

ДВИЖЕНИЕ ГАЗА В МЕСТНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЗОНЕ И НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРУШЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ

А. А. Никольский, Г. И. Таганов

(Москва)

При некотором числе Маха набегающего потока газа в некоторой точке поверхности тела, помещенного в этот поток, местная скорость течения впервые достигает величины местной скорости звука ($M = 1$). Это число Маха набегающего потока называется критическим числом маха M_{cr} . При увеличении скорости набегающего потока образуется местная сверхзвуковая зона, ограниченная контуром тела и линией перехода от дозвуковой скорости к сверхзвуковой. Как показывают наблюдения с помощью прибора Теплера, при некотором числе Маха набегающего потока $M > M_{cr}$ вблизи тела образуется скачок уплотнения, замыкающий местную сверхзвуковую зону сзади. Образование скачка уплотнения связано с появлением дополнительного сопротивления, называемого волновым сопротивлением.

В этой работе выясняются некоторые особенности течения в местной сверхзвуковой зоне, ограниченной контуром тела и линией перехода, и ищутся условия, при которых потенциальное течение с местной сверхзвуковой зоной становится невозможным и должен появиться скачок уплотнения.

В первой части работы устанавливаются общие свойства потенциального течения в местной сверхзвуковой зоне, ограниченной контуром профиля и линией перехода. Устанавливается, что на линии перехода, если она не является линией разрыва, имеет место закон монотонного изменения угла наклона вектора скорости (закон монотонности). Дается оценка изменения скорости на контуре профиля. Изучается течение около контура, имеющего прямолинейный участок.

Во второй части даются оценки величин ускорения во внутренних точках сверхзвуковой зоны, при помощи них показывается, что для профилей, обращенных выпуклостью в поток, разрушение потенциального течения, связанное с увеличением числа Маха набегающего потока, не может начаться из-за образования огибающей характеристик внутри сверхзвуковой зоны.

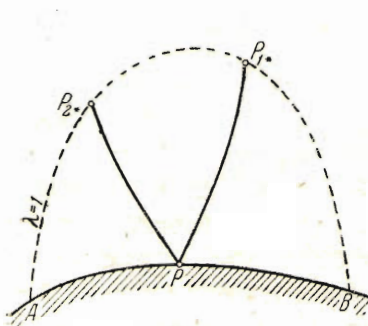
Опираясь на закон монотонности, устанавливается то предельное число Маха набегающего потока M (число Маха разрушения), после которого потенциальное течение с местной сверхзвуковой зоной становится заведомо невозможным.

§ 1. Свойства потенциального течения в местной сверхзвуковой зоне

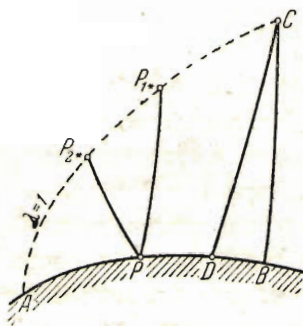
1. Особенности сверхзвукового течения, ограниченного твердой стенкой и линией перехода. Рассмотрим течение в сверхзвуковой зоне около профиля

крыла, образующейся обычно при обтекании профиля потоком с числом Маха выше критического. В зависимости от условий могут осуществляться два режима такого течения:

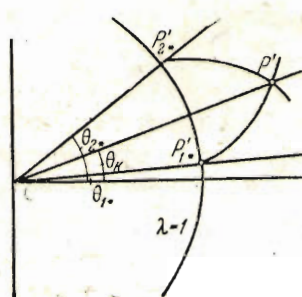
а) сверхзвуковой поток непрерывно переходит в дозвуковой поток. В этом случае сверхзвуковая зона ограничена частью твердого контура AB линией перехода $\lambda=1$, показанной на фиг. 1 пунктиром. Величина $\lambda=w/a_*$, где w — абсолютная величина скорости, a_* —критическая скорость (такая скорость, при которой скорость течения равна скорости звука);



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

б) сверхзвуковой поток переходит в дозвуковой поток при помощи скачка уплотнения.

В этом случае сверхзвуковая зона ограничивается твердым контуром AB , линией перехода $\lambda=1$ и скачком CB (фиг. 2).

Через каждую точку сверхзвуковой зоны проходят две характеристики разных семейств. Наименьший угол между направлением скорости в данной точке и каждой из характеристик равен углу Маха α .

Если вектор скорости повернуть на угол α против часовой стрелки, то его направление совпадает с направлением одной из характеристик, которую условимся называть характеристикой первого семейства в отличие от другой характеристики, которую будем называть характеристикой второго семейства.

В случае (а) каждая из характеристик, проведенных из произвольной точки P контура, имеет точку, общую с линией перехода $\lambda=1$ (фиг. 1).

В случае «б» все характеристики второго семейства выходят на линию перехода, но не все характеристики первого семейства обладают этим свойством.

Перемещая точку P на контуре по направлению к основанию скачка B , мы получим, что, начиная с некоторой точки D контура, характеристики первого семейства уже не выходят на линию перехода, упираясь в скачок (фиг. 2). В том, что из каждой точки контура исходит по крайней мере одна характеристика, попадающая на линию перехода, состоит существенное отличие течения в местной сверхзвуковой зоне от других смешанных течений (например, течения в сопле Лаваля).

Назовем зону $ADCA$, в которой обе характеристики, проведенные из точек контура (фиг. 2), выходят на линию перехода, зоной I, а зону $DCBD$, в которой на линию перехода попадают только характеристики второго семейства, зоной II.

В случае (а) вся сверхзвуковая зона совпадает с зоной I, поэтому все при-

водимые в этой работе теоремы и оценки для течения в зоне I, полученные из единственного предположения о выходе в этой зоне характеристик обоих семейств на линию перехода, будут справедливы и для случая (а).

В дальнейшем очень часто наряду с некоторой точкой P контура будут рассматриваться одновременно точки на линии $\lambda=1$, являющиеся концами характеристик, выходящих из точки P . Не оговаривая этого в тексте, будем конец характеристики первого семейства всегда обозначать той же буквой, что и точку контура, но с индексом 1 и значком * снизу и аналогично конец второй характеристики с индексом 2 и значком * снизу, как это показано на фиг. 1 и 2.

В последующих выводах существенными величинами являются наклоны касательной в произвольной точке P контура к оси абсцисс, которые будем всегда обозначать θ_k , а также наклоны вектора скорости на линии перехода в точках P_{1*} и P_{2*} , которые будут ниже всегда обозначаться θ_{1*} и θ_{2*} соответственно. Все три величины θ_k , θ_{1*} , θ_{2*} являются функциями длины дуги на контуре.

Рассмотрим произвольную точку P на контуре в сверхзвуковой зоне. Характеристика второго семейства PP_{2*} изобразится в плоскости годографа скорости дугой эпициклоиды второго семейства $P'P_{2*'}$ (фиг. 3). Пусть $\theta = \theta_{2*} - \theta_k$ полярный угол между точками $P_{2*'}$ и $P_{1*'}$. Тогда для величины λ в точке P профиля имеем выражение

$$\lambda = f(\theta_{2*} - \theta_k) \tag{1.1}$$

где $\lambda = f(\theta)$ является уравнением эпициклоиды, составленным так, чтобы имело место равенство $f(0) = 1$. Это уравнение, как известно, имеет вид^[2]

$$\theta = -\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \arcsin [x - (x-1)\lambda^2] - \arcsin \left[(x+1)\frac{1}{\lambda^2} - x \right] \right\} + \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right) \frac{\pi}{2} \tag{1.2}$$

Для определения θ_{2*} по заданным λ и θ_k имеем выражение

$$\theta_{2*} = \theta_k + \varphi(\lambda) \tag{1.3}$$

где φ — функция, обратная f . Графики функций $f(\theta)$ и $\varphi(\lambda)$ даны на фиг. 4.

Рассматривая характеристику первого семейства, выходящую из точки P (фиг. 3), получим

$$\lambda = f(\theta_k - \theta_{1*}), \quad \theta_{1*} = \theta_k - \varphi(\lambda) \tag{1.4}$$

где f и φ — те же, что и в (1.1) и (1.3) функции.

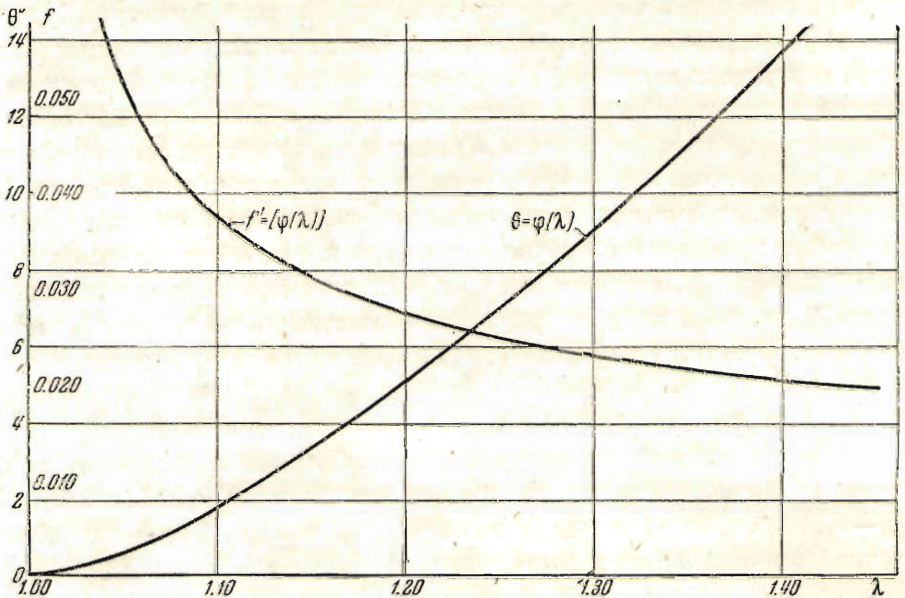
Для точек зоны I, где характеристики обоих семейств выходят на линию перехода, имеем из (1.3) и (1.4)

$$\theta_k = \frac{\theta_{1*} + \theta_{2*}}{2} \tag{1.5}$$

Таким образом имеем

Теорема 1. *Наклон контура в какой-либо точке P зоны I является средним арифметическим от наклонов вектора скорости в точках линии перехода, являющихся концами характеристик, исходящих из точки P .*

Формула (1.3) и вторая из формул (1.4) позволяют при известном распределении скоростей на заданном контуре определить наклоны вектора скорости в концах характеристик, лежащих на линии перехода.



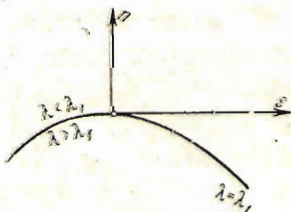
Фиг. 4.

2. Закон монотонного изменения угла наклона вектора скорости на линии перехода. Если в уравнениях адиабатического газа принять за искомые функции безразмерную величину скорости λ и угол θ наклона вектора скорости к оси x , то получим уравнения

$$(1 - M^2) \left(\cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) - \lambda \left(\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.6)$$

$$\sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \lambda \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

Исследуем характер изменения величины θ вдоль линии $\lambda = \lambda_1 = \text{const}$.



Фиг. 5.

Пусть по одну сторону этой линии $\lambda < \lambda_1$, а по другую $\lambda > \lambda_1$ (фиг. 5). Направим нормаль к линии $\lambda = \lambda_1$ в сторону убывания скорости. Рассматривая некоторую точку этой линии, совмещая направление оси y с направлением нормали в этой точке, получим из (1.6)

$$(1 - M_1^2) \sin \theta_1 \frac{\partial \lambda}{\partial n} - \lambda_1 \sin \theta_1 \frac{\partial \theta}{\partial s} + \lambda_1 \cos \theta_1 \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad (1.7)$$

$$\cos \theta_1 \frac{\partial \lambda}{\partial n} - \lambda_1 \cos \theta_1 \frac{\partial \theta}{\partial s} - \lambda_1 \sin \theta_1 \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0$$

где M_1 — число Маха при $\lambda = \lambda_1$, а θ_1 — угол между вектором скорости и положительным направлением касательной к линии $\lambda = \lambda_1$ в фиксированной точке этой линии. Исключая из уравнений (1.7) величину $\partial \theta / \partial n$ и определяя из полученного уравнения $\partial \theta / \partial s$, будет иметь

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1 - M_1^2 \sin^2 \theta_1}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda}{\partial n} \quad (1.8)$$

В дозвуковом потоке $1 - M_1^2 \sin^2 \theta_1 > 0$ при любом θ , а так как $\partial \lambda / \partial n \leq 0$, то всегда $\partial \theta / \partial s \leq 0$. Таким образом θ изменяется в этом случае монотонно вдоль линии $\lambda = \text{const}$.

Рассматривая линию перехода, где $\lambda_1 = 1$, и исходя из предположения, что линия перехода не является линией разрыва^[1], т. е. что все производные $\partial \theta / \partial s$, $\partial \theta / \partial n$, $\partial \lambda / \partial s$, $\partial \lambda / \partial n$ конечны на линии перехода, получим на ней из (1.8)

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \cos^2 \theta \frac{\partial \lambda}{\partial n} \tag{1.9}$$

а следовательно, и условие $\partial \theta / \partial s \leq 0$. Таким образом имеем:

Теорема 2. *Если двигаться вдоль линии перехода так, чтобы область дозвуковых скоростей лежала слева, то вектор скорости будет монотонно поворачиваться по часовой стрелке.*

Условие $\partial \theta / \partial s = 0$ вдоль линии перехода для того случая, когда на ней осуществляется переход от дозвуковой к сверхзвуковой скорости, было получено ранее С. А. Христиановичем.

Рассматриваемое свойство монотонности уже не характерно для сверхзвукового потока, — в нем могут иметь место и неравенство $1 - M^2 \sin^2 \theta > 0$ и неравенство $1 - M^2 \sin^2 \theta < 0$, а следовательно, величина $\partial \theta / \partial s$ может менять знак.

Как это будет ясно из дальнейшего изложения, обстоятельство, выражаемое теоремой 2, в значительной мере определяет характер течения в местной сверхзвуковой зоне, а также и возможность или невозможность совместного существования дозвукового и сверхзвукового потоков без изменения потенциального характера течения. Это обстоятельство мы будем в дальнейшем называть «законом монотонности на линии перехода» или просто «законом монотонности».

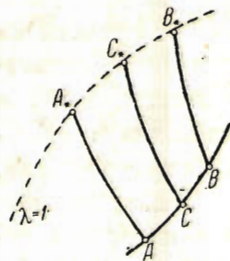
3. Свойство монотонного изменения величины скорости и ее наклона вдоль характеристик. Пользуясь результатами п. 2, докажем:

Теорема 3. *Если в сверхзвуковой зоне задан отрезок характеристики одного семейства такой, что характеристики другого семейства, исходящие из точек этого отрезка, выходят на линию перехода, то угол наклона вектора скорости и величина скорости являются монотонными функциями вдоль заданного отрезка характеристики.*

Рассмотрим на отрезке AB характеристики некоторую точку C и проведем из точек A , B и C до линии перехода характеристики семейства, отличного от семейства, которому принадлежит характеристика AB (фиг. 6). Пусть концы этих характеристик, лежащие на линии перехода, будут соответственно A_* , B_* и C_* .

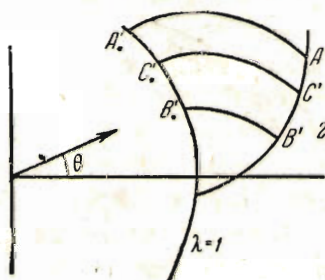
В плоскости годографа скорости точки A , B , C изображаются точками A' , B' , C' , лежащими на некоторой эпициклоиде γ , а точки A_* , B_* , C_* — точками A_*' , B_*' , C_*' , лежащими на круге $\lambda = 1$, причем каждая пара точек A' и A_*' , B' и B_*' , C' и C_*' лежат на одной из эпициклоид семейства, отличного от того, которому принадлежит эпициклоида γ (фиг. 7).

При движении точки C' по эпициклоиде γ и соответствующем ему движении точки C_*' по окружности $\lambda = 1$ полярные углы θ в точках C' и C_*'

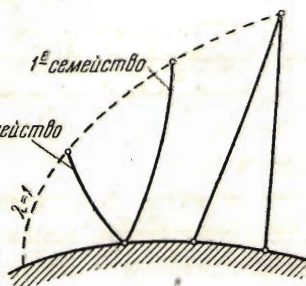


Фиг. 6.

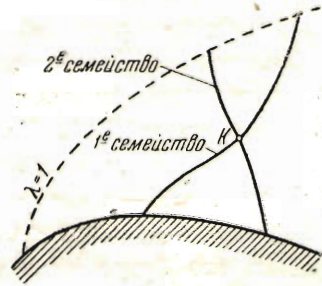
или одновременно убывают, или одновременно возрастают, так как каждая прямая $\theta = \text{const}$ пересекает эпициклоиду только в одной точке. Когда точка C движется в одном направлении от точки A к точке B по отрезку характеристики AB , точка C_* движется по линии перехода от точки A_* к точке B_* тоже в одном направлении, так как характеристики одного семейства не пересекаются. По теореме 2 предыдущего параграфа отсюда получим, что при этом и точка C_* движется по окружности $\lambda = 1$ все время в одном направлении. Поэтому полярный угол θ для точки C' изменяется монотонно и, как это следует из свойств эпициклоиды, монотонно изменяется для точки C' и величина скорости λ .



Фиг. 7.



Фиг. 8.



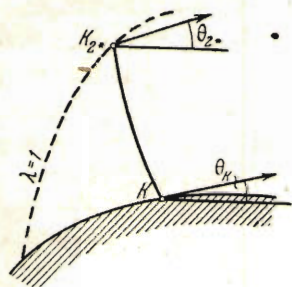
Фиг. 9.

В сверхзвуковой зоне I около профиля, определенной в § 1, оба семейства характеристик удовлетворяют условиям теоремы 3, поэтому при движении в ней вдоль любой характеристики наклон вектора скорости θ и величина скорости λ изменяются монотонно, а именно, при движении, направленном к линии перехода, вдоль характеристик первого семейства обе величины θ и λ монотонно убывают, а вдоль характеристик второго семейства (левого) θ монотонно возрастает, а λ монотонно убывает. Из полученного свойства монотонного изменения величины скорости и угла наклона вектора скорости вдоль каждой из характеристик зоны I следует, что эта зона отображается на соответствующую область годографа однолистно.

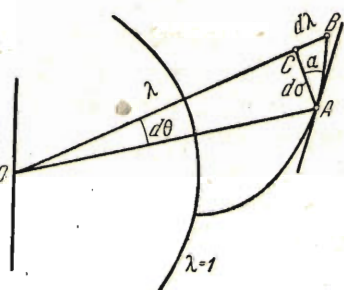
В сверхзвуковой зоне II только характеристики первого семейства удовлетворяют условиям теоремы 3. При удалении вдоль них от профиля обе величины θ и λ монотонно убывают. При движении в зоне II вдоль характеристики второго семейства свойство монотонного изменения величин θ и λ , вообще говоря, не имеет места.

Пользуясь известными свойствами характеристик в плоскости течения и в плоскости годографа скорости, получим для них в области применимости теоремы 3 для небольших чисел Маха направления вогнутости, показанные на фиг. 8. Такое направление вогнутости характеристик, как это следует из результатов С. А. Христиановича^[1], имеет место только в случае $M < M_0 = 2/\sqrt{3} - \kappa = 1.535$. Пользуясь упомянутыми результатами, получим, что если $M = M_0$ для некоторой точки K в области применимости теоремы 3, то характеристики имеют вид, изображенный на фиг. 9, причем точка K будет всегда точкой перегиба характеристик.

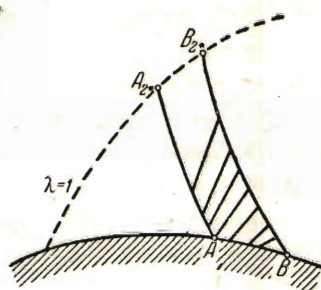
4. Оценки изменения скорости на профиле в сверхзвуковой зоне. Предположим, как это обычно и бывает, что в сверхзвуковой зоне профиль всюду направлен выпуклостью в поток. Рассмотрим в сверхзвуковой зоне на про-



Фиг. 10.



Фиг. 11.



Фиг. 12.

филе произвольную точку K и выходящую из нее характеристику второго семейства KK_{2*} (фиг. 10). Тогда из (1.1) для точки K имеем $\lambda = f(\theta_{2*} - \theta_k)$, где f — функция, введенная согласно (1.1). Отсюда получим

$$\frac{d\lambda}{d(-\theta_k)} = f'(\theta_{2*} - \theta_k) \left[1 + \frac{d\theta_{2*}}{d(-\theta_k)} \right] \quad (1.10)$$

Согласно теореме 2 всегда $d\theta_{2*}/d(-\theta_k) \leq 0$; поэтому, пользуясь (1.10), получим

$$\frac{d\lambda}{d(-\theta_k)} \leq f'(\theta_{2*} - \theta_k) \quad (1.11)$$

Но $\theta_{2*} - \theta_k = \varphi(\lambda)$, где φ — функция, обратная f . Следовательно,

$$f'(\theta_{2*} - \theta_k) = f'[\varphi(\lambda)] = \frac{d\lambda}{d\theta}$$

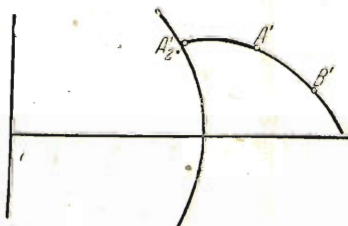
где дифференцирование ведется вдоль эписциклоиды на плоскости годографа (фиг. 11). Рассмотрим на эписциклоиде две точки A и B , полярный угол между которыми равен $d\theta$, причем пусть в точке B значение λ больше, чем в A .

Проведем затем из точки A дугу окружности $\lambda = \text{const}$ до пересечения с прямой OB в точке C , длину дуги положим равной $d\sigma$. Угол между касательными к дуге окружности AC и дуге эписциклоиды AB в точке A равен углу Маха α . Поэтому $d\lambda = \text{tg} \alpha d\sigma$, и так как $d\sigma = \lambda d\theta$, то $d\lambda/d\theta = \lambda \text{tg} \alpha$.

График функции $f'[\varphi(\lambda)] = \lambda \text{tg} \alpha$ дан на фиг. 5. Неравенство (1.11) примет поэтому вид

$$\frac{d\lambda}{d(-\theta_k)} \leq \lambda \text{tg} \alpha \quad (1.12)$$

Как показывает формула (1.12), эта оценка зависит только от величины λ в данной точке. Сравнивая формулы (1.10) и (1.11), получим, что неравенство (1.12) тогда и только тогда переходит в равенство, когда в данной точке профиля $d\theta_{2*}/d\theta_k = 0$. Если это имеет место на некотором участке AB профиля (фиг. 12), то получим на нем условие $\theta_{2*} = \text{const}$. Тогда все характеристики второго семейства, выходящие с AB , изобразятся на плоскости годографа одной и той же эписциклоидой второго семейства γ (фиг. 13), так как на их



Фиг. 13.

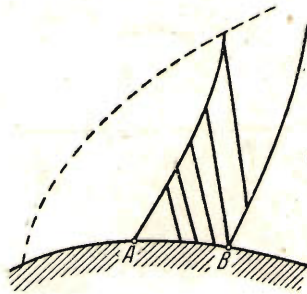
концах, лежащих на линии $\lambda = 1$, скорость постоянна. Поэтому и вся область $ABB_{2*}A_{2*}$ (фиг. 12) изобразится на плоскости годографа отрезком эллипсострофида $A'B'$, на котором, в частности, будут лежать и точки отрезка AB .

Характеристики первого семейства в области $ABB_{2*}A_{2*}$ должны быть в этом случае прямыми с постоянной скоростью на каждой из них, т. е. в этой области должно иметь место некоторое течение Мейера (течение разрежения). Однако, как будет показано в п. 6, реализация такого течения в условиях задачи невозможна, поэтому в оценке (1.12) равенство может достигаться только в отдельных точках контура.

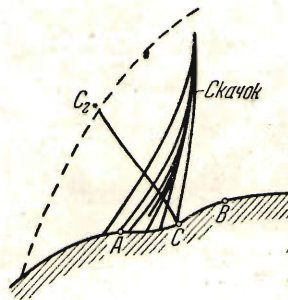
В сверхзвуковой зоне I характеристики первого семейства тоже выходят на линию $\lambda = 1$. Повторяя для них рассуждения, вполне аналогичные предыдущим, получим вдоль профиля в зоне I вторую оценку

$$\frac{d\lambda}{d(-\theta_k)} \geq -\lambda \operatorname{tg} \alpha \quad (1.13)$$

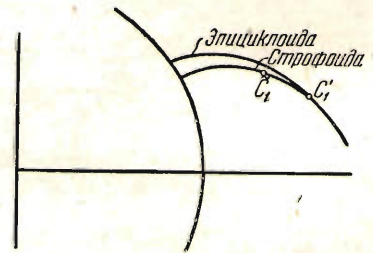
В случае достижения равенства в оценке (1.13) на некотором участке профиля AB в области, ограниченной характеристиками первого семейства, выходящими из A и B , линией перехода и профилем, должно иметь место течение Мейера (сжатия), причем прямыми будут в ней уже характеристики



Фиг. 14.



Фиг. 15.



Фиг. 16.

второго семейства (фиг. 14). Как будет показано в п. 6, такое течение тоже не может реализоваться в условиях задачи, поэтому в оценке (1.13) равенство может достигаться только в отдельных точках контура. Объединяя оценки (1.12) и (1.13), получим на контуре зоны I

$$\left| \frac{d\lambda}{d(-\theta_k)} \right| \leq \lambda \operatorname{tg} \alpha \quad (1.14)$$

Оценка (1.13) мало интересна при наличии замыкающего сверхзвуковую зону скачка уплотнения, так как в этом случае в зоне I обычно скорость не убывает, поэтому она относится главным образом к случаю обтекания профиля со сверхзвуковой зоной без скачка уплотнения, когда зона I совпадает со всей сверхзвуковой зоной.

Оценка изменения скорости также может быть получена и в случае, если на некотором участке AB профиля контур направлен вогнутостью в поток. Так для любой точки C на участке AB (фиг. 15) имеем

$$\lambda = f(\theta_{2*} - \theta_k), \quad \frac{d\lambda}{d\theta_k} = f'(\theta_{2*} - \theta_k) \left(\frac{d\theta_{2*}}{d\theta_k} - \right)$$

Но $f'(\theta_{2*} - \theta_k) = \lambda \operatorname{tg} \alpha$, поэтому

$$\frac{d\lambda}{d\theta_k} \leq -\lambda \operatorname{tg} \alpha \tag{1.15}$$

Пользуясь законом монотонности, имеем $d\theta_{2*}/d\theta_k \leq 0$ и, следовательно, из (1.15) получим

$$\frac{d\lambda}{d\theta_k} \leq -\lambda \operatorname{tg} \alpha \tag{1.16}$$

Таким образом на участке профиля, имеющем вогнутость, направленную в поток, скорость падает, причем, как это следует из формулы (1.16), ее падение не может быть слишком медленным. Этим оценка (1.16) существенно отличается от оценок (1.12) и (1.13), которые показывают, что на выпуклом участке профиля скорость не может изменяться слишком быстро.

Строго говоря, это справедливо с точностью до тех изменений в потоке, которые вызываются возникающим косым скачком уплотнения (фиг. 15). Рассматривая характеристику второго семейства $C_{2*}C_1$ и ее продолжение C_1C , получим, что переходу через скачок в плоскости течения соответствует перемещение по отрезку строфоиды $C_1\tilde{C}_1$ в плоскости годографа скорости (фиг. 16). Поэтому образы отрезков C_1C_{2*} и C_1C характеристики лежат на двух различных эциклоидах второго семейства. Пользуясь, однако, тем обстоятельством, что в точке C_1 строфоиды и эциклоиды имеют общую касательную и одинаковый радиус кривизны, получим, что с точностью до малых третьего порядка относительно изменения скорости в скачке можно считать эти две эциклоиды совпадающими. С той же точностью справедливо и неравенство (1.16).

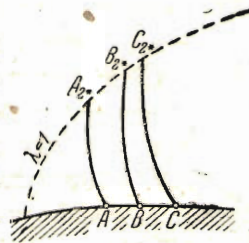
5. Течение в сверхзвуковой зоне, вызываемое наличием прямолинейного участка на профиле. Пусть на профиле в сверхзвуковой зоне имеет место прямолинейный участок AB . Рассмотрим на нем произвольную точку C и выходящую из нее характеристику второго семейства CC_{2*} (фиг. 17). Мы имеем в точке C равенство $\lambda = f(\theta_{2*} - \theta_k)$.

При движении точки C по отрезку AB в направлении течения величина θ_k остается постоянной из-за его прямолинейности, а величина θ_{2*} по теореме 2 не возрастает. Отсюда, пользуясь тем, что f — монотонно возрастающая функция аргумента, получим:

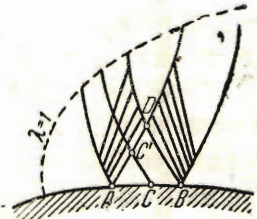
Теорема 4. *На прямолинейном участке профиля в сверхзвуковой зоне скорость в направлении течения не возрастает.*

Предположим теперь, что прямолинейный участок расположен в сверхзвуковой зоне I (фиг. 18).

Проведем из его концов до линии перехода характеристики первого семейства AA_{1*} , BB_{1*} и второго семейства AA_{2*} , BB_{2*} . Пусть $\theta_k = \theta_0$ на AB . Проведем из точки C , близкой к точке A , характеристику второго семейства до пересечения с характеристикой AA_{1*} в точке C' . По теореме 3 получим, что $\theta(A) \geq \theta(C') \geq \theta(C)$, но $\theta(A) = \theta(C) = \theta_0$, поэтому и $\theta(C') = \theta_0$, а значит, как это следует из той же теоремы 3, что $\theta = \theta_0$ на всем отрезке характеристики CC' .



Фиг. 17.



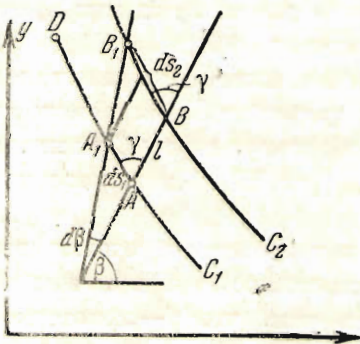
Фиг. 18.

Перемещая точку C от точки A к точке B , получим отсюда, что характеристики AA_{1*} и BB_{2*} обязательно пересекаются, а в треугольнике ABD , образованном отрезком AB и этими характеристиками, всюду $\theta = \theta_0 = \text{const}$. Отсюда следует, что в нем всюду и $\lambda = \text{const}$, а характеристики обоих семейств прямолинейны.

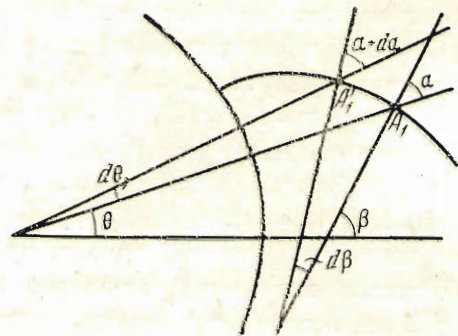
Вся область $ABB_{2*}A_{2*}$ изобразится на плоскости годографа скорости одной эпициклоидой второго семейства, так как все характеристики второго семейства, ее заполняющие, изобразятся одной эпициклоидой, проходящей через точку $\theta = \theta_0$, $\lambda = \lambda(A)$. Поэтому во всей рассматриваемой области будет иметь место некоторое течение Мейера (разрежения) с прямолинейными характеристиками первого семейства. Аналогично вся область $ABB_{1*}A_{1*}$ изобразится на плоскости годографа одной эпициклоидой первого семейства и в ней будет иметь место течение Мейера (сжатия) с прямолинейными характеристиками второго семейства.

Однако, как было указано выше и будет доказано в п. 6, реализация рассматриваемых течений Мейера в условиях задачи невозможна.

6. Невозможность реализации течения Мейера в местной сверхзвуковой зоне. Пусть в плоскости x, y задано течение Мейера между характеристиками C_1 и C_2 второго семейства с прямолинейными характеристиками первого семейства (фиг. 19).



Фиг. 19.



Фиг. 20.

Проведем из некоторой точки A характеристики C_1 , прямолинейную характеристику другого семейства до пересечения ее в точке B с характеристикой C_2 . На прямой AB угол Маха $\alpha = \text{const}$, поэтому она пересечет характеристики C_1 и C_2 под одним и тем же углом $\gamma = \pi - 2\alpha$.

Положим $AB = l$ и обозначим через β угол, образованный прямой AB с осью абсцисс. Рассмотрим теперь прямолинейную характеристику A_1B_1 , бесконечно близкую к AB . Обозначим через ds_1 и ds_2 отрезки, отсекаемые прямыми AB и A_1B_1 соответственно на характеристиках C_1 и C_2 , а через $d\beta$ угол между AB и A_1B_1 . Тогда получим

$$ds_1 = \frac{rd\beta}{\sin \gamma}, \quad ds_2 = \frac{(r+l)d\beta}{\sin \gamma} \quad (4.17)$$

где r — расстояние между точкой A и точкой пересечения прямых AB и A_1B_1 .

Положим длину отрезка A_1B_1 равной $l + dl$. Тогда из фиг. 18 получим $dl = (ds_2 - ds_1) \cos \gamma$, или, пользуясь (1.17),

$$dl = l \operatorname{ctg} \gamma d\beta \quad (1.18)$$

В плоскости годографа скорости характеристика C_1 изобразится эпициклоидой.

Направления AB и A_1B_1 совпадают с направлением нормалей к этой эпициклоиде, проведенных в точках A' и A'_1 , соответствующих точкам A и A_1 (фиг. 20). Угол между радиус-вектором и направлением такой нормали равен углу Маха α . Поэтому $\beta = \alpha + \theta$ и $d\beta = d\alpha + d\theta$.

Отсюда, пользуясь (1.18), получим

$$\frac{dl}{l} = \operatorname{ctg} \gamma (d\alpha + d\theta) = -\operatorname{ctg} 2\alpha d\alpha + \operatorname{ctg} \gamma d\theta \quad (1.18)$$

или, интегрируя, имеем

$$\ln \frac{l}{l_0} = \ln \sqrt{\frac{\sin 2\alpha_0}{\sin 2\alpha}} + \int_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{ctg} \gamma d\theta \quad (1.20)$$

где l_0 , α_0 , θ_0 характеризуют некоторую начальную точку.

При $\alpha > \pi/4$ и $\theta > \theta_0$ оба слагаемые правой части (1.20) положительны, поэтому справедливы неравенства

$$\ln \frac{l}{l_0} > \ln \sqrt{\frac{\sin 2\alpha_0}{\sin 2\alpha}}, \quad l > l_0 \sqrt{\frac{\sin 2\alpha_0}{\sin 2\alpha}} \quad (1.21)$$

Если $\lambda \rightarrow 1$, то $\alpha \rightarrow \pi/2$ и $l \rightarrow \infty$.

Вполне аналогичный результат получим и для течения Мейера между характеристиками первого семейства с прямолинейными характеристиками второго семейства. Таким образом получаем:

Теорема 5. *Течение Мейера между двумя характеристиками одного семейства с прямолинейными характеристиками другого семейства не может быть полностью реализовано вплоть до линии $\lambda=1$ в конечной области.*

Если на характеристике C_1 , изображенной на фиг. 19, в некоторой точке D достигается равенство $\lambda=1$, то, пользуясь предыдущим результатом, получим, что касательная в точке D к характеристике C_1 является асимптотой для любой характеристики C_2 , расположенной относительно C_1 так, как показано на фиг. 19¹.

Из теоремы 5 следует, что вдоль прямолинейного участка профиля в местной сверхзвуковой зоне величина скорости не может быть постоянной. В самом деле, если бы это имело место, то между характеристиками второго семейства, выходящими с концов этого участка, осуществлялось бы течение Мейера, реализация которого ввиду ограниченности местной сверхзвуковой зоны невозможна, как это следует из теоремы 5. Таким образом, теорема 4 может быть усилена, и мы имеем:

Теорема 6. *На прямолинейном участке профиля в сверхзвуковой зоне скорость падает.*

¹ То обстоятельство, что в случае течения Мейера, начинающегося с прямолинейной характеристики, на которой $\lambda=1$, характеристики другого семейства не сходят с этой прямой, было сообщено авторам С. А. Христиановичем.

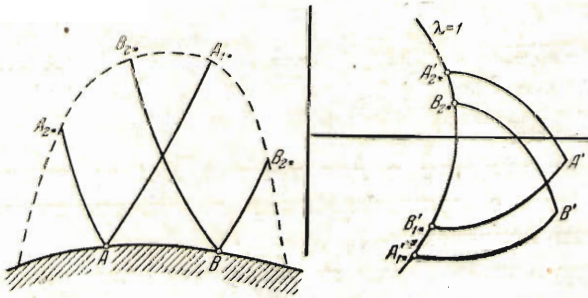
§ 2. Некоторые условия разрушения потенциального течения с местной сверхзвуковой зоной

Появление волнового сопротивления при обтекании тел потоком с большой дозвуковой скоростью принято связывать с моментом достижения в какой-либо точке на поверхности тела скорости, равной местной скорости звука.

Однако изучение результатов ряда экспериментов показало, что появление скачка уплотнения, а следовательно, и возникновение волнового сопротивления происходит иногда позже M_{cr} . Снимки, проведенные по методу Теплера, позволяют видеть в некоторых случаях местную сверхзвуковую зону, распространяющуюся в глубь потока без скачка уплотнения.

Необходимость разрушения потенциального характера течения с местной сверхзвуковой зоной, т. е. необходимость появления скачка уплотнения, до сих пор теоретически не показана ни для одного случая. Поэтому выяснение некоторых условий, которым заведомо сопутствует разрушение, представляется интересным.

1. Деформация контура. Покажем, как деформация контура может привести к разрушению существовавшего ранее потенциального течения.

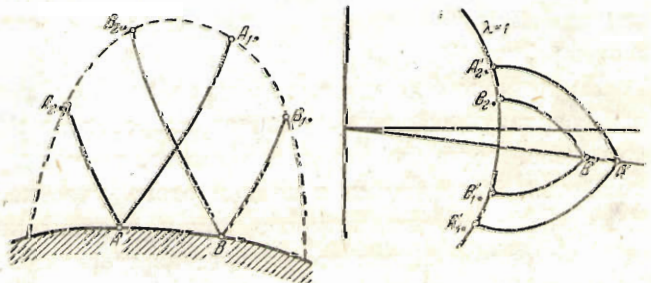


Фиг. 21.

Рассмотрим течение с местной сверхзвуковой зоной около криволинейного контура при таком числе Маха набегающего потока, когда течение является потенциальным (фиг. 21).

Проведем из точек A и B контура характеристики обоих семейств как в плоскости течения, так и в плоскости годографа. В силу выполнения

условия монотонности изменения угла на линии перехода образы точек A_{2*} , B_{2*} , A_{1*} , B_{1*} в плоскости годографа расположатся на круге $\lambda = 1$ в той же последовательности, что и на линии перехода в плоскости течения. Произведем теперь такую плавную деформацию контура, чтобы отрезок дуги AB превратился в прямолинейный отрезок (фиг. 22).



Фиг. 22.

В силу теоремы 6, § 1 скорость вдоль прямолинейного отрезка AB может

только падать. Тогда, проводя характеристики в плоскости годографа, пользуясь теоремой 1, получаем, что образы точек A_{2*} , B_{2*} , A_{1*} , B_{1*} устанавливаются на круге $\lambda = 1$ не в той последовательности, в которой эти точки расположены на линии перехода в плоскости течения, следовательно, произ-

веденная деформация контура вызывает нарушение монотонности на линии перехода. Таким образом имеет место:

Теорема 7. *Характеристики первого семейства, которые исходят из точек прямолинейного участка на контуре, никогда не могут выходить к линии перехода, а должны попадать в скачок уплотнения.*

Если рассматриваемая деформация контура производится непрерывно, то очевидно, что разрушение потенциального течения произойдет раньше, чем деформированный участок станет прямолинейным. Это позволяет сделать заключение о том, что при заданном числе Маха набегающего потока любой профиль, обращенный выпуклостью в поток, может быть так деформирован, что получится новый профиль, снова обращенный выпуклостью в поток, обтекание которого при том же значении числа Маха набегающего потока уже невозможно без скачка уплотнения.

2. О невозможности образования линии разрыва внутри местной сверхзвуковой зоны. Выясним теперь, может ли явиться причиной нарушения потенциального характера движения газа невозможность реализации непрерывного течения внутри самой сверхзвуковой зоны при данных граничных условиях, выражающаяся в пересечении характеристик одного семейства и образовании сверхзвукового скачка уплотнения внутри этой зоны.

Карман [3] высказывает предположение, что вероятной причиной появления скачков является образование огибающей линий Маха в сверхзвуковой зоне при некотором числе Маха набегающего потока.

Огибающая характеристик одного семейства, как показал С. А. Христианович [1], совпадает с линией разрыва, которая определяется как геометрическое место точек, в которых по крайней мере одна из производных $\partial\theta / \partial x$, $\partial\theta / \partial y$, $\partial\lambda / \partial x$, $\partial\lambda / \partial y$ обращается в бесконечность. Поэтому для выяснения вопроса о возможности образования сверхзвуковых скачков внутри сверхзвуковой зоны при увеличении числа Маха набегающего потока необходимо провести оценку величины ускорения в точках сверхзвуковой зоны. Покажем, что на контуре профиля не может появиться бесконечных ускорений.

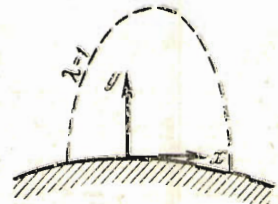
Пусть задано некоторое течение в сверхзвуковой зоне с непрерывным переходом от сверхзвуковых к дозвуковым скоростям (случай (а), § 1, п. 1). Рассмотрим некоторую точку K на контуре в сверхзвуковой зоне и направим в ней ось x в направлении потока (фиг. 23). Тогда уравнения (1.6) примут вид

$$(M^2 - 1) \frac{\partial\lambda}{\partial x} - \lambda \frac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y} - \lambda \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

Имеем

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{d\theta_k} \frac{\partial\theta}{\partial x} = -k \frac{d\lambda}{d\theta_k} = -\frac{1}{R} \frac{d\lambda}{d\theta_k} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -k = -\frac{1}{R} \quad (2.3)$$



Фиг. 23.

где k — кривизна контура в точке K , а R — радиус кривизны контура в этой точке. Пользуясь неравенством (1.14) и равенствами (2.2) и (2.3), получим

$$\left| \frac{\partial\lambda}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{R} \lambda \operatorname{tg} \alpha, \quad \left| \frac{\partial\theta}{\partial x} \right| = \frac{1}{R} \quad (2.4)$$

Отсюда из уравнений (1.20) получим

$$\left| \frac{\partial \theta}{\partial y} \right| \leq \frac{1}{R} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \left| \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right| = \frac{\lambda}{R} \quad (2.5)$$

Соотношения (2.4) и (2.5) показывают, что величины $\partial \theta / \partial x$, $\partial \theta / \partial y$, $\partial \lambda / \partial x$, $\partial \lambda / \partial y$ всегда конечны на контуре внутри сверхзвуковой зоны, если только всюду $R \neq 0$. Случай $R = 0$ (бесконечная кривизна) в некоторой точке является специальным и никогда не осуществляется на реальных профилях, поэтому будем считать, что на рассматриваемых нами контурах во всех точках $R > R_0$, где R_0 — некоторая константа.

Произведем теперь оценку максимально возможных величин ускорения во внутренних точках местной сверхзвуковой зоны. Дифференциальные уравнения характеристик первого и второго семейств в плоскости xy соответственно имеют вид

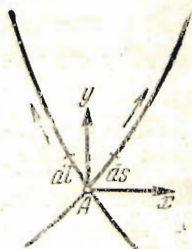
$$dy = \operatorname{tg}(\theta + \alpha) dx, \quad dy = \operatorname{tg}(\theta - \alpha) dx \quad (2.6)$$

Кроме того, вдоль характеристик первого и второго семейств соответственно имеют место соотношения (см. например, [1])

$$\sigma + \theta = 2\xi = \operatorname{const}, \quad \sigma - \theta = 2\eta = \operatorname{const} \quad (2.7)$$

где

$$\sigma = 1 - \int_1^{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - [(z-1)/(z+1)] \lambda^2}} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (2.8)$$



Фиг. 24.

Из соотношений (2.6) и (2.7) получим

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \operatorname{tg}(\theta + \alpha) \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \operatorname{tg}(\theta - \alpha) \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (2.9)$$

Дифференцируя первое соотношение по ξ , а второе по η и вычитая одно из другого, получим уравнение для величины x :

$$\frac{1}{\cos^2(\theta - \alpha)} \frac{\partial(\theta - \alpha)}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \operatorname{tg}(\theta - \alpha) \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{\cos^2(\theta + \alpha)} \frac{\partial(\theta + \alpha)}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \operatorname{tg}(\theta + \alpha) \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta}$$

Из соотношений (2.7) имеем (2.10)

$$\sigma = \xi + \eta, \quad \theta = \xi - \eta \quad (2.11)$$

Пользуясь этими равенствами и выбирая систему координат так, чтобы направление оси x совпадало с направлением скорости в некоторой точке A (фиг. 24), получим из (2.10) соотношение между частными производными от величины x в рассматриваемой точке

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1 + \alpha'(\sigma)}{\sin 2\alpha} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{1 + \alpha'(\sigma)}{\sin 2\alpha} \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0 \quad \left(x'(\sigma) = \frac{d\alpha}{d\sigma} \right) \quad (2.12)$$

Пусть dl и ds — длины элементарных отрезков соответственно характеристик первого и второго семейств. При этом величины dl и ds будем счи-

тать положительными при переходе от точки А к близким точкам в направлениях, указанных на фиг. 24. Имеем

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial l} \frac{dl}{d\xi} = -\cos \alpha \frac{dl}{d\xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{ds}{d\eta} = \cos \alpha \frac{ds}{d\eta} \quad (2.13)$$

где производная $dl/d\xi$ берется вдоль характеристики второго семейства, а производная $ds/d\eta$ вдоль характеристики первого семейства. Пользуясь (2.13), можно соотношение (2.12) привести к одному из двух видов:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\cos \alpha \frac{dl}{d\xi} \right) + \frac{1 + \alpha'(\sigma)}{\sin 2\alpha} \left(\cos \alpha \frac{dl}{d\xi} \right) - \frac{1 + \alpha'(\sigma)}{2 \sin \alpha} \frac{ds}{d\eta} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\cos \alpha \frac{ds}{d\eta} \right) + \frac{1 + \alpha'(\sigma)}{\sin 2\alpha} \left(\cos \alpha \frac{ds}{d\eta} \right) - \frac{1 + \alpha'(\sigma)}{2 \sin \alpha} \frac{dl}{d\xi} = 0 \quad (2.15)$$

Вдоль характеристики $\xi = \text{const}$ соотношение (2.14) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно величины $\cos \alpha dl/d\xi$, аналогично вдоль характеристики $\eta = \text{const}$ соотношение (2.15) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно величины $\cos \alpha ds/d\eta$. Полагая $z = \cos \alpha dl/d\xi$, получим из (2.14) для определения z вдоль характеристики $\xi = \text{const}$ линейное уравнение первого порядка

$$\frac{dz}{d\eta} + \frac{1 + \alpha'(\sigma)}{\sin 2\alpha} z - \frac{1 + \alpha'(\sigma)}{2 \sin \alpha} \frac{ds}{d\eta} = 0 \quad (2.16)$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$z = \exp \left[- \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{1 + \alpha'(\sigma)}{\sin 2\alpha} d\eta \right] \left\{ z_0 + \int_{\eta_0}^{\eta} \exp \left[\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{1 + \alpha'(\sigma)}{\sin 2\alpha} d\eta \right] \frac{1 + \alpha'(\sigma)}{2 \sin \alpha} \frac{ds}{d\eta} d\eta \right\} \quad (2.17)$$

где η_0 — значение η в некоторой начальной точке рассматриваемой характеристики $\xi = \text{const}$, а $z_0 = \cos \alpha_0 (dl/d\xi)_0$ — значение величины z в этой точке.

Интеграл под знаком экспоненциальной функции в формуле (2.17) может быть легко вычислен, если величины, входящие в подинтегральное выражение, выразить через угол Маха α , пользуясь соотношением

$$\lambda = \sqrt{\frac{z+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \alpha + (z-1)/2}}$$

а также соотношениями

$$d\eta = d\sigma = -d\theta, \quad \frac{d\lambda}{d\theta} = \lambda \operatorname{tg} \alpha$$

справедливыми вдоль характеристики первого семейства $\xi = \text{const}$, из которых первое вытекает из соотношений (2.7) и (2.14), а второе было уже получено в § 1, п. 4.

Для него получается выражение

$$\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{1 + \alpha'(\sigma)}{\sin 2\alpha} d\eta = \ln \left\{ \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_0}} \left[\frac{\sin^2 \alpha [\sin^2 \alpha_0 + 1/2(z-1)]}{\sin^2 \alpha_0 [\sin^2 \alpha + 1/2(z-1)]} \right]^{\frac{1}{2(z-1)}} \right\} \quad (2.18)$$

Поэтому, заменяя в (2.16) величину z ее выражением и обозначая через

$G(\alpha, \alpha_0)$ выражение под знаком логарифма в (2.18), окончательно получим

$$\cos \alpha \frac{dl}{d\xi} = \frac{1}{G(\alpha, \alpha_0)} \left[\cos \alpha_0 \left(\frac{dl}{d\xi} \right)_0 + \int_{\eta_0}^{\eta} G(\alpha, \alpha_0) \frac{1 + \alpha'(\sigma)}{2 \sin \alpha} \frac{ds}{d\eta} d\eta \right] \quad (2.19)$$

Вполне аналогичное решение уравнения (2.15) дает

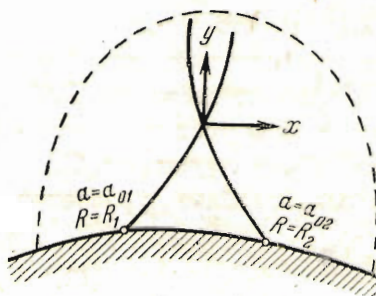
$$\cos \alpha \frac{ds}{d\eta} = \frac{1}{G(\alpha, \alpha_0)} \left[\cos \alpha_0 \left(\frac{ds}{d\eta} \right)_0 + \int_{\xi_0}^{\xi} G(\alpha, \alpha_0) \frac{1 + \alpha'(\sigma)}{2 \sin \alpha} \frac{dl}{d\xi} d\xi \right] \quad (2.20)$$

Пользуясь свойством монотонности изменения величины скорости и угла наклона вектора скорости вдоль характеристик в местной сверхзвуковой зоне (§ 1, п. 3), замечаем, что $dl/d\xi \geq 0$ и $ds/d\eta \geq 0$.

Кроме того, $\alpha'(\sigma) > 0$. Поэтому из (2.19) и (2.20) получим неравенства

$$\cos \alpha \frac{dl}{d\xi} \geq \cos \alpha_0 \left(\frac{dl}{d\xi} \right)_0 \frac{1}{G(\alpha, \alpha_0)} \quad (2.21)$$

$$\cos \alpha \frac{ds}{d\eta} \geq \cos \alpha_0 \left(\frac{ds}{d\eta} \right)_0 \frac{1}{G(\alpha, \alpha_0)} \quad (2.22)$$



Фиг. 25.

Для оценки ускорений в некоторой точке K местной сверхзвуковой зоны проведем из этой точки характеристики первого и второго семейств до пересечения с контуром соответственно в точках A и B контура (фиг. 25). Пусть будет $\alpha = \alpha_{01}$ и $\alpha = \alpha_{02}$ соответственно в точках A и B . Пусть, кроме того, в тех же точках A и B радиусы кривизны контура соответственно будут R_1 и R_2 .

Рассмотрим теперь неравенства (2.21) и (2.22) в точке K , причем за начальную точку в неравенстве (2.21) примем точку B , а в неравенстве (2.22) точку A . Используя соотношения (1.14), (2.1), (2.7), легко получим оценки для величины $d\xi/dl$ в точке B и величины $d\eta/ds$ в точке A

$$\left| \frac{d\xi}{dl} \right|_B \leq \frac{2}{R_2} \cos \alpha_{02}, \quad \left| \frac{d\eta}{ds} \right|_A \leq \frac{2}{R_1} \cos \alpha_{01} \quad (2.23)$$

Направляя в точке K ось x по линии тока, получим в ней равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{1}{2 \cos \alpha} \left(\frac{d\xi}{dl} + \frac{d\eta}{ds} \right), & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{2 \sin \alpha} \left(\frac{d\xi}{dl} - \frac{d\eta}{ds} \right) \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= -\frac{\lambda \operatorname{tg} \alpha}{2 \cos \alpha} \left(\frac{d\eta}{ds} - \frac{d\xi}{dl} \right), & \frac{\partial \lambda}{\partial y} &= -\frac{\lambda \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \alpha} \left(\frac{d\xi}{dl} + \frac{d\eta}{ds} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

причем здесь было использовано соотношение $\sigma'(\lambda) = -\operatorname{ctg} \alpha / \lambda$. Используя теперь неравенства (2.21), (2.22), (2.23) и равенства (2.24) в точке K , получим окончательно следующие неравенства, справедливые в этой точке:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \theta}{\partial x} \right| &\leq [L(\alpha_{01}, R_1) + L(\alpha_{02}, R_2)] N(\alpha) \sqrt{\operatorname{tg} \alpha} \\ \left| \frac{\partial \theta}{\partial y} \right| &\leq [L(\alpha_{01}, R_1) + L(\alpha_{02}, R_2)] N(\alpha) \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha} \\ \left| \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right| &\leq [L(\alpha_{01}, R_1) + L(\alpha_{02}, R_2)] N(\alpha) \lambda \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\operatorname{tg} \alpha} \\ \left| \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right| &\leq [L(\alpha_{01}, R_1) + L(\alpha_{02}, R_2)] N(\alpha) \lambda \sqrt{\operatorname{tg} \alpha} \end{aligned} \quad (2.25)$$

где обозначено

$$N(x) = \left[\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + 1/2(x-1)} \right]^{\frac{1}{2(x-1)}}, \quad L(x_0, R) = \frac{N(\alpha_0)}{R} \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha_0}$$

Неравенства (2.25) показывают, что абсолютные величины производных не могут превосходить некоторых конечных величин, зависящих от числа Маха в данной точке сверхзвуковой зоны и минимального фиксированного радиуса кривизны на части контура, граничащей со сверхзвуковой зоной.

Таким образом предположение о том, что причиной образования скачка уплотнения является возникновение огибающей характеристик внутри местной сверхзвуковой зоны, не оправдывается: поэтому может быть сформулирована:

Теорема 8. *Если при некоторых, определяющих движение газа условиях¹, существовало потенциальное течение с местной сверхзвуковой зоной, то образованию скачков уплотнения внутри или на границе сверхзвуковой зоны, вызванному каким-либо изменением этих условий, не может предшествовать появление бесконечных ускорений во внутренних точках сверхзвуковой зоны, если кривизна части контура, прилегающей к сверхзвуковой зоне, не обращается в бесконечность.*

Полученная теорема относится только к внутренним точкам сверхзвуковой зоны. Из оценок (2.25) уже нельзя сделать вывод о конечности ускорений на линии перехода, так как правые части трех из них стремятся к бесконечности при приближении к этой линии. Поэтому вопрос о том; предшествует ли образованию скачков уплотнения появление бесконечных ускорений в точках линии перехода, остается открытым.

3. О критерии разрушения. В § 2, п. 1 мы выяснили, что деформация контура может привести к разрушению потенциального течения.

Перед деформацией криволинейного отрезка контура в его точках соблюдается неравенство $d\lambda / d(-\theta_k) > -\lambda \operatorname{tg} \alpha$. В конце же деформации в точках полученного прямолинейного участка $d\lambda / d(-\theta_k) = -\infty$, как это следует из теоремы 6.

Следовательно, при каком-то промежуточном состоянии деформируемого контура впервые в некоторой точке отрезка достигается равенство

$$\frac{d\lambda}{d(-\theta_k)} = -\lambda \operatorname{tg} \alpha \tag{2.26}$$

Это состояние деформированного контура является в известном смысле критическим, так как при дальнейшей деформации контура нарушается неравенство (1.13) и; таким образом, течение становится невозможным без скачка уплотнения.

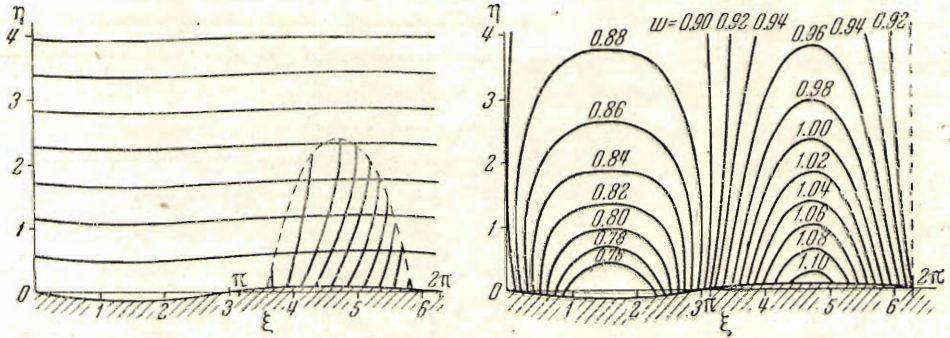
В данном случае условие (2.26) является критерием разрушения потенциального течения. Равенство (2.26) может явиться также критерием заведомого разрушения потенциального течения и в случае, когда обтекается фиксированный контур, но увеличивается число Маха набегающего потока.

Если при некотором числе Маха существовало потенциальное течение с местной сверхзвуковой зоной и в точках контура выполнялось неравенство

$$\frac{d\lambda}{d(-\theta_k)} > -\lambda \operatorname{tg} \alpha$$

¹ При обтекании тела безграничным потоком условиями, определяющими движение газа, являются число Маха набегающего потока и форма контура тела.

и если при увеличении числа Маха набегающего потока неравенство (1.13) будет, начиная с некоторого числа Маха, нарушаться, то этому граничному числу Маха будет соответствовать достижение равенства (2.26) в некоторой точке контура.



Фиг. 26.

Число Маха набегающего потока, при котором впервые в какой-либо точке контура выполняется условие (2.26), будем называть числом Маха разрушения — M^* .

Число M^* является таким предельным числом Маха, после которого обтекаемое тело заведомо должно испытывать волновое сопротивление.

Критерий разрушения (2.26) удобно представить в другой форме, рассматривая величину

$$\theta_{1*} = \theta_k - \varphi(\lambda_k) \tag{2.27}$$

где $\varphi(\lambda)$ — известная функция, изображенная на фиг. 4. Дифференцируя это равенство вдоль контура, имеем

$$\frac{d\theta_{1*}}{ds} = \left[1 - \varphi'(\lambda_k) \frac{\partial \lambda_k}{\partial \theta_k} \right] \frac{d\theta_k}{ds}$$

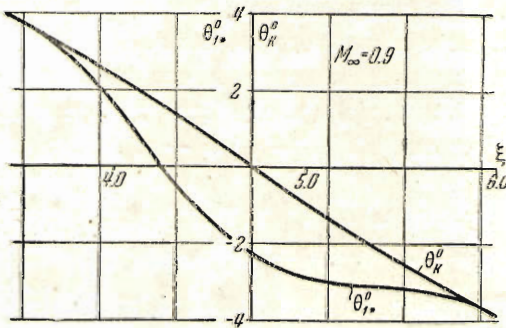
Но $\varphi'(\lambda_k) = 1 / (\lambda_k \operatorname{tg} \alpha_k)$, поэтому в качестве критерия разрушения получим равенство

$$\frac{d\theta_{1*}}{ds} = 0 \tag{2.28}$$

эквивалентное условию (2.26).

Следует заметить, что нарушение неравенства (1.13) в какой-либо точке контура не приводит к разрушению потенциального характера течения вблизи этой точки, но делает невозможным выход характеристик первого семейства из окрестности этой точки на линию перехода, так как иначе на линии перехода был бы нарушен закон монотонности. Характеристики первого семейства должны в этом случае попадать в скачок уплотнения.

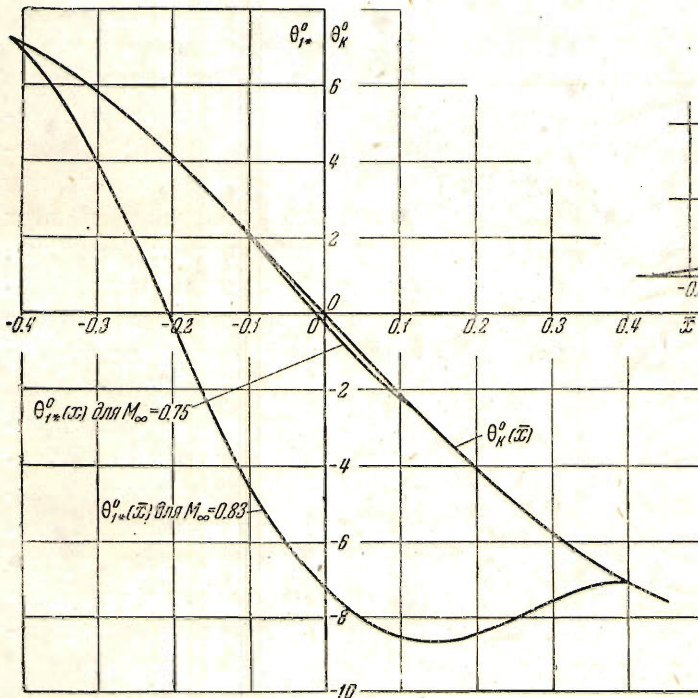
Для определения величины M^* данного контура необходимо знать, как изменяется при увеличении числа Маха набегающего потока величина скорости в точках на контуре при потенциальном течении с местной сверхзвуковой зоной.



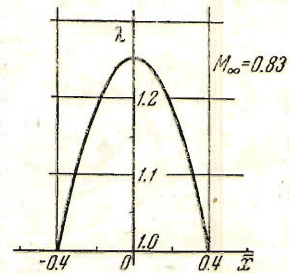
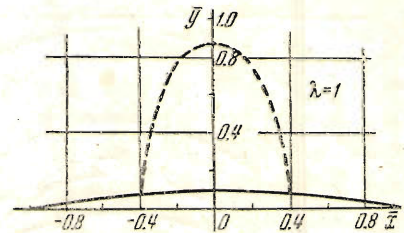
Фиг. 27.

В настоящее время известны некоторые попытки приближенного решения задачи об обтекании фиксированного контура при числах Маха, превышающих M_{cr} (см., например, Гертлер^[5], Тейлор^[4]).

Во всех этих методах сходимость процесса последовательных приближений не доказана, поэтому к результатам расчетов, проведенных при помощи этих методов, следует относиться осторожно. Представляется вероятным, однако, что до тех пор, пока потенциальное течение действительно возможно, указанные методы по крайней мере качественно отражают действительный характер изменения распределения скорости на фиксированном контуре при увеличении числа Маха набегающего потока.



Фиг. 28.



Фиг. 29.

Поэтому представляется целесообразным проследить на этих решениях, имеется ли тенденция к достижению на контуре условия (2.28) при увеличении числа Маха набегающего потока.

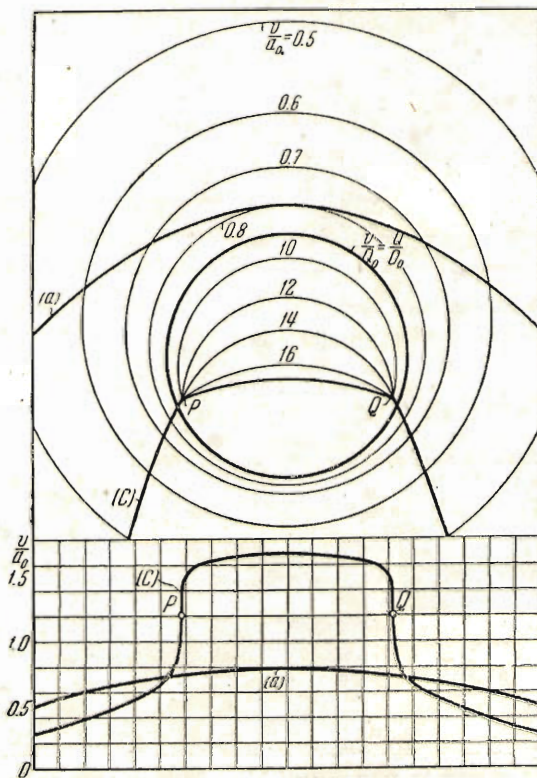
По геометрическим данным волнистой стенки и распределению скорости по стенке, полученным в работе Гертлера^[5] для числа Маха набегающего потока $M = 0.9$, мы вычислили по формуле (2.27) углы наклона θ_{1*} . Картина линий тока и линий равных скоростей для этого случая изображена на фиг. 26. Зависимость θ_{1*} от координаты вдоль стенки ξ изображена на фиг. 27.

Как видно, течение близко к разрушению. В самом деле, монотонное уменьшение угла происходит до $\xi = 5.5$, после чего угол остается почти постоянным, лишь немного уменьшаясь.

На фиг. 28 изображена зависимость θ_{1*} от x для течения около профиля, рас-

считанного в одной американской работе при $M=0.75$ и $M=0.83$. Распределение скорости по контуру и границы местной сверхзвуковой зоны приведены на фиг. 29. На фиг. 28 особенно отчетливо видно, что тенденция к нарушению монотонности на линии перехода усиливается с ростом скорости. При $M=0.75$, немного превышающем M_{cr} , углы падают почти так же быстро, как на контуре. При $M=0.83$ монотонность изменения θ_{1*} уже нарушена. Следовательно, еще при $M < 0.83$ произошло разрушение потенциального течения около этого профиля. Строго говоря, решение для $M=0.83$ уже не имеет смысла. Таким образом в данных решениях обнаруживается тенденция к достижению на контуре условия (2.28) при увеличении числа Маха набегающего потока.

4. О бесконечных ускорениях в некоторых точных решениях. В § 2, п. 2 мы видели, что бесконечное ускорение на контуре может появиться только тогда, когда кривизна контура в какой-либо точке равна бесконечности.



Фиг. 36.

Ринглемом [6] было дано точное решение некоторого течения с местной сверхзвуковой зоной, которое было характерно появлением бесконечного ускорения в двух симметричных точках контура. Согласно результатам этого параграфа (п. 2) это свидетельствует о бесконечной кривизне контура в этих точках. На фиг. 30 изображена картина течения и распределения скорости. В точках P и Q контура Ринглемом получены бесконечные значения производной скорости, т. е. бесконечные ускорения. Оказывается, что в плоскости годографа в точках, соответствующих P и Q в плоскости течения, образ линии тока и эциклоида имеют общую касательную.

В работе 1941 г. Карман [8] подробно анализирует решение Ринглемба, имея целью выяснить на этом типе течения возможные причины образования скачков уплотнения в местных сверхзвуковых зонах. Он показывает, что если на контуре в сверхзвуковом потоке имеется точка с бесконечным ускорением и величиной $\partial\psi/\partial\theta \neq \infty$ (где ψ —функция тока, θ —угол наклона вектора скорости), то, как и в случае Ринглемба, образ линии тока в плоскости годографа касается эциклоиды в точке, соответствующей точке с бесконечным ускорением плоскости течения. Карман отождествляет это касание в плоскости годографа с наличием бесконечного ускорения в соответствующей точке плоскости течения. Однако Карман, повидимому, не замечает того отмеченного выше обстоятельства, что наличие бесконечного ускорения в какой-либо точке сверхзвукового тече-

ния свидетельствует о наличии в ней бесконечной кривизны линии тока, связывая бесконечное ускорение в этом частном случае с невозможностью непрерывного течения в общем случае. Об этом свидетельствует то, что он при помощи упомянутого выше условия касания в плоскости годографа ищет бесконечное ускорение на контуре профиля NASA-4412, не имеющем бесконечных кривизн, пользуясь экспериментальным распределением скорости по контуру. Он получает в плоскости годографа точку касания образа контура с эпициклоидой, однако в соответствующей ей точке контура профиля, как и должно быть, не оказывается бесконечного ускорения. Карман не дает удовлетворительного объяснения этому, противоречащему его выводам, обстоятельству.

На самом деле, подобного рода несоответствие объясняется тем, что касание в плоскости годографа может иметь место одновременно с условием $\partial\psi/\partial\theta = \infty$ в рассматриваемой точке плоскости течения. Примером этому может служить течение Мейера—обтекание некоторого контура, при котором весь контур совпадает в плоскости годографа с эпициклоидой, и тем не менее в точках этого контура ускорение конечно, если конечна кривизна.

Кроме того, в условиях задачи обтекания с местной сверхзвуковой зоной касание в плоскости годографа образа контура с эпициклоидой эквивалентно условию (2.26) в точке контура, соответствующей упомянутой точке касания, между тем как в этой точке контура ускорение конечно, если конечна кривизна контура.

В последнее время появились работы по отысканию точных решений задачи обтекания с местными сверхзвуковыми зонами, использующие уравнения С. А. Чаплыгина в плоскости годографа. Несмотря на то, что этими работами указаны примеры существования потенциальных течений с местными сверхзвуковыми зонами, познавательная ценность этих работ ограничена тем обстоятельством, что с изменением числа Маха набегающего потока одновременно происходит и деформация контура обтекаемого тела. Благодаря этому внутри местной сверхзвуковой зоны появляются точки с бесконечным ускорением, которое свидетельствует, на основании доказанной в § 2, п. 2 теоремы, о бесконечной кривизне контура в этих точках.

Из вышеизложенного становится очевидным, что появление такой предельной линии контура ошибочно связывать с невозможностью потенциального течения с местной сверхзвуковой зоной около фиксированного профиля.

Нам представляется, что выяснение принципиальных свойств течения с местной сверхзвуковой зоной следует проводить непосредственно в плоскости течения.

В изложенной выше работе все результаты получены непосредственными исследованиями в плоскости течения.

Поступила в редакцию
10 V 1946

Центральный аэро-
гидродинамический институт

A. A. NIKOLSKY, G. I. TAGANOV. GAS MOTION IN A LOCAL SUPERSONIC REGION AND CONDITIONS OF BREAK OF POTENTIAL FLOW

The paper presents features of the flow of a gas in a local supersonic region bounded by the contour of the body and the transition line. The authors determine conditions under which potential flow with a local supersonic region becomes impossible and gives rise to a shock wave.

The most important theorems presented in the work are as follows:

Theorem 2. A point moving along the transition line so that the region of subsonic velocities remains to the left, has a velocity vector turning monotonously clockwise.

Theorem 3. Given that segment of characteristics of a family in the supersonic region for which the characteristics of the other family extend from a point of the segment to the transition line, the slope of the velocity vector and the magnitude of the velocity are monotonous functions along the given segment of characteristics.

Theorem 6. Along a rectilinear part of the profile in the supersonic region, the magnitude of the velocity decreases.

Theorem 7. The characteristics of the first family which begin at points of the rectilinear part of the profile can never extend to the transition line, but must merge in the shock wave.

Theorem 8. Given a potential flow with supersonic region, provided there certain conditions determining the gas motion, the formation of shock waves within or on the boundary of the supersonic region due to a change in the above conditions cannot be preceded by the appearance of infinite accelerations of points within the supersonic region, if the curvature of that part of the profile which is adjacent to the supersonic region does not approach infinity.

The work also gives the following ranges of change of velocity along the part of the profile which is in the supersonic region:

1) Expression (1.14) for points on the profile from which characteristics of both families extend to the transition line.

2) Expression (1.12) for points on the profile from which only the characteristics of the second family extend to the transition line.

Based on Theorem 2, expression (2.28) is derived as a criterion of the consequent beginning of break of potential flow.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христанович С. А. О сверхзвуковых течениях газа. Труды ЦАГИ, (1941). № 543.
2. Кибель, Кочин и Резе. Теоретическая гидромеханика. Ч. II.
3. Ть. в. Карман, Journal of the Aeronautical Sciences. (1944). Vol. 8. № 9.
4. Taylor. Journal London Math. Soc. (1930). Vol. 5. P. 224.
5. Görtler. ZAMM. (1940). Bd. 20. S. 254—262.
6. Ringleb. ZAMM. (1940). Bd. 20. S. 185—198.