ Когда линии тока имеют точки нулевой кривизны, звуковая линия будет прямой, перпендикулярной оси симметрии; этот случай рассмотрен С. А. Христиановичем [2].

Пользуясь (2.1) и обозначениями, введенными в (2.2), выражение (1.12) для функции $b(\eta)$ можно привести к виду

$$b(\eta) = \frac{\rho_0}{\rho} \sqrt{\frac{h(1-\lambda^2)}{(h^2-\lambda^2)\eta}}$$

откуда, воспользовавшись (2.4), найдем

$$b(0) = \frac{\rho_0}{\rho} (x+1)^{1/3} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} (k+1)^{1/3}$$

Учитывая теперь порядок малости всех членов, входящих в уравнения (1.14), заключаем, что вблизи начала координат система уравнений (1.11) может быть заменена следующими уравнениями:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \psi} + b(0) \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0, \quad \eta \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} - \frac{1}{b(0)} \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = 0$$

Полагая $b(0)\psi = \bar{\psi}$, получим окончательно

$$\frac{\partial \eta}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0, \quad \eta \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} - \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\psi}} = 0 \quad (3.4)$$

отбрасывая для простоты письма черту над ψ .

§ 4. Исследование потока в окрестности центра сопла. Легко видеть, что функции

$$\theta = A^2 \varphi \psi - \frac{A^3}{3} \psi^3, \quad \eta = A\varphi - \frac{A^2}{2} \psi^2 \quad (4.1)$$

где A — произвольная постоянная, являются интегралами системы уравнений (3.4) и удовлетворяют условиям (3.1).

Выясним смысл постоянной A . Из второго уравнения (4.1) имеем $\eta = A\varphi$ вдоль оси симметрии сопла ($\psi = 0$). Дифференцируя, получим

$$A = \frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{d\eta}{dW} \frac{dW}{dx} \frac{dx}{d\varphi}$$

Далее, пользуясь последовательно (1.10) и (2.1), находим

$$\frac{d\eta}{dW} = -\frac{1}{aW} \sqrt{\frac{a^2 - W^2}{\eta}} = -\frac{ha_*}{\lambda} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{\eta(h^2 - \lambda^2)}}$$

Кроме того, вдоль линии $\psi = 0$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{W}, \quad \frac{dW}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Следовательно, для A получаем

$$A = \left(-\frac{h}{W^2} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{\eta(h^2 - \lambda^2)}} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -\frac{(x+1)^{1/3}}{a_*^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} \quad (4.2)$$

причем для получения последнего результата использовано соотношение (2.4).

Таким образом, величина A пропорциональна значению производной от скорости в центре сопла.

Мы предполагаем, что $\partial u / \partial x > 0$, поэтому A будет величиной отрицательной.

Вдоль звуковой линии $\eta = 0$. Поэтому согласно второму равенству (4.1) получим уравнение звуковой линии

$$\varphi = \frac{A}{2} \psi^2 \quad (4.3)$$

т. е. в плоскости $\varphi\psi$ звуковая линия будет парабола.

Из (3.4) найдем, что дифференциальное уравнение характеристик имеет вид

$$\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2 = -\eta$$

Подставляя значение η из (4.1), получим

$$\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2 = \frac{A^2\psi^2}{2} - A\varphi$$

Для интегрирования этого уравнения положим

$$A\varphi = \frac{x^2}{2} - x^2y^2, \quad A\psi = x$$

тогда оно примет вид

$$\left(1 - 2y^2 - 2xy \frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2. \quad \text{или} \quad 1 - 2y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} = \pm y$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем уравнения характеристик

$$x(y+1)^{2/3}(2y-1)^{1/3} = C, \quad x(y-1)^{2/3}(2y+1)^{1/3} = C$$

Чтобы получить характеристики, проходящие через начало координат, необходимо положить $C = 0$. Получим, возвращаясь к переменным φ , ψ ,

$$\varphi = -\frac{A\psi^2}{2}, \quad \varphi = \frac{A\psi^2}{4} \quad (4.4)$$

Следовательно, характеристики, проходящие через начало координат в плоскости $\varphi\psi$, являются параболлами, касающимися в этой точке между собой и касающимися звуковой линии (фиг. 4). Вследствие этого начало координат будет особой точкой интегралов уравнений (3.4), определяющих течение в сопле.

Рассмотрим характер этой особенности. Как видно из фиг. 4, характеристики и звуковая линия разбивают окрестность центра сопла на 6 областей. Исследуем, как отображается окрестность центра сопла на плоскость переменных $\theta\eta$ интегралами (4.1). Исключая из (4.1) переменную φ , получим для определения функции тока кубическое уравнение

$$A^3\psi^3 + 3A\eta\psi - 3\theta = 0 \quad (4.5)$$

Это уравнение имеет один вещественный корень, когда дискриминант его $\delta = 9\theta^2/4 + \eta^3 > 0$, и три вещественных корня, когда $\delta < 0$. Так как точке ($\varphi = 0, \psi = 0$) соответствует согласно (4.1) точка ($\theta = 0, \eta = 0$), то уравнения характеристик, соответствующие (4.1), будут согласно (2.6)

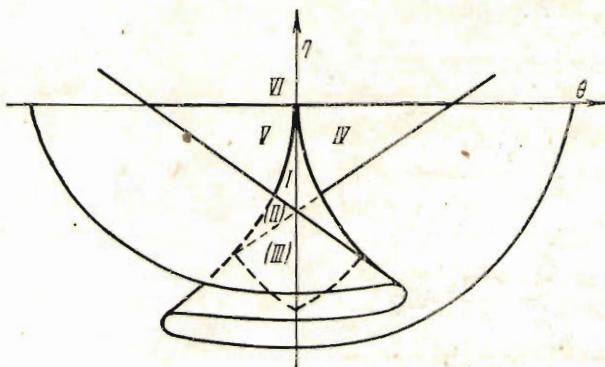
$$\frac{9}{4}\theta^2 + \eta^3 = 0$$

Следовательно, области I, II и III плоскости отобразятся на одну и ту

же область плоскости $\theta\eta$, лежащую между характеристиками $\theta = \pm^2/3 (-\eta)^{3/2}$.

Далее, линиям тока $\psi = \pm q$, как видно из (4.5), соответствуют в плоскости $\theta\eta$ прямые

$$\eta = \mp \frac{\theta}{q} - \frac{A^2 q^2}{2}$$



Фиг. 5.

Таким образом отображение окрестности центра сопла в плоскости $\theta\eta$ будет иметь вид складчатой поверхности, изображенной на фиг. 5. Соответствующие области на фиг. 4 и 5 обозначены одинаковыми номерами.

Для вычисления линий тока в плоскости течения воспользуемся формулами (1.8), в которых надо положить $d\psi = 0$, после чего они примут вид

$$dx = \frac{\cos \theta}{W} d\varphi, \quad dy = \frac{\sin \theta}{W} d\varphi$$

Подставляя вместо θ ее значение из формул (4.1) и замечая, что величина скорости W есть согласно (1.10) функция переменного η , будем иметь для линий тока $\psi = \pm q$

$$dx = \frac{1}{W(\eta)} \cos \left(\frac{A^3 q^3}{3} - A^2 q \varphi \right) d\varphi, \quad dy = \pm \frac{1}{W(\eta)} \sin \left(\frac{A^3 q^3}{3} - A^2 q \varphi \right) d\varphi$$

Интегрируя, получим

$$x = \int_0^{\varphi} \frac{1}{W(\eta)} \cos \left(\frac{A^3 q^3}{3} - A^2 q \varphi \right) d\varphi, \quad y = \pm \left(\int_0^{\varphi} \frac{1}{W(\eta)} \sin \left(\frac{A^3 q^3}{3} + A^2 q \varphi \right) d\varphi + H \right)$$

где H — ширина сопла в критическом сечении.

В формулах (4.6) надо принимать согласно (4.1)

$$\eta = A\varphi - \frac{A^2}{2} q^2$$

Вычисление интегралов в (4.6) сводится, очевидно, к вычислению двух интегралов вида

$$I_1 = \int_0^{\varphi} \frac{\cos A^2 q \varphi}{W(\eta)} d\varphi, \quad I_2 = \int_0^{\varphi} \frac{\sin A^2 q \varphi}{W(\eta)} d\varphi$$

при помощи которых x и y выражаются следующим образом:

$$x = I_1 \cos \frac{A^3 q^3}{3} + I_2 \sin \frac{A^3 q^3}{3}, \quad y = \pm \left(I_2 \sin \frac{A^3 q^3}{3} - I_1 \cos \frac{A^3 q^3}{3} \right) \quad (4.7)$$

§ 5. Сопло с поверхностью слабого разрыва. Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда вдоль линий Маха, исходящих из центра сопла, образуются слабые разрывы. Для этого необходимо и достаточно, чтобы производная $(\partial u / \partial x)_{y=0}$ имела разрыв в центре сопла^[3]; при этом предполагаем, что оба значения $[(\partial u / \partial x)_{y=0}]_{x=+0}$ и $[(\partial u / \partial x)_{y=0}]_{x=-0}$ положительны.

Из (4.1) следует, что величина A будет иметь в областях VI, V, IV (фиг. 4) значение $A = A_1$, а области III некоторое другое значение $A = A_2$, причем согласно (4.2) $A_1 < 0$ $A_2 < 0$.

Из формул (4.1) заключаем, что в областях VI, V и IV будем иметь

$$\theta = A_1^2 \varphi \psi - \frac{A_1^3}{6} \psi^3, \quad \eta = A_1 \varphi - \frac{A_1^2}{2} \psi^2 \quad (5.1)$$

а для области III

$$\theta = A_2^2 \varphi \psi - \frac{A_2^3}{6} \psi^3, \quad \eta = A_2 \varphi - \frac{A_2^2}{2} \psi^2 \quad (5.2)$$

Уравнение характеристики, разделяющей области IV и V от областей I и II, и уравнение характеристики, отделяющей области I и II от области III, согласно (4.4) соответственно будут

$$\varphi = \frac{A_1 \psi^2}{4}, \quad \varphi = -\frac{A_2 \psi^2}{2} \quad (5.3)$$

Подставляя первое из этих уравнений в (5.1) и второе в (5.2), получим

$$\theta = -\frac{A_1^3 \psi^3}{12}, \quad \eta = -\frac{A_1^2 \psi^3}{4} \quad \text{на} \quad \varphi = +\frac{A_1 \psi^2}{4} \quad (5.4)$$

$$\theta = +\frac{2}{3} A_2^3 \psi^3, \quad \eta = -A_2 \psi^2 \quad \text{на} \quad \varphi = -\frac{A_2 \psi^2}{2} \quad (5.5)$$

Чтобы течение в сопле не имело скачков, необходимо определить θ и η в областях I и II из уравнений (3.4) так, чтобы вдоль характеристик выполнялись условия (5.4) и (5.5). Для интегрирования системы (3.4) положим

$$\eta = f \left(\frac{\varphi}{\psi^2} \right) \psi^2, \quad \theta = g \left(\frac{\varphi}{\psi^2} \right) \psi^3 \quad (5.6)$$

где f и g — функции, подлежащие определению.

Уравнения (3.4) при такой подстановке обратятся в систему обыкновенных дифференциальных уравнений с независимым переменным $t = \varphi / \psi^2$

$$2f - 2tf' - g' = 0, \quad ff' + 3g - 2tg' = 0 \quad (5.7)$$

Исключая отсюда G' , найдем

$$g = \frac{1}{3} [4tf - (f + 4t^2) f'] \quad (5.8)$$

Дифференцируя (5.8) и подставляя результат в первое из уравнений (5.7), получим дифференциальное уравнение второго порядка для определения f

$$(4t^2 + f) f'' + f'^2 - 2tf' + 2f = 0 \quad (5.9)$$

Из (5.6), (5.4) и (5.5) следует, что граничные условия для функции f будут

$$f = -\frac{A_1^2}{4} \quad \text{при} \quad t = \frac{A_1}{4}, \quad f = -A_2 \quad \text{при} \quad t = -\frac{A_2}{2} \quad (5.10)$$

Для интегрирования уравнения (5.9) запишем его в виде

$$\left(\frac{f' + 2t}{2tf' - f} \right)' = 0$$

(при этом теряются решения $2tf' - f = 0$, т. е. $f = c\sqrt{t}$, которые не удовлетворяют условиям (5.10)). Выполняя квадратуру, получим

$$\frac{f' + 2t}{2tf' - f} = \frac{1}{2c_1}, \quad \text{или} \quad f' - \frac{1}{2(t-c_1)}f = \frac{2c_1 t}{t-c_1}$$

т. е. линейное уравнение, после интегрирования которого найдем

$$f = 4c_1 t - 8c_1^2 + c_2 \sqrt{t-c_1} \quad (5.11)$$

Граничные условия (5.10), которым должно удовлетворять найденное решение (5.11), имеют вид: $f = f_1$ при $t = t_1$ и $f = f_2$ при $t = t_2$, причем из (5.10) легко видеть, что точки (t_1, f_1) , (t_2, f_2) лежат на параболе $f = -4t^2$ и $t_1 < 0 < t_2$. Следовательно, чтобы удовлетворить граничным условиям, надо из семейства парабол (5.11) выбрать параболу, проходящую через точки (t_1, f_1) и (t_2, f_2) . Удовлетворяя этому условию, получим

$$c_1 = -\frac{t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2}{3(t_1 + t_2)}, \quad c_2^2 = \frac{16(t_1 - t_2)^2 (t_1 + 2t_2)^2 (2t_1 + t_2)^2}{27(t_1 + t_2)^3}$$

Потребуем, чтобы вдоль линии тока скорость по течению монотонно возрастала, т. е. η монотонно убывала. Так как согласно (5.6) $\eta = f\psi^2$, то следовательно, должно быть $f' < 0$ в интервале $t_1 < t < t_2$. Для этого необходимо, чтобы $c_2 < 0$, что возможно лишь при $2t_1 + t_2 < 0$ и $t_1 + 2t_2 > 0$, откуда, вспоминая (5.10), получим условие

$$A_1 \leq A_2 \leq \frac{A_1}{2}$$

при котором возможно течение без скачков.

Поступила в редакцию
4 V 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

S. V. FALKOVICH. ON THE THEORY OF THE LAVAL NOZZLE

The author investigates a plane streamline flow of a gas in a Laval nozzle in the vicinity of the transition line (sound line) between the subsonic and the supersonic velocities. The investigation rests on the basic equations of motion (1.9). The equations are reduced to the form (1.11) by means of (1.10). Equations (1.11), in the domain adjacent to the sound line may be replaced by equations (3.4) for which the exact solution (3.5) is obtained.

An analysis of the solution leads us to the conclusion that the point of intersection of the axis of symmetry of the nozzle and the sound line is a singular point (fig. 5). The streamline function is determined by equation (4.5). The Frankl results [3] presented here are thus obtained by a simpler procedure.

ЛИТЕРАТУРА

1. Meyer. Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt. *Forschungshefte*, 1908. Nr. 62.
2. Левин, Астров, Павлов, Христианович. О расчете сопел Лавали. *Прикладная математика и механика*. 1943. Т. VII. Вып. I.
3. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавали. *Известия Академии Наук СССР. Серия математическая*. 1945. Т. IX.
4. Кочин, Кибель и Розе. *Теоретическая гидромеханика*. ОГИЗ. М.-Л. 1941. Т. 2.