Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, Том X, 1946

ВОЛНЫ, ВОЗМУЩАЕМЫЕ КОЛЕБАНИЯМИ ТЕЛА В МЕЛКОВОДЬЕ

М. Д. Хаскинд

(Москва)

Рассмотрим задачу о малых гармонических колебаниях тела под свободной поверхностью тяжелой и несжимаемой жидкости конечной глубины. Нормальную составляющую скорости в какой-либо точке M поверхности тела S представим в форме

$$v_n(M, t) = V(M)\, e^{ikt} \tag{1}$$

где k — частота колебаний. Здесь и в дальнейшем в комплексных выражениях с множителем $\exp ikt$ следует подразумевать только действительную часть.

Рассматривая далее потенциальные движения жидкости и считая возникшее колебательное движение жидкости установившимся, потенциал скоростей движения жидкости можно записать в виде

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z)\, e^{ikt} \tag{2}$$

Для гармонической функции φ имеем граничные условия:
на свободной поверхности при $z = 0$ условие о постоянстве давления

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \nu\varphi = 0 \qquad \left(\nu = \frac{k^2}{g}\right), \tag{3}$$

на поверхности тела S условие обтекания

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = V(M) \tag{4}$$

и, наконец, на дне бассейна при $z = -h$ условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

Здесь система координат выбрана обычным путем — плоскость Oxy совпадает с первоначальным невозмущенным уровнем жидкости, ось Oz направлена вертикально вверх.

К условиям (3) — (5) следует добавить условие об ограниченности производных функции φ в области, занятой жидкостью, и условие о том, что вдали от тела возмущенные волны должны переходить в систему расходящихся волн, т. е.

$$\lim_{R\to\infty} \sqrt{R}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} + i\lambda_0\varphi\right) = 0 \qquad \left(R = \sqrt{x^2 + y^2}\right) \tag{6}$$

где λ_0 — действительный и положительный корень трансцендентного уравнения

$$\lambda_0 \operatorname{sh} \lambda_0 h = \nu \operatorname{ch} \lambda_0 h \tag{7}$$

Предварительно рассмотрим более простую задачу, а именно, пусть в точке $Q(\xi, \eta, \zeta)$ под свободной поверхностью имеем пульсирующий источник с интенсивностью, изменяющейся со временем по гармоническому закону. Тогда, применяя метод Фурье, для соответствующего потенциала скоростей $G \exp ikt$ волнового движения жидкости можно установить формулу[1]

$$G = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \int\limits_{0(L)}^{\infty} \frac{(\lambda + \nu) \operatorname{ch} \lambda (\zeta + h) \operatorname{ch} \lambda (z + h)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h - \nu \operatorname{ch} \lambda h} e^{-i\lambda[h - i(x-\xi)\cos\theta - i(y-\eta)\sin\theta]} \, d\theta \, d\lambda \tag{8}$$

где r — расстояние между точкой $P(x, y, z)$ и точкой $Q(\xi, \eta, \zeta)$, r' — расстояние между этой же точкой P и точкой $Q'(\xi, \eta, -\zeta)$, и интегрирование по λ производится по пути L, соединяющему точки $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$, но обходящему особую точку $\lambda = \lambda_0$ с верхней стороны.

При достаточно больших R функция G имеет асимптотическое представление

$$G = 2 \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_0 R}} \frac{(\lambda_0 + \nu) \operatorname{sh} \lambda_0 h}{\nu h + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h} \operatorname{ch} \lambda_0 (z + h) \operatorname{ch} \lambda_0 (\zeta + h) \exp \left\{ -\lambda_0 \left[h + i \left(R + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \right.$$
$$\left. + i\lambda_0 (\xi \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta) \right\} + O\left(\frac{1}{R}\right) \tag{9}$$

где $O(\alpha)$ — означает члены, имеющие порядок малости α, и $\vartheta = \operatorname{arctg} y/x$ — полярный угол. Как легко видеть, выражение (9) удовлетворяет требованию (6).

Общее представление для функции φ, если на поверхности S заданы значения $\partial\varphi / \partial n$ и φ, дается формулой

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} G - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \tag{10}$$

Вывод этой формулы путем применения формулы Грина к гармоническим функциям φ и G в некоторой области, занятой жидкостью, вполне аналогичен изложенному в нашей работе [1].

Заметим, что поверхность интегрирования в формуле (10) можно деформировать в любую поверхность, охватывающую поверхность S и находящуюся в области, занятой жидкостью.

Подставив в (10) выражение для функции G и изменив порядок интегрирования, находим

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z)$$

где φ_1 — гармоническая функция во всем пространстве вне поверхности S:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{1}{r} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS \tag{11}$$

[1] Это выражение для функции G было получено Р. О. Володарской.

а φ_2 — гармоническая функция во всей области: $0 > z > -h$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda(z+h-ix\cos\theta-iy\sin\theta)}H_-(\lambda,\theta)\,d\theta\,d\lambda -$$

$$-\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0(L)}^{\infty}\frac{(\lambda+\nu)\,e^{-\lambda h}\operatorname{ch}\lambda(z+h)}{\lambda\operatorname{sh}\lambda h-\nu\operatorname{ch}\lambda h}\,e^{i\lambda(x\cos\theta+y\sin\theta)}\left[H_+(\lambda,\theta)+H_-(\lambda,\theta)\right]d\theta\,d\lambda \quad (12)$$

Здесь функции $H_+(\lambda, \theta)$ и $H_-(\lambda, \theta)$ определяются

$$H_\pm(\lambda,\theta) = \iint_S e^{\pm\lambda(z+h\mp ix\cos\theta\mp iy\sin\theta)}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mp\right.$$

$$\left.\mp\lambda\varphi\left[\mp i\cos\theta\cos(n,x)\mp i\sin\theta\cos(n,y)+\cos(n,z)\right]\right\}dS \quad (13)$$

Исходя из формулы для возвышения свободной поверхности

$$\zeta = -i\,\frac{k}{g}\,\varphi(x,y,0)\,e^{ikt} \quad (14)$$

и формул (9) и (10), получаем выражение для возвышения свободной поверхности при больших R:

$$\zeta = i\,\frac{k}{g}\sqrt{\frac{1}{8\pi\lambda_0 R}}\,e^{-\lambda_0 h}\frac{(\lambda_0+\nu)\operatorname{sh}2\lambda_0 h}{\nu h+\operatorname{sh}^2\lambda_0 h}\,M(\lambda_0,\vartheta)\,e^{i\left[kt-\lambda_0\left(R+\frac{1}{4}\pi\right)\right]} \quad (15)$$

где

$$M(\lambda_0,\vartheta) = \frac{1}{2}\Big(H_+(-\lambda_0,\vartheta)+H_-(\lambda_0,\vartheta)\Big) \quad (16)$$

Следовательно, амплитуда образующихся волн определяется формулой

$$a = \frac{k}{g}\sqrt{\frac{1}{2\pi\lambda_0 R}}\,\frac{\nu\operatorname{ch}\lambda_0 h}{\nu h+\operatorname{ch}^2\lambda_0 h}\,|M(\lambda_0,\vartheta)| \quad (17)$$

Подсчитаем энергию, затрачиваемую на образование этих волн. Как известно, для случая плоских прогрессивных волн на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины затрачиваемая на образование волн мощность дается формулой $^1/_2\,\rho g a^2 u$, где ρ — плотность жидкости, а u — групповая скорость распространения волн в жидкости конечной глубины. В нашем случае

$$u = \frac{1}{2}\,\frac{k}{\lambda_0}\left(1+\frac{2\lambda_0 h}{\operatorname{sh}2\lambda_0 h}\right) \quad (18)$$

Поэтому затрачиваемая мощность дается выражением

$$N = \frac{1}{2}\,\rho g u\int_{-\pi}^{+\pi} a^2 R\,d\vartheta = \frac{\rho\nu k}{8\pi(\nu h+\operatorname{sh}^2\lambda_0 h)}\int_{-\pi}^{+\pi}|M(\lambda_0,\vartheta)|^2\,d\vartheta \quad (19)$$

Вычислим теперь средние значения гидродинамических сил, действующих на колеблющуюся поверхность S за период колебаний $2\pi/k$. Для среднего значения главного вектора гидродинамических сил, действующих на поверхность S, имеем формулу [2]

$$\mathbf{F}^* = \rho g\tau^*\mathbf{k} + \frac{1}{2}\,\rho\operatorname{Re}\iint_S\left[(\nabla\varphi_2\cdot\nabla\bar{\varphi})\,\mathbf{n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\nabla\bar{\varphi} - \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial n}\nabla\varphi_2\right]dS \quad (20)$$

где τ^* — среднее значение объема тела, а $\mathbf{k}$ — единичный вектор оси Oz.

Подставив в (20) выражение для φ_2 и выполнив ряд несложных, но довольно длинных вычислений, для компонент X^*, Y^*, Z^* главного вектора $\mathbf{F}^*$ находим

$$X^* = \frac{\rho\lambda_0\nu}{8\pi(\nu h + \operatorname{sh}^2\lambda_0 h)} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} |M(-\lambda_0, \theta)|^2 \cos\theta \, d\theta$$

$$Y^* = \frac{\rho\lambda_0\nu}{8\pi(\nu h + \operatorname{sh}^2\lambda_0 h)} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} |M(-\lambda_0, \theta)|^2 \sin\theta \, d\theta \tag{21}$$

$$Z^* = \rho g \tau^* - \frac{1}{16\pi^2}\rho \int\limits_{-\pi}^{+\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \lambda\, |H_-(\lambda, \theta)|^2 d\theta\, d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{32\pi^2}\rho \int\limits_{-\pi}^{-\pi} \text{v.p.} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda+\nu)e^{-\lambda h}}{\lambda \operatorname{sh}\lambda h - \nu \operatorname{ch}\lambda h} \left(|H_+(\lambda, \theta)|^2 - |H_-(\lambda, \theta)|^2\right) d\theta\, d\lambda +$$

$$+ \frac{\rho\lambda_0\nu}{16\pi(\nu h + \operatorname{sh}^2\lambda_0 h)} \operatorname{Im} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \overline{H}_+(\lambda_0, \theta) H_-(\lambda_0, \theta)\, d\theta \tag{22}$$

где v. p. означает главное значение интеграла в смысле Коши.

Выше мы нашли выражения основных элементов волнового движения через функцию $H_\pm$. Для вычисления этих функций необходимо знать потенциал скоростей волнового движения жидкости. Но очевидно, что при полном погружении тела в первом приближении при вычислении функции $H_\pm$ можно вместо функции $\varphi(x, y, z)$ подставить то выражение, которое соответствует рассматриваемому колебательному движению тела в безграничной жидкости. Рассмотрим некоторые примеры приближенного решения задачи.

1°. *Осциллирующая сфера.* Пусть сфера радиуса b, центр которой находится на отрицательной оси z на глубине h_0, осциллирует по вертикали со скоростью V, так что на поверхости сферы имеем условие

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = V\cos\vartheta\, e^{ikt}$$

где ϑ — угол, образуемый вертикалью и радиусом.

Для бесконечной жидкости потенциал скоростей имеет вид

$$\Phi = -V\frac{b^3\cos\vartheta}{2r^2} e^{ikt} \qquad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+h_0)^2}\right)$$

Вычисляя функцию $H_\pm(\lambda, \theta)$, находим

$$H_\pm(\lambda, \theta) = \pm 2\pi V b^3 \lambda e^{\pm\lambda(h-h_0)}$$

По формуле (17) определяем амплитуду образующихся волн:

$$a = Vb^3\frac{k}{g}\sqrt{\frac{2\pi\lambda_0}{R}\frac{\nu\operatorname{ch}\lambda_0 h \operatorname{sh}\lambda_0(h-h_0)}{\nu h + \operatorname{sh}^2\lambda_0 h}} \tag{23}$$

Таким образом во все стороны расходятся волны одной и той же амплитуды. Затрачиваемая на их образование мощность определяется формулой

$$N = \frac{\pi\rho V^2 b^6 \nu k \lambda_0^3}{\nu h + \mathrm{sh}^2 \lambda_0 h} \mathrm{sh}^2 \lambda_0 (h - h_0) \tag{24}$$

Наконец, по формулам (21) и (22) найдем значения средних сил, действующих на сферу:

$$X^* = Y^* = 0,$$

$$Z^* = \frac{4\pi\rho}{3} g b^3 - \frac{3\pi\rho V^2 b^6}{16 (h - h_0)^4} + \frac{\pi\rho}{2} V^2 b^6 \text{ v.p.} \int_0^\infty \frac{\lambda^3 (\lambda + \nu) \, \mathrm{sh} \, 2\lambda \, (h - h_0) \, d\lambda}{e^{\lambda h} (\lambda \, \mathrm{sh} \, \lambda h - \nu \, \mathrm{ch} \, \lambda h)} \tag{25}$$

Интегральное слагаемое в формуле (25) вычисляется точно при $\nu = 0$ и $\nu = \infty$; для промежуточных значений вычисление приходится проводить численными методами.

2°. *Демпфирование вертикальной и килевой качки корабля.* Согласно установленному в нашей работе[1] в самом общем случае вынужденных качаний с шестью степенями свободы на плавающее тело произвольной формы действуют инерционные силы, пропорциональные ускорениям, демпфирующие силы, пропорциональные скоростям, и восстанавливающие силы, пропорциональные перемещениям тела.

Демпфирующие силы обусловлены непрерывной затратой энергии на образование волн. Предполагая форму корабля симметричной относительно мидель-шпангоута, для демпфирующей силы при вертикальной качке и демпфирующего момента при килевой качке имеем

$$F = \lambda_v V, \qquad M = \lambda_\omega \Omega, \qquad \lambda_v = \frac{\partial^2 N}{\partial V_0^2} \qquad \lambda_\omega = \frac{\partial^2 N}{\partial \Omega_0^2} \tag{26}$$

где V и Ω — соответственно вертикальная и угловая скорости, а V_0 и Ω_0 — их амплитуды.

Мощность N является квадратичной формой относительно величин V_0 и Ω_0, и поэтому для коэффициентов демпфирования получим

$$\lambda_v = \frac{\rho\nu k}{4\pi (\nu h + \mathrm{sh}^2 \lambda_0 h)} \int_{-\pi}^{+\pi} | M_1 (\lambda_0, \vartheta) |^2 d\vartheta, \qquad \lambda_\omega = \frac{\rho\nu k}{4\pi (\nu h + \mathrm{sh}^2 \lambda_0 h)} \int_{-\pi}^{+\pi} | M_2 (\lambda_0, \vartheta) |^2 d\vartheta \tag{27}$$

где (j = 1, 2)

$$M_j (\lambda, \theta) = \iint_S \mathrm{ch} \, \lambda (z + h) \, e^{i\lambda (x \cos\theta + y \sin\theta)} \left\{ \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \lambda \varphi_j \left[i \cos\theta \cos (n, x) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + i \sin\theta \cos (n, y) + \mathrm{th} \, \lambda (z + h) \cos (n, z) \right] \right\} dS \tag{28}$$

Функция $\varphi_1 (x, y, z)$ отвечает вертикальным колебаниям с амплитудой скорости, равной единице, а функция $\varphi_2 (x, y, z)$ отвечает угловым колебаниям с единичной амплитудой угловой скорости. Так что функции φ_j удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = - \nu \varphi_j = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h \tag{29}$$

и на поверхности корабля S

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \cos(n, z), \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = z\cos(n, x) - x\cos(n, z) \tag{30}$$

При малых λ_0 для функций M_1 и M_2 находим

$$M_1 = -S_0 + O(\lambda_0), \qquad M_2 = i\lambda_0\left(J_y - a^*\tau + \frac{1}{\rho}\mu_{15}(o)\right)\cos\theta + O(\lambda_0^2) \tag{31}$$

где S_0 — площадь ватерлинии, J_y — момент инерции этой площади относительно оси Oy, τ — объемное водоизмещение корабля, a^* — глубина погружена центра величины и, наконец, $\mu_{15}(o)$ — значение обобщенной присоединенной массы при $\nu = 0$, установленной в нашей работе [1]:

$$\mu_{15}(o) = -\rho \iint_S \varphi_2 \cos(n; x)\, dS \tag{32}$$

при этом функция φ_2 при $z = 0$ удовлетворяет условию $\partial\varphi_2 / \partial z = 0$.

При малых λ_0 соотношение (7) приводит к равенству $\lambda_0{}^2 h = \nu$, и поэтому для коэффициентов демпфирования при малых ν получаем формулы

$$\lambda_v = \frac{1}{4h}\rho k S_0{}^2 \qquad \lambda_\omega = \frac{1}{8h^2}\rho k\nu\left(J_y - a^*\tau + \frac{1}{\rho}\mu_{15}(o)\right)^2 \tag{33}$$

Поступила в редакцию
12 II 1945

M. D. HASKIND. WAVES ARISING FROM OSCILLATION OF BODIES IN SHALLOW WATER

The paper presents a general analysis of the wave movement arising throug the oscillation of a body under the surface of a heavy fluid of finite depth. A number of formulae for wave motion are obtained, *viz.* the amplitude of the waves formed (formula 17); energy expended in their formation (formula 19); average magnitude of the forces acting on the body for a single cycle of the oscillation (formulae 21 and 22). All of these formulae are expressed in terms of the special function $H(\lambda,\theta)$, introduced by N. E. Kochin [2] which is determined by mean of the potential of velocities of the fluid (equation 13).

A number of examples of the approximate solution of the problem are examined as illustrations of the application of the general formulae. The most important is the determination of the damping coefficients for pitching and tossing of a ship.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Гидродинамическая теория качки корабля на волнении. Прикладная математика и механика, 1946. Т. X. Вып. 1.
1. Кочин Н. Е. Теория волн, вынуждаемых колебаниями тела под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости. Ученые записки МГУ (Механика) 1940. Вып. 46.