

ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Л. Е. Калихан

(Москва)

До настоящего времени для криволинейных форм обтекаемых тел были решены лишь такие задачи, в которых рассматривается теплообмен между стенкой тела и несжимаемой жидкостью с физическими постоянными, не зависящими от температуры (гидродинамическая теория теплообмена). При этих предложениях, справедливых для газов лишь при малых числах Маха (отношение скорости газа к скорости звука) и небольших перепадах температур между потоком и стенкой, поле скоростей не зависит от поля температур.

В 1941 г. А. А. Дородницыным^[1] была решена задача о влиянии сжимаемости на пограничный слой при отсутствии теплообмена. В этом случае связь между полем температур и полем скоростей дана по условиям задачи (постоянство полной энергии).

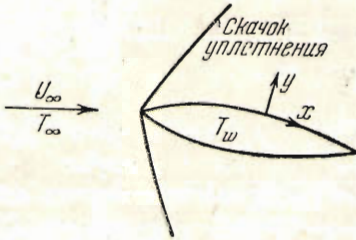
В настоящей работе, посвященной теплообмену между газом и стенкой при больших перепадах температур и больших скоростях, используется указанный Дородницыным метод введения новой независимой переменной, с той, однако, разницей, что связь между полем температур (т. е. плотностей) и полем скоростей в рассматриваемом общем случае не предполагается заданной, а подлежит определению из решения задачи.

Таким образом учитывается влияние сжимаемости, вызванной теплообменом (при одновременном учете влияния сжимаемости, вызванной большими скоростями), указывается метод определения необходимых для многих областей современной техники (реактивная и скоростная авиация, баллистика, теория турбин и пр.) коэффициентов теплоотдачи и коэффициентов трения криволинейной стенки, обтекаемой газом при больших числах Маха и больших перепадах температур. Предлагаемый метод применим как при числах Прандтля $P = 1$, так и при $P \neq 1$.

1. Основные соотношения для ламинарного и турбулентного пограничного слоя в газе при наличии теплообмена

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание произвольного контура типа профиля крыла стационарным плоским потоком газа (фиг. 1). При сверхзвуковых скоростях учитываем существование косога скачка уплотнения, начинающегося у острой передней кромки, или криволинейной головной волны, проходящей впереди профиля. При дозвуковых скоростях принимаем, что скачки уплотнения отсутствуют (значение числа Маха набегающего потока меньше критического).

Обозначим: u, v — составляющие скорости по осям x, y , причем x — расстояние по дуге профиля от передней кромки, y — расстояние по нормали, T — абсолютная температура, p — давление, ρ — плотность, μ — коэффициент вязкости, λ — коэффициент теплопроводности, ε — коэффициент турбулентного обмена, λ_t — коэффициент турбулентной теплопроводности, c_p — удельная теплоемкость, J — механический эквивалент тепла,



Фиг. 1.

$$T^* = T + \frac{u^2}{2Jc_p}$$

— температура торможения,

$$a = \sqrt{\kappa p / \rho}$$

— скорость звука,

$$\kappa = c_p / c_v$$

— показатель адиабаты,

$$P = \mu c_p / \lambda$$

— число Прандтля.

Остальные обозначения оговариваются в тексте. Значения величин в невозмущенном потоке отмечаются индексом ∞ , значения величин на стенке — индексом w .

Проблема состоит в решении системы уравнений^[2]

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial T^*}{\partial x} + v \frac{\partial T^*}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \varepsilon) \frac{\partial T^*}{\partial y} \right] + \left(\frac{1}{P} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

$$p = \bar{R}T, \quad \mu = CT^n \quad (1.5)$$

где \bar{R} — газовая постоянная, C и n — постоянные.

При решении системы (1.1) — (1.5) переходим из представления о динамическом и тепловом пограничном слое конечной (но разлечной) толщины.

Поток вне динамического пограничного слоя близок к идеальному (невязкому) течению, безвихревому перед скачком уплотнения и, вообще говоря, вихревому за скачком. Уравнение (1.4) показывает, что давление передается через пограничный слой без изменения, т. е. давление $p_0(x)$ и скорость на границе слоя $U(x)$ можно рассматривать как заданные функции от x .

Течение вне теплового пограничного слоя принимаем происходящим без теплообмена, т. е. вне теплового слоя, и на его границе, полная энергия i_0 постоянна:

$$Jc_p T + \frac{u^2}{2} = Jc_p T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2} = Jc_p T_0 + \frac{U^2}{2} = i_0 \quad (1.6)$$

Отсюда следует, что температура торможения T^* вне теплового пограничного слоя имеет постоянное значение

$$T^* = T_{00} = \frac{i_0}{Jc_p} \quad (1.7)$$

Таким образом, поток вне теплового пограничного слоя при небольших скоростях предполагается близким к изотермическому, при больших дозвуковых скоростях — изоэнтропическим, при сверхзвуковых скоростях имеет место постоянство энтропии до скачка уплотнения, тогда как за скачком энтропия будет постоянной вдоль каждой струйки внешнего потока, обтекающего профиль, но переменной для различных струек.

Граничные условия задачи:

$$u = v = 0, \quad T^* = T_w \quad \text{при } y = 0 \quad (1.8)$$

где $T_w = T_w(x)$ — данная функция; при отсутствии внешнего теплообмена (через стенку) вместо второго условия (1.8) имеем $(\partial T^* / \partial y)_{y=0} = 0$.

Далее

$$\begin{aligned} u &= U(x) \quad \text{при } y = \delta_y(x) \\ T^* &= T_{00} \quad \text{при } y = \Delta_y(x) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь δ_y и Δ_y — значения y , относящиеся соответственно к границе динамического и границе теплового слоя.

§ 2. Основное выражение для температуры. При $P=1$ уравнение (1.3) допускает «тривиальный» интеграл $T^* = \text{const}$; учитывая второе условие (1.9), получим

$$T = T_{00} (1 - \bar{u}^2) \quad \left(\bar{u} = \frac{u}{\sqrt{2i_0}} \right) \quad (2.1)$$

Температура стенки при этом равна температуре адиабатического торможения:

$$T_w = T_{00} = T_\infty \left[1 + \frac{1}{2} (\kappa - 1) M_\infty^2 \right] \quad \left(M_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty} \right) \quad (2.2)$$

Интеграл (2.1), соответствующий случаю отсутствия внешнего и внутреннего теплообмена в пограничном слое $(\partial T / \partial y)_{y=0} = 0$ при $P=1$, был положен в основу решения А. А. Дородницына [1].

При $P=1$, $U = \text{const}$ и $T_w = \text{const}$ уравнение (1.3) также интегрируется независимо от решения остальных уравнений системы, именно, допускает так называемый интеграл Стодола-Крокко

$$T^* = \bar{u}u + b \quad (2.3)$$

Подчиняя этот интеграл граничным условиям, найдем

$$T = T_{00} \left[1 - \bar{u}^2 + (\bar{T}_w - 1) \left(1 - \frac{u}{U} \right) \right] \quad \left(\bar{T}_w = \frac{T_w}{T_{00}} \right) \quad (2.4)$$

Из уравнения (2.3) получим также

$$\frac{u}{U} = \frac{t^*}{t_0^*} \quad (t^* = T^* - T_w, \quad t_0^* = T_{00} - T_w) \quad (2.5)$$

Интеграл (2.4), соответствующий случаю, когда имеет место подобие полей скоростей и полей перепада температур торможения (2.5), использован нами при решении задачи об обтекании плоской пластины газом [3].

В любом более общем случае, $U \neq \text{const}$ (при $\partial T / \partial y)_{y=0} \neq 0$), или $T_w \neq \text{const}$, или $P \neq 1$, интеграл уравнения (1.3) наперед неизвестен.

Существование «тривиального» интеграла не является, однако, необходимым условием для решения задачи, — этот факт является основным для последующего.

Пусть функции $T^*(x, y)$ и $u(x, y)$ являются интегралами системы (1.1) — (1.5), удовлетворяющими граничным условиям (1.8), (1.9). Тогда температура в произвольной точке может быть представлена в виде

$$T = T_{00} \left[\frac{T^*}{T_{00}} - \bar{u}^2 \right] \quad (2.6)$$

или

$$T = T_{00} \left[1 - \bar{u}^2 + (\bar{T}_w - 1) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right) \right]$$

Как легко видеть, интегралы (2.1) и (2.4) являются частными случаями второй формы соотношения (2.6) при $\bar{T}_w = 1$ и $t^* / t_0^* = u / U$ соответственно. Это соотношение позволяет выразить наряду с температурой также плотность и вязкость в функции от скорости и перепада температур торможения.

§ 3. Выражения для давления, плотности и вязкости. Давление p в произвольной точке внутри пограничного слоя определяется уравнением Бернулли

$$p = p_0 = p_{02} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{z-1}} \quad \left(\bar{U} = \frac{U}{\sqrt{2i_0}} \right) \quad (3.1)$$

где p_0 — давление на границе слоя (теплового или динамического, смотря по тому, который из них толще), p_{02} — давление при адиабатическом сведении скорости к нулю в струйке, прошедшей через скачок уплотнения. Плотность ρ в произвольной точке внутри пограничного слоя определяется уравнением состояния (первое уравнение (1.5)), уравнениями (2.6) и (3.1)

$$\rho = \rho_{02} \frac{1}{1 - \bar{u}^2 + (\bar{T}_w - 1) (1 - t^* / t_0^*)} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{z-1}} \quad (3.2)$$

где ρ_{02} — плотность при адиабатическом сведении скорости к нулю.

Вязкость μ определяется уравнением

$$\mu = \mu_{00} \left[1 - \bar{u}^2 + (\bar{T}_w - 1) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right) \right]^n \quad (n \approx 0.75) \quad (3.3)$$

где μ_{00} соответствует температуре T_{00} , т. е. получается при адиабатическом сведении скорости к нулю.

Для произвольной точки перед скачком уплотнения имеем

$$\begin{aligned} p &= p_{01} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{z-1}} \\ \rho &= \rho_{01} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{1}{z-1}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

где p_{01} и ρ_{01} — соответственно давление и плотность при адиабатическом сведении скорости к нулю до пересечения струйкой скачка уплотнения.

В качестве масштаба скоростей вместо принятой величины $\sqrt{2i_0}$ можно взять критическую скорость a^* и местную скорость звука a . Как известно, $a^* = \sqrt{(x-1)/(x+1)} \sqrt{2i_0}$. Вводя обозначения $U/a^* = \lambda$ и $U/a = M$, получим

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \lambda, & \bar{U} &= \sqrt{\frac{(x-1) M^2 / 2}{1 + (x-1) M^2 / 2}} \\ M &= \sqrt{\frac{\lambda}{\sqrt{(x+1)/2 - (x-1)\lambda^2/2}}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

§ 4. Интегральные соотношения импульсов и энергии в новых переменных. Из уравнений (3.1) и (3.2) находим

$$\frac{dp}{dx} = -\rho_0 U \frac{dU}{dx} = -\rho_0 U U', \quad (4.1)$$

где ρ_0 — плотность на границе пограничного слоя (теплового или динамического, смотря по тому, который из них толще).

Представим уравнения (1.1) и (1.2) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) &= \rho_0 U U' + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v U) - \rho u U' &= 0 \end{aligned}$$

Вычитая из последнего уравнения предыдущее, получим

$$\begin{aligned} U^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) \right] + 2UU' \rho \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v (U - u)] + \\ + UU' \rho \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) + UU' \rho \left(1 - \frac{u}{U} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из уравнения (3.2) находим

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \rho_{02} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{1}{x-1}} \\ \frac{\rho_0}{\rho} - 1 &= \frac{\bar{U}^2 - u^2 + (\bar{T}_w - 1)(1 - t^*/t_0^*)}{1 - \bar{U}^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Интегрируя (4.2) почленно от $y = 0$ до $y = \Delta_y$, если $\Delta_y > \delta_y$, и до $y = \delta_y$, если $\delta_y > \Delta_y$ (для определенности предположим, что $\Delta_y > \delta_y$; результат получается тот же самый, если принять $\delta_y > \Delta_y$), используя соотношение (4.3) и учитывая, что, начиная от границы динамического слоя, скорость u постоянна по x , а трение τ равно нулю, получим

$$\begin{aligned} U^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_y} \rho \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy + UU' \left(2 + \frac{\bar{U}^2}{1 - \bar{U}^2} \right) \int_0^{\delta_y} \rho \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy + \\ + UU' \left(1 + \frac{\bar{U}^2}{1 - \bar{U}^2} \right) \int_0^{\delta_y} \rho \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy + \frac{UU'(\bar{T}_w - 1)}{1 - \bar{U}^2} \int_0^{\Delta_y} \rho \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right) dy = \tau_w \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь

$$\tau_y = \left[(\mu + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \quad (4.5)$$

напряжение трения на стенке.

Представим теперь уравнения (1.2) и (1.3) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u t_0^*) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v t_0^*) - \rho u \frac{dt_0^*}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u t^*) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v t^*) - \rho u \frac{dt_0^*}{dx} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \varepsilon) \frac{\partial t^*}{\partial y} \right] + \left(\frac{1}{P} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Вычитая из первого уравнения второе, интегрируя результат почленно от $y=0$ до $y=\Delta_y$ (как и выше, предполагая для определенности, что $\Delta_y > \delta_y$) и учитывая, что при $\Delta_y > \delta_y$ теплопередача $q = \lambda \frac{\partial T}{\partial y}$ и трение $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ равны нулю на границе теплового слоя, получим

$$\frac{d}{dx} U t_0^* \int_0^{\Delta_y} \rho \frac{u}{U} \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right) dy = \frac{q_w}{c_p} \quad (4.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_w &= c_p \left(\mu \frac{\partial t^*}{\partial y} \right)_{y=0} + \left(\frac{1}{P} - 1 \right) c_p \left(\mu \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \\ &= \frac{1}{P} c_p \left(\mu \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \end{aligned} \quad (4.7)$$

интенсивность теплопередачи на стенке.

При решении задачи о пограничном слое без теплообмена между газом и стенкой при больших скоростях и при $P=1$ А. А. Дородницыным введена замена переменных

$$\eta = \int_0^y \frac{1}{1-u^2} (1-\bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} dy \quad (4.8)$$

Замечая, что подинтегральная функция в формуле (4.8) совпадает с выражением ρ/ρ_{02} при $\bar{T}_w=1$, введем новую независимую переменную аналогичной формулой, содержащей в подинтегральной функции выражение ρ/ρ_{02} для общего случая согласно (3.2)

$$\eta = \int_0^y \frac{1}{1-u^2 + (\bar{T}_w - 1)(1-t^*/t_0^*)} (1-\bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} dy \quad (4.9)$$

При $\bar{T}_w=1$ связь между координатами η и y зависит от неизвестного профиля скоростей. При $t^*/t_0^*=u/U$ формула (4.9) дает замену переменных, примененную нами в задаче о теплообмене пластины с потоком газа. В этом случае связь между η и y также зависит только от профиля скоростей.

Как видно из формулы (4.9), в общем случае связь между координатами η и y зависит не только от профиля скоростей $u(x, y)$, но и от профиля температурных перепадов $t^*(x, y)$, который также наперед неизвестен и подлeжит определению из решения задачи.

Заменяя плотность ρ в уравнениях (4.4) и (4.6) ее выражением (3.2) и переходя к переменным $x\eta$, получим

$$U^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta + UU' \left(2 + \frac{\bar{U}^2}{1 - \bar{U}^2}\right) \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta +$$

$$+ UU' \left(1 + \frac{\bar{U}^2}{1 - \bar{U}^2}\right) \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta + \frac{UU'(\bar{T}_w - 1)}{1 - \bar{U}^2} \int_0^{\Delta} \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right) d\eta = \frac{\tau_{w0}}{\rho_{02}} \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{dx} \left[Ut_0^* \int_0^{\Delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right) d\eta \right] = \frac{q}{\rho_{02} c_p} \quad (4.11)$$

Здесь и в дальнейшем δ и Δ — значения переменной η , относящиеся соответственно к границе динамического и к границе теплового слоя.

Обозначим толщину потери импульса и толщину вытеснения «в плоскости $x\eta$ », соответственно

$$\vartheta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \quad \delta^* = \vartheta H = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \quad (4.12)$$

Выведем понятие толщины потери энергии (в плоскости $x\eta$)

$$\theta = \int_0^{\Delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right) d\eta \quad (4.13)$$

Эта величина имеет ясный физический смысл. Именно, величина θ характеризует разность между той полной энергией, которую имела бы масса жидкости, протекающая в единицу времени через данное сечение теплового пограничного слоя, если бы ее температура торможения равнялась температуре торможения внешнего потока, и действительной полной энергией той же массы. Таким образом величина θ представляет в линейных единицах отнесенную к температурному напору t_0^* «потерю» полной энергии вследствие наличия теплоотдачи. При малых скоростях понятие толщины потери энергии совпадает с введенным нами ранее понятием «толщины потери тепло-содержания» [4]. Величину

$$\Delta^* = \theta H_T = \int_0^{\Delta} \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right) d\eta \quad (4.14)$$

можно было бы назвать толщиной теплового смещения.

С помощью величин, определенных формулами (4.12), (4.13) и (4.14), представим полученные интегральные соотношения импульсов и энергии (4.10) и (4.11) окончательно в виде

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{U'}{U} \left[H + 2 + (H + 1) \frac{\bar{U}^2}{1 - \bar{U}^2} \right] \vartheta + \frac{U'(\bar{T}_w - 1)}{U(1 - \bar{U}^2)} H_T \theta = \frac{\tau_{w0}}{\rho_{02} U^2} \quad (4.15)$$

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{U'}{U} \theta + \frac{t_0^{*'}}{t_0^*} \theta = \frac{q_{w0}}{\rho_{02} U c_p t_0^*} \quad \left(t_0^{*'} = \frac{dt_0^*}{dx} = -\frac{dT_w}{dx} \right) \quad (4.16)$$

Заметим, что интегрирование по y (или по η) можно распространить от 0 до ∞ , так что соотношения (4.15) и (4.1С) являются общими для теории пограничного слоя конечной толщины и теории асимптотического слоя.

При малых числах Маха (влияние сжимаемости за счет перепада температур) соотношения (4.15) и (4.16) принимают вид

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{U'}{U} (H+2)\theta + \frac{U'}{U} \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) H_T \theta = \frac{\tau_w}{\rho_0 U^2} \quad (4.17)$$

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{U'}{U} \theta + \frac{t_0'}{t_0} \theta = \frac{q_w}{\rho_0 U c_p t_0}$$

где $t_0 = T_0 - T_w$, T_0 и ρ_0 — соответственно температура и плотность изотермического потока вне теплового пограничного слоя (следует из уравнений (2.6) и (3.2), если приближенно положить $U=0$, т. е. согласно (3.5) $M=0$). При этом распределение давления по профилю определяется уравнением Бернулли для несжимаемой жидкости¹.

Как видно из уравнений (4.15) и (4.16), а также из дальнейшего, в переменных $x\eta$ уравнения системы (1.1) — (1.3) упрощаются и становятся в принципе близкими соответствующим уравнениям для несжимаемой жидкости. Благодаря этому основные методы теории пограничного слоя в несжимаемой жидкости могут быть обобщены на случай обтекания тел газом при наличии теплообмена.

Ниже дано обобщение метода Польгаузена для случая ламинарного слоя и логарифмического метода Прандтля-Кармана для случая турбулентного слоя. Разумеется, предлагаемый способ решения задач, связанных с теплообменом, допускает также обобщение некоторых других приемов, применяемых в теории пограничного слоя в несжимаемой жидкости.

II. Ламинарный пограничный слой при наличии теплообмена между газом и стенкой²

§ 5. Преобразование дифференциальных уравнений. Полагая в уравнениях (1.1) — (1.3) $\varepsilon=0$ и $t^* = T^* - T_w$, подставляя значения p , ρ и μ согласно (3.1) — (3.3), преобразуем эти уравнения к новым независимым переменным $x = x$ и η , определяемой согласно (4.9).

Формулы преобразования производных будут

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{z-1}}}{1 - u^2 + (T_w - 1)(1 - t^*/t_0^*)} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

¹ Из уравнений (3.1) и (3.5) имеем

$$p_{00} - p_0 = \left[\left(1 + \frac{1}{2} (z-1) M^2 \right)^{\frac{x}{z-1}} - 1 \right] p_0 \approx \frac{\rho_0 U^2}{2} \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{2-x}{24} M^4 + \dots \right)$$

откуда, полагая $M=0$, получим

$$p_0 + \frac{1}{2} (\rho_0 U^2) = \text{const}$$

² В дальнейшем мы ограничиваемся случаем $P=1$.

Получаем (вводя обозначение $\nu_{02} = \mu_{00} / \rho_{02}$)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1 - \bar{u}^2 + (\bar{T}_w - 1)(1 - t^*/t_0^*)}{1 - \bar{U}^2} UU' + \quad (5.1)$$

$$+ \nu_{02} (1 - \bar{U}^2)^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left[1 - \bar{u}^2 + (\bar{T}_w - 1) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right) \right]^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} = 0 \quad \left(\tilde{v} = v \frac{\rho}{\rho_{02}} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (5.2)$$

$$u \frac{\partial t^*}{\partial x} + v \frac{\partial t^*}{\partial \eta} - u \frac{dt_0^*}{dx} = \nu_{02} (1 - \bar{U}^2)^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left[1 - \bar{u}^2 + (\bar{T}_w - 1) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right) \right]^{n-1} \frac{\partial t^*}{\partial \eta} \right\} \quad (5.3)$$

Если приближенно принять $n=1$, можно еще более упростить полученную систему.

§ 6. Обобщение метода Польгаузена. Представим профиль скоростей и профиль перепадов температур торможения многочленами

$$\frac{u}{U} = A_1 \left(\frac{\eta}{\delta} \right) + A_2 \left(\frac{\eta}{\delta} \right)^2 + A_3 \left(\frac{\eta}{\delta} \right)^3 + A_4 \left(\frac{\eta}{\delta} \right)^4 \quad (6.1)$$

$$\frac{t^*}{t_0^*} = B_1 \left(\frac{\eta}{\Delta} \right) + B_2 \left(\frac{\eta}{\Delta} \right)^2 + B_3 \left(\frac{\eta}{\Delta} \right)^3 + B_4 \left(\frac{\eta}{\Delta} \right)^4 \quad (6.2)$$

Для определения коэффициентов многочленов установим условия

$$\frac{\partial^2}{\partial (\eta/\delta)^2} \frac{u}{U} + \alpha \frac{\delta}{\Delta} \frac{\partial}{\partial (\eta/\Delta)} \frac{t^*}{t_0^*} \frac{\partial}{\partial (\eta/\delta)} \frac{u}{U} + \lambda = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\eta}{\delta} = 0 \quad (6.3)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{\delta^2 U' T_w^{2-n}}{\nu_{02} (1 - U^2)^{\alpha-1}}, \quad \alpha = (1 - n) \frac{T_w - T_{00}}{T_w}$$

Условие (6.3) следует из уравнения движения (5.3), так как $u = \tilde{v} = 0$ при $\eta = 0$. Далее

$$\frac{u}{U} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial (\eta/\delta)} \frac{u}{U} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial (\eta/\delta)^2} \frac{u}{U} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\eta}{\delta} = 1 \quad (6.4)$$

Далее, из уравнения (5.3) при $\eta = 0$, $u = \tilde{v} = 0$ получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial (\eta/\Delta)^2} \frac{t^*}{t_0^*} + \alpha \left(\frac{\partial}{\partial (\eta/\Delta)} \frac{t^*}{t_0^*} \right)^2 = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\eta}{\Delta} = 0 \quad (6.5)$$

Аналогично условиям (6.4) для профиля u/U примем для профиля t^*/t_0^* условия

$$\frac{t^*}{t_0^*} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial (\eta/\Delta)} \frac{t^*}{t_0^*} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial (\eta/\Delta)^2} \frac{t^*}{t_0^*} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\eta}{\Delta} = 1 \quad (6.6)$$

Дифференцированием уравнений (5.1) и (5.3) по η с последующим приравниванием η нулю легко получить условия для третьих производных u/U и t^*/t_0^* на стенке; эти условия могут быть полезны при различных изменениях метода Польгаузена. Используя условия (6.5) и (6.6), найдем

$$B_1 = \frac{3 - \sqrt{9 - 12\alpha}}{\alpha}, \quad B_2 = 6 - 3B_1, \quad B_3 = -8 + 3B_1, \quad B_4 = 3 - B_1 \quad (6.7)$$

Теперь из условий (6.3) и (6.4) найдем

$$A_1 = \frac{12 + \lambda}{6 - (3 - \sqrt{9 - 12\alpha}) \delta / \Delta}, \quad A_2 = 6 - 3A_1, \quad A_3 = -8 + 3A_1, \quad A_4 = 3 - A_1 \quad (6.8)$$

В соотношения (4.15) и (4.16) входят, кроме $\vartheta(x)$ и $\theta(x)$, четыре известные функции τ_w , H , q_w , H_T . При построении профилей введены еще вспомогательные функции δ и Δ . Необходимые шесть дополнительных уравнений получаются, если подставить (6.1) и (6.2) в формулы (4.5), (4.7), (4.12)–(4.14). Получим

$$\delta^* = \vartheta H = \delta \frac{8 - A_1}{20}, \quad \vartheta = \delta \frac{-5A_1^2 + 12A_1 + 144}{1260} \quad (6.9)$$

$$\tau_w = \mu_{00} \bar{T}_w^{n-1} \frac{U}{\delta} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{\delta-1}} A_1, \quad q_w = c_p \mu_{00} \bar{T}_w^{n-1} \frac{t_{00}^*}{\Delta} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{\delta-1}} B_1 \quad (6.10)$$

$$\Delta^* = \theta H_T = \Delta \frac{8 - B_1}{20}, \quad \theta = \Delta (M_1 + N_1 A_1) \quad (6.11)$$

где при $\frac{\Delta}{\delta} < 1$

$$M_1 = 6b_2 \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2 - 8b_3 \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^3 + 3b_4 \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^4, \quad N_1 = b_1 \frac{\Delta}{\delta} - 3b_2 \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2 + 3b_3 \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^3 + b_4 \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^4$$

$$b_1 = \frac{6 - B_1}{60}, \quad b_2 = \frac{16 - 3B_1}{420}, \quad b_3 = \frac{5 - B_1}{280}, \quad b_4 = \frac{24 - 5B_1}{2520}$$

при $\frac{\Delta}{\delta} > 1$

$$M_1 = \frac{8 - B_1}{20} + \frac{\delta}{\Delta} \left[-0.4 + 0.2290 \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^2 - 0.1430 \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^3 + 0.0290 \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^4 \right] +$$

$$+ B_1 \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^2 \left[+0.1 - 0.1143 \frac{\delta}{\Delta} + 0.0536 \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^2 - 0.0096 \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^3 \right]$$

$$N_1 = \frac{\delta}{\Delta} \left[+0.0500 - 0.0429 \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^2 + 0.0286 \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^3 - 0.006 \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^4 \right] +$$

$$+ B_1 \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^2 \left[-0.0167 + 0.0214 \left(\frac{\delta}{\Delta}\right) - 0.0107 \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^2 + 0.002 \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^3 \right]$$

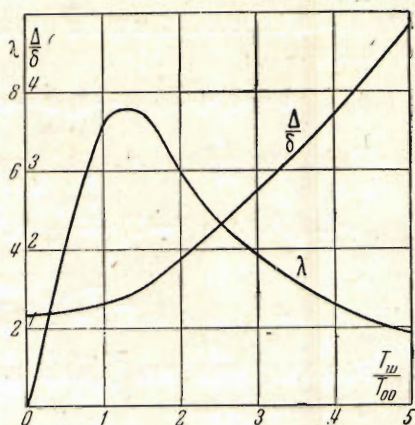
Из формул (6.10) и (6.8) видно, что точка срыва ламинарного слоя при данных граничных условиях определяется условием $\lambda = -12$.

§ 7. Определение начальных условий. При обтекании профиля дозвуковым потоком, а также и сверхзвуковым — в тех случаях, когда впереди профиля проходит головная волна, — на передней кромке ($x = 0$) образуется критическая точка $U(0) = 0$. Последняя является особой точкой уравнений (4.15) и (4.16), в которой производные $d\vartheta/dx$, $d\theta/dx$ и др. неограниченно возрастают, если только начальные ϑ , θ и др. не подчинены некоторым специальным условиям.

Подставляя выражения для τ_w , q_w , Δ^* согласно (6.10), (6.11) в уравнения (4.15) и (4.16), умножая последние на δ и Δ соответственно и приравнявая нулю множители при $1/U$, эти условия получим в виде

$$\lambda(H+2) \frac{\vartheta}{\delta} + \lambda(\bar{T}_w - 1) \frac{\Delta}{\delta} \frac{8 - B_1}{20} - \bar{T}_w A_1 = 0, \quad \lambda \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2 \frac{\theta}{\Delta} - \bar{T}_w B_1 = 0 \quad (7.1)$$

При отсутствии теплопередачи ($\bar{T}_w = 1$) первое соотношение (7.1) является кубическим уравнением относительно λ . Из трех его корней (7.052, 17.75, -70) физическим условиям удовлетворяет только корень $(\lambda)_{x=0} = 7.052$. Это значение λ представляет собой общепринятое в теории ламинарного слоя начальное условие для уравнения Кармана-Польгаузена. Уравнения (7.1) удобно рассматривать как систему для определения начальных значений $(\lambda)_{x=0}$ и $(\Delta/\delta)_{x=0}$. Приводим результаты вычисления этих значений для $0 < (\bar{T}_w)_{x=0} < 5$ (при $n = 0.75$)



Фиг. 2.

$\bar{T}_w = 0$	0.05	0.10	0.50	1.00	1.50	2.00	3.00	4.00	5.00
$\lambda = 0$	0.3	0.7	4.05	7.05	7.5	6.0	3.9	2.6	1.9
$\frac{\Delta}{\delta} = 1.12$	1.16	1.18	1.23	1.31	1.50	1.87	2.74	3.70	4.86

Графически эти результаты представлены на фиг. 2.

§ 8. Метод последовательных приближений. Простые расчетные формулы удается получить путем обобщения приема Г. Лайон [5]. Одновременно метод Лайон видоизменен нами с целью улучшения сходимости.

Умножим уравнение (4.15) на $2\bar{\vartheta}$. Имеем

$$2\bar{\vartheta} \frac{d\bar{\vartheta}}{dx} + \frac{\bar{U}'}{\bar{U}} \frac{2(H+2-\bar{U}^2)}{1-\bar{U}^2} \bar{\vartheta}^2 + 2 \frac{\bar{U}'\bar{T}_w-1}{\bar{U}1-\bar{U}^2} \bar{\Delta}^* \bar{\vartheta} = \frac{2}{R_{02}\bar{U}} \bar{T}_w^{n-1} (1-\bar{U}^2)^{\frac{x}{2}-1} A_1 \frac{\vartheta}{\delta} \quad (8.1)$$

Здесь

$$\bar{\vartheta} = \frac{\vartheta}{L}, \quad \bar{\Delta}^* = \frac{\Delta^*}{L}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{U}' = \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}}, \quad R_{02} = \frac{\sqrt{2i_0} L \rho_{02}}{\mu_{00}}$$

причем L — характерный размер.

Вводя обозначение $k = 2(H+2)$, постараемся в функции k выделить некоторую главную часть, постоянную при данном значении \bar{T}_w , т. е. положим

$$k = c_1 + (k - c_1); \quad \text{где } c_1 = c_1(\bar{T}_w) \quad (8.2)$$

После простых преобразований получим

$$2\bar{\vartheta} \frac{d\bar{\vartheta}}{d\bar{x}} + \frac{\bar{U}'}{\bar{U}} \left[c_1 + 2(\bar{T}_w - 1) \frac{\Delta^*}{\vartheta} \right] \bar{\vartheta}^2 + \frac{\bar{U}\bar{U}'}{1-\bar{U}^2} \left[c_1 + 2(\bar{T}_w - 1) \frac{*}{\vartheta} - 2 \right] \bar{\vartheta}^2 = \\ = \bar{T}_w^{n-2} \frac{1}{\bar{U}R_{02}} (1-\bar{U}^2)^{\frac{x}{2}-1} \left[2A_1 \frac{\vartheta}{\delta} \bar{T}_w - \lambda \left(\frac{\vartheta}{\delta} \right)^2 (k - c_1) \right] \quad (8.3)$$

Принимая на некотором участке пограничного слоя $\bar{x}_0 < \bar{x} < \bar{x}_1$ отношение

$\Delta^*/\vartheta = h$ постоянным по \bar{x} и равным среднему значению для данного участка, обозначим¹

$$c = c_1 + 2(\bar{T}_w - 1)h = c_1 + 2(\bar{T}_w - 1) \frac{\Delta}{\delta} \frac{1260(8 - B_1)}{20(-5A_1^2 + 12A_1 + 144)} \quad (8.4)$$

Умножая уравнение (8.3) на \bar{U}^c , найдем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\vartheta^2 \bar{U}^c) + (c - 2) \frac{\bar{U} \bar{U}'}{1 - \bar{U}^2} \vartheta^2 \bar{U}^c = \\ = \bar{T}_w^{n-2} \frac{\bar{U}^{c-1}}{R_{02}} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} \left[2A_1 \frac{\vartheta}{\delta} \bar{T}_w - \lambda \left(\frac{\vartheta}{\delta} \right)^2 (k - c_1) \right] \end{aligned}$$

Рассматривая это уравнение как линейное относительно $\vartheta^2 \bar{U}^c$, напишем его решение в виде

$$\vartheta^2 R_{02} = \frac{1}{\bar{U}^c (1 - \bar{U}^2)^{1-c/2}} \left[C + \int_{x_0}^{\bar{x}} \bar{T}_w^{n-2} \bar{U}^{c-1} (1 - \bar{U}^2)^{1-\frac{c}{2}+\frac{x}{x-1}} \Phi d\bar{x} \right] \quad (8.5)$$

Здесь

$$\Phi = 2A_1 \frac{\vartheta}{\delta} \bar{T}_w - \lambda \left(\frac{\vartheta}{\delta} \right)^2 (k - c_1), \quad C = [\vartheta^2 R_{02} \bar{U}^c (1 - \bar{U}^2)^{1-\frac{c}{2}}]_{\bar{x}=\bar{x}_0} \quad (8.6)$$

причем $C = 0$ при $\bar{x}_0 = 0$.

Подставляя под интеграл (в функцию Φ и показатель c) некоторые исходные значения $(\lambda)_0$ и $(\Delta/\delta)_0$, получим первое приближение функции $\vartheta(\bar{x})$. Произволом в выборе величины c_1 можно воспользоваться для улучшения сходимости. С этой целью c_1 надо выбрать таким образом, чтобы при каждом значении \bar{T}_w погрешность, происходящая от принятых (неточных) значений λ и Δ/δ , была наименьшей.

Так как Φ сама по себе мало зависит от Δ/δ , достаточно поставить условие малой изменяемости Φ по λ . Пренебрегая относительно слабой зависимостью функций ϑ/δ и k от λ , т. е. полагая в аргументе A_1 , от которого они зависят, $\lambda = 0$, получим приближенное выражение

$$\Phi \approx \frac{12 + \lambda}{6} (A_1)_{\lambda=0} \left(\frac{\vartheta}{\delta} \right)_{\lambda=0} \bar{T}_w - \lambda \left(\frac{\vartheta}{\delta} \right)_{\lambda=0}^2 [(k)_{\lambda=0} - c_1]$$

Для того чтобы было $\Phi = \text{const}$, коэффициент при λ должен быть равен нулю, отсюда получим

$$c_1 = (k)_{\lambda=0} - \frac{(A_1)_{\lambda=0} \bar{T}_w}{6(\vartheta/\delta)_{\lambda=0}}$$

Эта зависимость c_1 от \bar{T}_w в широком интервале изменения аргумента (и практически независимо от Δ/δ) близка к линейной. При $\bar{T}_w = 0.1$ получаем $c_1 = 9.35$ при $\Delta/\delta = 1$ ($c_1 = 9.12$ при $\Delta/\delta = 2$, $c_1 = 9.7$ при $\Delta/\delta = 0.5$). При $\bar{T}_w = 1$ получаем $c_1 = 6.26$. Округляя последнее значение до $c_1 = 6$, принимаем линейную зависимость

$$c_1 = 9.5 - 3.5 \bar{T}_w \quad (8.7)$$

¹ При $\bar{T}_w \neq \text{const}$ в показателе c принимается постоянное среднее значение \bar{T}_w для каждого участка.

Наконец, умножая уравнение энергии (4.17) в безразмерной форме почленно на $2\bar{\theta}\bar{U}^2$ ($\bar{\theta} = \theta/L$) и интегрируя как линейное, получим

$$\bar{\theta}^2 R_{02} = \frac{1}{\bar{U}^2 (\bar{T}_w - 1)^2} \left[C' + \int_{x_0}^{\bar{x}} \bar{T}_w^{n-1} 2B_1 (\bar{T}_w - 1)^2 \bar{U} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{z-1}} \frac{\theta}{\Delta} d\bar{x} \right] \quad (8.9)$$

где

$$C' = [\bar{\theta}^2 R_{02} \bar{U}^2 (\bar{T}_w - 1)^2]_{\bar{x}=\bar{x}_0}$$

причем $C' = 0$ при $\bar{x} = 0$.

Расчет динамического и теплового слоев по формулам (8.5) и (8.9) может быть выполнен в такой последовательности. Введем в рассмотрение наряду с параметром λ аналогично составленные параметры

$$\lambda_\vartheta = \frac{\bar{\theta}^2 R_{02} \bar{U}' \bar{T}_w^{2-n}}{(1 - \bar{U}^2)^\omega}, \quad \lambda_\Delta = \frac{\bar{\Delta}^2 R_{02} \bar{U}' \bar{T}_w^{2-n}}{(1 - \bar{U}^2)^\omega}, \quad \lambda_\eta = \frac{\theta^2 R_{02} \bar{U}' \bar{T}_w^{2-n}}{(1 - \bar{U}^2)^\omega}$$

$$\left(\omega = \frac{x}{z-1} + 1 \right)$$

По уравнениям (6.9) и (6.11), представленным в виде

$$\lambda_\vartheta = \lambda \left(\frac{-5A_1^2 + 12A_1 + 144}{1260} \right)^2 \quad \frac{\Delta}{\delta} = \sqrt{\frac{\lambda_\Delta}{\lambda}}$$

$$\lambda_0 = \lambda_\Delta (M_1 + N_1 A_1)^2$$

для данного значения \bar{T}_w строятся вспомогательные графики зависимости λ от λ_ϑ для различных значений λ_Δ и λ_Δ от λ_ϑ для различных λ . Величины, принимаемые в качестве исходных при расчете по формуле (8.5), определяются из начальных данных. Если $\bar{U} \neq 0$ при $\bar{x}_0 = 0$, принимают¹ $(\lambda)_0 = 0$ и $(\Delta/\delta)_0 = 1$. Если $\bar{U} = 0$ при $\bar{x}_0 = 0$, в качестве исходных могут быть приняты значения $(\lambda)_0$ и $(\lambda_\Delta)_0 = (\Delta/\delta)_0^2 (\lambda)_0$ согласно фиг. 2. По значениям функции $\bar{\vartheta}(\bar{x})$, т. е. $\lambda_0(\bar{x})$ первого приближения, используя исходное значение $(\Delta/\delta)_0$ (при следующих приближениях целесообразно пользоваться исходными значениями λ_Δ), находят с помощью графика $\lambda(\bar{x})$ первого приближения. Далее по формуле (8.9)

¹ В частности, при $\bar{T}_w = 1$ формула (8.5) с $(\lambda)_0 = 0$ дает $(M_\infty < M_{\text{крит}})$

$$\bar{\theta}^2 R_{00} = \frac{1}{\bar{U}^c (1 - \bar{U}^2)^{1-c/2}} 0.47 \int_0^{\bar{x}} \bar{U}^{c-1} (1 - \bar{U}^2)^{1-\frac{c}{2} + \frac{x}{z-1}} d\bar{x} \quad (c=6)$$

что совпадает с формулой Л. Г. Лойцянского и А. А. Дородницына для расчета ламинарного слоя без теплопередачи [6].

При отсутствии теплообмена и малых числах Маха отсюда вновь получим квадратуру

$$\bar{\theta}^2 R = \frac{1}{(U/U_\infty)^6} 0.47 \int_0^{\bar{x}} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^5 dx \quad \left(R = \frac{U_\infty L \rho}{\mu} \right)$$

выведенную нами ранее также на основе метода Кармана-Польгаузена для ламинарного слоя в несжимаемой жидкости (см. Техника воздушного флота, № 5—6, 1942).

рассчитывают $\bar{\theta}(\bar{x})$, т. е. $\lambda_0(\bar{x})$ первого приближения, используя при этом $\lambda(\bar{x})$ первого приближения и $(\Delta/\delta)_0$ (в дальнейших приближениях используется функция $\lambda(\bar{x})$ «последующая» и $\lambda_\Delta(\bar{x})$ «предыдущая»). По значениям $\lambda_0(\bar{x})$ и $\lambda(\bar{x})$ с помощью графика получают $\lambda_\Delta(\bar{x})$. В тех случаях, когда имеет место значительное изменение отношения Δ^*/δ (или функции $T_w(\bar{x})$), расчет следует вести по участкам. При этом исходные данные для каждого следующего участка принимаются равными соответствующим значениям, полученным в конце предыдущего участка. Местное число Нусельта (т. е. коэффициент теплоотдачи q_w/t_0^* , приведенный к безразмерному виду) и коэффициент трения находятся по формулам

$$N = \frac{q_w L}{\lambda_\infty t_0^*} = \bar{T}_w^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} (z-1) M_\infty^2\right)^n (1 - \bar{U}^2)^{z-1} \frac{B_1}{\Delta} \quad (8.10)$$

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{2}{R_\infty} \bar{T}_w^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} (z-1) M_\infty^2\right)^n (1 - U^2)^{z-1} \frac{U}{U_\infty} \frac{A_1}{\delta} \quad (8.11)$$

При малых числах Маха формулы (8.5) и (8.9) принимают вид

$$\bar{\theta}^2 R = \frac{1}{(U/U_\infty)^c} \int_0^{\bar{x}} \left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{n-2} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{c-1} \Phi d\bar{x} \quad \left(R = \frac{U_\infty L \rho_0}{\mu_0}\right) \quad (8.12)$$

$$\bar{\theta}^2 R = \frac{1}{(T_w/T_0 - 1)^2 (U/U_\infty)^2} \int_0^{\bar{x}} \left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{n-1} 2B_1 \left(\frac{T_w}{T_0} - 1\right)^2 \frac{U}{U_\infty} \frac{\theta}{\Delta} d\bar{x} \quad (8.13)$$

§ 9. Зависимость числа Рейнольдса R_{02} от параметров набегающего потока. Учитывая, что по уравнению состояния $\rho_{02}/\rho_{01} = p_{02}/p_{01}$, представим параметр R_{02} в виде

$$R_{02} = R_{01} \frac{p_{02}}{p_{01}}, \quad \text{где } R_{01} = \frac{\sqrt{2i_0} L \rho_{01}}{\mu_{00}} \quad (9.1)$$

Параметр R_{01} непосредственно выражается через числа Рейнольдса $R_\infty = U_\infty L \rho_\infty / \mu_\infty$ и Маха $M_\infty = U_\infty / a_\infty$, набегающего потока; по уравнениям (3.3) — (3.5) найдем

$$R_{01} = R_\infty \frac{1}{U_\infty} (1 - \bar{U}_\infty^2)^{n-1} = R_\infty \left(1 + \frac{1}{2} (z-1) M_\infty^2\right)^{\frac{z+1}{2(z-1)} - n} \left(\frac{1}{2} (z-1) M_\infty^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

В случае дозвуковых (докризисных) скоростей имеем $R_{02} = R_{01} = R_{00}$. При сверхзвуковых скоростях отношение p_{02}/p_{01} находится из условия прохождения струйки, обтекающей профиль, через косой скачок уплотнения (или головную волну) около передней кромки тела. Рассматривая каждую поверхность профиля в отдельности, обозначим через β_0 угол, который составляет касательная к поверхности профиля (в лобовой точке) с направлением скорости невозмущенного потока, через φ — угол, который составляет нормаль к поверхности разрыва с тем же направлением. Из уравнений косого скачка уплотнения получим

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{1/2 (z+1) M_{\infty}^2 \cos^2 \varphi}{1 + 1/2 (z-1) M_{\infty}^2 \cos^2 \varphi} \right)^{\frac{x}{z-1}} \left(\frac{2z}{z+1} M_{\infty}^2 \cos^2 \varphi - \frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{1-z}} \quad (9.3)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi + \beta_0) = \frac{1}{2} \frac{1/2 (z+1) M_{\infty}^2 \sin 2\varphi}{1 + 1/2 (z-1) M_{\infty}^2 \cos^2 \varphi} \quad (9.4)$$

В случае «отскочившей» поверхности разрыва перед телом проходят головная волна, направление скорости после разрыва (для струйки обтекающей профиль) можно считать совпадающим с направлением скорости до разрыва; в формуле (9.3) следует положить в этом случае $\varphi = 0$.

§ 10. Пограничный слой в осесимметричном потоке газа. При осевом обтекании тел вращения потоком газа интегральные соотношения импульсов и энергии имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta y} \rho u^2 r dy - U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta y} \rho u r dy = -\frac{dp}{dx} \delta y r - \tau_w r \quad (10.1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta y} c_p \rho u (t^* - t_0^*) r dy = -q_w r \quad (10.2)$$

В этих уравнениях приняты обычные упрощения. Здесь x — расстояние по дуге меридионального сечения, d — расстояние по нормали к поверхности, $r(x)$ — радиус поперечного сечения тела вращения (изменением радиуса, вектора внутри пограничного слоя пренебрегается). Граничные условия задачи, а также предположения относительно внешнего потока примем те же, что и в § 1. Составляя выражения для T , p , ρ , μ , так же как в § 2, 3, и вводя новую независимую переменную η по формуле (4.9), получим интегральные соотношения импульсов и энергии в переменных $x\eta$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dx} + \frac{\bar{U}'}{U} \left[H + 2 + (H+1) \frac{\bar{U}^2}{1-\bar{U}^2} \right] \bar{\theta} + \frac{U'(\bar{T}_w - 1)}{U(1-\bar{U}^2)} \bar{\theta} H_T + \frac{\bar{r}'}{r} \bar{\theta} = \frac{\tau_w}{\rho_{00} U^2} \quad (10.3)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dx} + \frac{\bar{U}'}{U} \bar{\theta} + \frac{\bar{r}'}{r} \bar{\theta} + \frac{t_0^{*'}}{t_0^*} \bar{\theta} = \frac{q_w}{\rho_{00} U c_p t_0^*} \quad \left(\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{\theta} = \frac{\theta}{L} \text{ и т. д.} \right) \quad (10.4)$$

(L — характерный размер, например, длина тела вращения). Ограничиваясь случаем $P=1$ и принимая разложения (6.1) и (6.2), получим замкнутую систему уравнений (10.3), (10.4), (6.9), (6.11), решение которой напомним (для случая, когда скачок отсутствует) в виде

$$\bar{\theta}^2 R_{00} = \frac{1}{U^c (1-\bar{U}^2)^{1-c/2} r^2} \left[C + \int_{x_0}^{\bar{x}} \bar{T}_w^{n-2} \bar{U}^{c-1} (1-\bar{U}^2)^{1-\frac{c}{2} + \frac{x}{x-1}} r^2 \Phi d\bar{x} \right] \quad (10.5)$$

$$\bar{\theta}^2 R_{00} = \frac{1}{U^2 (\bar{T}_w - 1)^2 r^2} \left[C' + \int_{x_0}^{\bar{x}} \bar{T}_w^{n-1} 2B_1 \bar{U} (1-\bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} (\bar{T}_w - 1)^2 r^2 \frac{\theta}{\Delta} d\bar{x} \right] \quad (10.6)$$

где

$$C = [\bar{\theta}^2 R_{00} \bar{U}^c (1-\bar{U}^2)^{1-\frac{c}{2}} r^2]_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \quad C' = [\bar{\theta}^2 R_{00} \bar{U}^2 (\bar{T}_w - 1)^2 r^2]_{\bar{x}=\bar{x}_0}$$

Метод расчета не отличается от случая плоского потока. Для коэффициентов теплоотдачи и трения остаются в силе формулы (8.10) и (8.11). В случае внутренней задачи (течение в соплах и пр.) число Нусельта и коэффициент трения определяются по формулам

$$N_{00} = \frac{q_w L}{\lambda_{00} t_0^*} = \bar{T}_w^{n-1} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} \frac{B_1}{\Delta}, \quad C_{f00} = \frac{2\tau_w}{\rho_{00} U^2} = \frac{2}{R_{00}} \bar{T}_w^{n-1} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} \frac{A_1}{\bar{U} \delta}$$

где λ_{00} — коэффициент теплопроводности, соответствующий температуре T_{00} .

III. Турбулентный пограничный слой при наличии теплообмена между газом и стенкой

§ 11. Основные положения. Функции H , H_T , τ_w , q_w , входящие в уравнения (4.15) и (4.16), определены формулами (4.12), (4.14), (4.5), (4.7), ставящими их в зависимость от ϑ и θ через посредство профиля скоростей и профиля перепадов температур торможения. Современное состояние проблемы турбулентности не позволяет представить профиль скоростей (а также профиль температур) одним уравнением, справедливым от стенки до границы пограничного слоя. Несмотря на это, основные динамические и тепловые характеристики турбулентного слоя могут быть рассчитаны с точностью, достаточной для практических приложений. Счастливая особенность уравнений (4.15) и (4.16), которую можно предвидеть на основе результатов, относящихся к несжимаемой жидкости, заключается в том, что функции H и H_T очень мало изменяются по длине турбулентного слоя, а функции τ_w и q_w связаны с ϑ и θ уравнениями, мало чувствительными к действительным условиям, господствующим в данном сечении пограничного слоя. Поэтому H и H_T (а также и аналогичные им величины) могут быть приняты постоянными по x , а связь между τ_w и ϑ («закон сопротивления») и между q_w и θ («закон теплоотдачи») может быть установлена, исходя из предположения о том, что условия в данном сечении пограничного слоя не отличаются от условий на плоской пластине. В основу вывода этих дополнительных уравнений положим простую схему Кармана, согласно которой сечение пограничного слоя разделяется на чисто турбулентное «ядро течения» и непосредственно прилегающий к стенке «ламинарный подслой». В последнем турбулентное трение и теплопередача пренебрежимо малы по сравнению с молекулярными. Примем, что в турбулентном «ядре» напряжение трения выражается формулой Прандтля

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (11.1)$$

где l — длина пути смещения. Другими словами, в уравнениях (1.1) и (1.3) положим $\epsilon = \rho l^2 du/dy$. Отсюда непосредственно следует в силу того, что гипотеза турбулентности Прандтля дает $\lambda_t = c_p \epsilon$, выражения для турбулентной теплопередачи

$$q = \lambda_t \frac{dT}{dy} = c_p \rho l^2 \frac{du}{dy} \frac{dT}{dy} \quad (11.2)$$

Толщину δ_{yl} ламинарного подслоя динамического, равную при $P=1$ толщине Δ_{yl} ламинарного теплового подслоя, определим критическим числом Рейнольдса (критерием Кармана)

$$\frac{u_l \delta_{yl} \rho_w}{\mu_w} = \alpha^2 \quad (\alpha \approx 11.5) \quad (11.3)$$

где u_l — скорость на границе ламинарного подслоя, ρ_w и μ_w — плотность и вязкость на стенке.

§ 12. Вывод закона сопротивления. Принимая, как и в несжимаемой жидкости, линейное изменение скорости в ламинарном подслое, что допустимо вследствие его малой толщины, имеем

$$\tau_w = \mu_w \frac{u_l}{\delta_{yl}} \quad (12.1)$$

Из уравнений (11.3) и (12.1) получим

$$\frac{V \tau_w \rho_w \delta_{yl}}{\mu_w} = \alpha \quad (12.2)$$

Перейдем в формуле (12.2) к переменной η . Вблизи стенки вследствие малости членов \bar{u}^2 и t^*/t_0^* имеем

$$y = \int_0^\eta (1 - \bar{u}^2)^{\frac{x}{1-x}} \left[1 - \bar{u}^2 + (\bar{T}_w - 1) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right) \right] d\eta \approx \bar{T}_w (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{1-x}} \eta \quad (12.3)$$

поэтому

$$\delta_{yl} \approx \bar{T}_w (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{1-x}} \delta_l$$

где $\delta_l = \Delta_l$ — толщина ламинарного подслоя по переменной η . Кроме того,

$$\rho_w = \rho_{02} \frac{1}{\bar{T}_w} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}}, \quad \mu_w = \mu_{00} \bar{T}_w^n$$

Подставляя эти выражения в формулу (12.2), находим

$$\frac{\delta_l}{\theta} = \frac{\alpha^2}{R_\theta} \bar{T}_w^n \quad \left(\bar{\delta}_l = \frac{\delta}{L} \right) \quad (12.4)$$

Здесь для основных параметров динамического слоя введены обозначения

$$R_\theta = U \bar{\theta} R_{02}, \quad \zeta = \frac{U}{V \tau_w / \rho_{02} \bar{T}_w^{1/2}} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{2(x-1)}} \quad (12.5)$$

Формулу (12.1) с помощью уравнений (3.2) и (4.9) преобразуем к виду

$$\tau = \rho_{02} \tilde{l}^2 \left(\frac{du}{d\eta} \right)^2, \quad \tilde{l}^2 = \frac{l^2}{[1 - \bar{u}^2 + (\bar{T}_w - 1) (1 - t^*/t_0^*)]^3} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{3x}{x-1}} \quad (12.6)$$

Так как при малых η члены \bar{u}^2 и t^*/t_0^* малы, а путь смещения $l = k\eta$ ($k = 0.391$), где координата y выражается согласно (12.3), то вблизи стенки «обобщенный» путь смещения \tilde{l} является линейной функцией от η

$$\tilde{l} = k\eta \frac{1}{\bar{T}_w^{1/2}} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{2(x-1)}} \quad (12.7)$$

При выводе закона сопротивления в несжимаемой жидкости принимается линейное распределение пути смещения и постоянное напряжение трения

для всего сечения пограничного слоя — от стенки до внешней границы. В действительности путь смещения возрастает значительно медленнее, чем по линейному закону, а трение по мере приближения к границе слоя падает до нуля. Указанные допущения влияют в противоположные стороны и приводят к удовлетворительной связи между параметрами R_δ и ζ .

Переносим эту основную идею логарифмического метода в настоящую теорию, положим $\tau = \tau_w$ в формуле (12.7) и примем линейный закон (12.7) для всего сечения пограничного слоя. Таким образом предполагаем, что, как и в случае несжимаемой жидкости, будет иметь место взаимная компенсация ошибок, допускаемых в распределении τ и \tilde{l} . Интегрируя уравнение (12.6) в пределах от η до δ , получим приближенный профиль скоростей

$$\frac{u}{U} = 1 + \frac{1}{k\zeta} \ln \frac{\eta}{\delta} \quad (12.8)$$

Из (12.4) и (12.4) получим скорость на границе ламинарного подслоя

$$\frac{u_l}{U} = \frac{\alpha}{\zeta}$$

Условие равенства скоростей турбулентного и ламинарного течения на границе подслоя дает

$$R_\delta = C_1 \bar{T}_w^n e^{k\zeta} k\zeta \quad \left(R_\delta = \bar{U} \delta R_{02}, C_1 = \frac{\alpha}{k} e^{-k\alpha} = 0.326 \right) \quad (12.10)$$

Используя профиль скоростей (12.8) в формулах (4.12), получим

$$\frac{\delta}{\delta^*} = \frac{1}{k\zeta} \left(1 - \frac{2}{k\zeta} \right), \quad \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{k\zeta} \quad (12.11)$$

Исключая из уравнения (12.10) и первого из соотношений (12.11) вспомогательную переменную δ , получим закон сопротивления

$$R_\delta = C_1 \bar{T}_w^n e^{k\zeta} \left(1 - \frac{2}{k\zeta} \right) \quad (12.12)$$

Попутно находим также приближенное выражение параметра H :

$$H = \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{1 - 2/k\zeta} \quad (12.13)$$

§ 13. Вывод закона теплоотдачи. В настоящем параграфе дадим обобщение на случай газа, движущегося с большими скоростями, закона теплоотдачи, выведенного нами ранее [4] для несжимаемой жидкости.

Образую функцию

$$q^* = \lambda \frac{dt^*}{dy} = q + \frac{1}{J} \tau u \quad (13.1)$$

Для турбулентного ядра течения имеем

$$q^* = \lambda_t \frac{dt^*}{dy} = c_p \varepsilon \frac{dt^*}{dy} = c_p \rho l^2 \frac{du}{dy} \frac{dt^*}{dy} \quad (13.2)$$

Преобразуя эту формулу к переменной η , получим

$$q^* = c_p \rho_{02} \tilde{l}^2 \frac{du}{d\eta} \frac{dt^*}{d\eta}, \quad \tilde{l}^2 = \frac{l^2}{[1 - \bar{u}^2 + (\bar{T}_w - 1)(1 - t^*/t_0^*)]^3} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{3x}{2}} \quad (13.3)$$

Вблизи стенки функция q^* ведет себя, как q , т. е. мало отличается от постоянного значения q_w , а путь смещения \tilde{l} линейно зависит от η согласно (12.7). Общность механизма переноса тепла и переноса количества движения в потоках вдоль твердых стенок дает основание при выводе закона теплоотдачи принять аналогично предыдущему постоянное значение $q^* = q_w$ и линейный закон (12.7) для всей толщины теплового слоя. Подставляя выражение для $du/d\eta$, вытекающее из (12.8), и интегрируя уравнение (13.3) от η до Δ , получим приближенный профиль температур торможения

$$\frac{t^*}{t_0^*} = 1 + \frac{q_w U}{c_p t_0^* v_w k \zeta} \ln \frac{\eta}{\Delta} \quad (13.4)$$

Из формулы (13.4), принимая линейное распределение температур торможения в ламинарном подслое, находим

$$q_w = c_p v_w \frac{t_l^*}{\Delta y l} \quad (13.5)$$

где t_l^* — температура торможения на границе ламинарного подслоя.

Введем в качестве основных тепловых характеристик пограничного слоя следующие параметры

$$R_0 = \bar{U} \bar{\theta} R_{02}, \quad \zeta_T = \frac{R_{02}}{N_{00}} \frac{\bar{U}}{\zeta} \frac{1}{T_w} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} \quad \left(N_{00} = \frac{q_w L}{\lambda_{00} t_0^*} \right) \quad (13.6)$$

Из формул (13.4), (13.5) получим температуру торможения на границе ламинарного подслоя

$$\frac{t^*}{t_0^*} = \frac{\alpha}{\zeta_T} \quad (13.7)$$

Приравнявая температуры торможения на границе ламинарного подслоя и используя условие (12.4), получим

$$R_\Delta = C_1 \bar{T}_w^n \exp(k \zeta_T) k \zeta \quad (R_\Delta = \bar{U} \bar{\Delta} R_{02}) \quad (13.8)$$

Подставляя выражения для u/U и t^*/t_0^* согласно (12.8) и (13.4) в формулы (4.13), (4.14), найдем

$$\frac{\theta}{\Delta} = \left(1 + \frac{1}{k \zeta} \ln \frac{\Delta}{\delta} \right) \frac{1}{k \zeta_T} - \frac{2}{k^2 \zeta \zeta_T}, \quad \frac{\Delta^*}{\Delta} = \frac{1}{k \zeta_T} \quad (13.9)$$

Из уравнений (12.10) и (13.8) следует, что $\Delta/\delta = \exp(k \zeta_T - k \zeta)$, поэтому имеем

$$\frac{\theta}{\Delta} = \frac{1}{k \zeta} \left(1 - \frac{2}{k \zeta_T} \right) \quad (13.10)$$

Исключая из уравнений (13.8) и (13.10) вспомогательную переменную Δ , получим закон теплоотдачи

$$R_0 = C_1 \bar{T}_w^n \left(1 - \frac{2}{k \zeta_T} \right) \exp k \zeta_T \quad (13.11)$$

Попутно находим также приближенное выражение параметра H_T :

$$H_T = \frac{1/k \zeta_T}{1/k \zeta (1 - 2/k \zeta_T)} \quad (13.12)$$

§ 14. Решение уравнения турбулентного динамического пограничного слоя. Представим уравнение (4.15) в виде

$$\frac{dR_\theta}{d\bar{x}} + \frac{\bar{U}'(H+1)}{\bar{U}(1-\bar{U}^2)} R_\theta + \frac{\bar{U}'(\bar{T}_w-1)}{\bar{U}(1-\bar{U}^2)} \frac{\Delta^*}{\vartheta} R_\theta = \frac{1}{\zeta^2} \frac{1}{T_w} (1-\bar{U}^2)^{\frac{x}{\zeta}-1} \bar{U} R_{02} \quad (14.1)$$

Выполним замену переменных [7]

$$z = e^{k\zeta} (1-2/k\zeta) k^{2r} \zeta^2 \quad (14.2)$$

Дифференцируя это соотношение по \bar{x} и используя (12.12), найдем

$$\frac{dz}{d\bar{x}} = Kz \left(\frac{1}{R_\theta} \frac{dR_\theta}{d\bar{x}} - \frac{n}{T_w} \frac{d\bar{T}_w}{d\bar{x}} \right) \quad \left(K = \frac{1-2/k\zeta^2}{1-2/k\zeta + 2/k^2\zeta^2} \right) \quad (14.3)$$

Из уравнений (14.1)–(14.3) получим

$$\frac{dz}{d\bar{x}} + \frac{\bar{U}'K(H+1)}{\bar{U}(1-\bar{U}^2)} z + \frac{\bar{U}'K(\bar{T}_w-1)}{\bar{U}(1-\bar{U}^2)} \frac{\Delta^*}{\vartheta} z + nK \frac{\bar{T}_w'}{T_w} z = \frac{K\bar{U}R_{02}k^2}{C_1\bar{T}_w^{n+1}} (1-\bar{U}^2)^{\frac{x}{\zeta}-1} \quad (14.4)$$

Величины H и K , мало изменяющиеся по длине пограничного слоя, примем постоянными по \bar{x} . Если рассматривать Δ^*/ϑ как известную функцию от \bar{x} , то (14.4) является линейным уравнением относительно z .

Принимая на некотором участке $\bar{x}_0 < \bar{x} < \bar{x}_1$ постоянное среднее значение отношения $\Delta^*/\vartheta = h$ (в первом приближении можно для всего турбулентного слоя принять $h = \Delta^*/\vartheta = \delta^*/\vartheta = H$, что имеет место на пластине), получим решение уравнения (14.4) в виде ¹

$$z = \frac{\sqrt{(1-\bar{U}^2)^c}}{\bar{T}_w^{nK} \bar{U}^c} \left[C + \frac{KR_{02}k^2}{C_1} \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \frac{\bar{T}_w^{-nK-n-1} \bar{U}^{c+1}}{\sqrt{(1-\bar{U}^2)^c}} (1-\bar{U}^2)^{\frac{x}{\zeta}-1} d\bar{x} \right] \quad (14.5)$$

Здесь

$$C = [z\bar{T}_w^{nK} \bar{U}^c \sqrt{(1-\bar{U}^2)^c}]_{\bar{x}=\bar{x}_0}, \quad c = K(H+1) + K(\bar{T}_w-1)h$$

Постоянные следует принять равными

$$K = 1.20, \quad H = 1.4, \quad h = 1.4, \quad (C_1 = 0.326; k = 0.391)$$

После расчета динамического и теплового слоя можно найти новые средние значения величин K , H , $h = H_T R_\theta / R_\theta$ и, если отклонения от принятых окажутся существенными, расчет целесообразно повторить. Если для уточнения результатов расчет ведется по участкам, значения постоянных для каждого следующего участка определяются по значениям R_θ , ζ , R_θ , ζ_T , полученным в конце предыдущего участка. При интегрировании от точки перехода ламинарного слоя в турбулентное состояние величина $(z)_{\bar{x}=\bar{x}_0}$ определяется из условия равенства начального значения R_θ значению R_θ в конце ламинарного участка. При интегрировании от передней кромки $C=0$. По формулам (12.2) и (14.2) могут быть построены раз навсегда вспомогательные графики зависимости $\lg(R_\theta \bar{T}_w^{-n} C_1^{-1})$ и $\lg z$ от $k\zeta$.

¹ См. также сноску на стр. 460.

Местный коэффициент трения находится по формуле

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{2}{T_w} \left(1 + \frac{1}{2}(x-1)M_\infty^2 \right)^{\frac{1}{x-1}} \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^2 \frac{1}{\xi^2} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} \quad (14.6)$$

При малых числах Маха формула (14.5) принимает вид

$$z = \frac{1}{(T_w/T_0)^{nK} (U/U_\infty)^c} \left[C + \frac{KRk^2}{C_1} \int_{x_0}^{\bar{x}} \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{nK-n-1} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{c+1} d\bar{x} \right] \quad (14.7)$$

причем

$$R = \frac{U_\infty L \rho_0}{\mu_0}, \quad R_\Phi = \frac{U}{U_\infty} \Phi R, \quad C = \left[z \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{nK} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^c \right]_{\bar{x}=\bar{x}_0}$$

§ 15. Решение уравнения турбулентного теплового слоя. Представим уравнение (4.16) в виде

$$\frac{dR_0}{dx} + \frac{1}{\bar{t}_0^*} \frac{d\bar{t}_0^*}{d\bar{x}} R_0 = \frac{4}{\xi \zeta_T} \frac{1}{\bar{T}_w} \bar{U} R_{02} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} \quad \left(\bar{t}_0^* = \frac{t_0^*}{T_{00}} \right) \quad (15.1)$$

Выполняя замену переменных [4]

$$z_T = \exp(k\zeta_T) \left(1 - \frac{2}{k\zeta_T} \right) k\zeta_T \quad (15.2)$$

и используя закон теплоотдачи (13.1), находим

$$\frac{dz_T}{dx} + K_T n \frac{1}{\bar{T}_w} \frac{d\bar{T}_w}{d\bar{x}} z_T + K_T \frac{1}{\bar{t}_0^*} \frac{d\bar{t}_0^*}{d\bar{x}} z_T = K_T \frac{k^2}{k\zeta_T C_1 \bar{T}_w^{n+1}} \bar{U} R_{02} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} \quad (15.3)$$

$$\left(K_T = \frac{1 - 4/k\zeta_T}{1 - 2/k\zeta_T + 2/k^2\zeta_T^2} \right)$$

Решение имеет вид ¹

$$z_T = \frac{1}{\bar{T}_w^{nK_T} (\bar{T}_w - 1)^{K_T}} \left[C' + \frac{K_T R_{02} k^2}{C_1} \int_{x_0}^{\bar{x}} \bar{T}_w^{nK_T-n-1} (\bar{T}_w - 1)^{K_T} \frac{\bar{U}}{k\zeta_T} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} d\bar{x} \right] \quad (15.4)$$

$$C' = [z_T \bar{T}_w^{nK_T} (\bar{T}_w - 1)^{K_T}]_{\bar{x}=\bar{x}_0}$$

¹ Уравнение энергии (15.1) при наличии дополнительной зависимости между R_0 и ζ_T в виде (13.11) в случае $\bar{T} = \text{const}$ является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому наряду с решением в форме (15.4) можно пользоваться его точным решением

$$\exp(k\zeta_T) (k\zeta_T - 3) + 2\mathcal{E}i(k\zeta_T) = C + \frac{k^2 R_{02}}{C_1 \bar{T}_w^{n+1}} \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{\bar{U}}{k\zeta_T} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} d\bar{x}$$

где

$$\mathcal{E}i(k\zeta_T) = \int_{-\infty}^{k\zeta_T} \frac{e^u}{u} du, \quad C = [\exp(k\zeta_T) (k\zeta_T - 3) + 2\mathcal{E}i(k\zeta_T)]_{\bar{x}=\bar{x}_0} \quad (\text{при } \bar{x}_0 = 0, C = 0)$$

Постоянную K_T следует принять равной 1.15 (с последующей проверкой по результатам расчета теплового слоя). Величина $(\zeta_T)_{x=\bar{x}_0}$ определяется по уравнению (13.11) из условия равенства значения R_0 в начале турбулентной области значению R_0 в конце ламинарного участка. При интегрировании от передней кромки $C' = 0$. Вспомогательный график зависимости $\lg z_T$ от $k\zeta_T$ может быть построен раз навсегда.

Местная теплоотдача находится по формуле

$$N = \frac{q_w L}{\lambda_{\infty} t_0^*} = \frac{R_{02} \bar{U}}{\zeta \zeta_T} \frac{1}{T_w} \left(1 + \frac{1}{2} (z-1) M_{\infty}^2\right)^n (1 - \bar{U}^2)^{\frac{z}{z-1}} \quad (15.5)$$

При малых числах Маха формула (15.4) принимает вид

$$z_T = \frac{1}{(T_w/T_0)^{nK_T} (T_w/T_0 - 1)^{K_T}} \left[C' + \frac{K_T R k^2}{C_1} \int_{x_0}^{\bar{x}} \left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{nK_T - n - 1} \left(\frac{T_w}{T_0} - 1\right)^{K_T} \frac{U}{U_{\infty}} \frac{1}{k\zeta} d\bar{x} \right] \quad (15.6)$$

16. Определение профильного сопротивления при дозвуковых скоростях. Сопротивление крыла бесконечного размаха (на единицу длины размаха) получим по теореме импульсов в виде

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\infty} u_{\infty} (U_{\infty} - u_{\infty}) dy = \rho_{00} U_{\infty}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{\infty}}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u_{\infty}}{U_{\infty}}\right) d\eta = \rho_{00} U_{\infty}^2 \sum \vartheta_{\infty} \quad (16.1)$$

Здесь $\sum \vartheta_{\infty}$ означает сумму толщин потери импульса, относящихся к верхней и нижней поверхностям и рассчитанных на большом удалении от крыла, где $\delta \rightarrow \infty$ и $U \rightarrow U_{\infty}$. Для коэффициента сопротивления имеем

$$c_{xp} = \frac{2Q}{\rho_{\infty} U_{\infty}^2 L} = 2 \sum \bar{\vartheta}_{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} (z-1) M_{\infty}^2\right)^{\frac{1}{z-1}} \quad (16.2)$$

Задача состоит в том, чтобы выразить ϑ_{∞} через динамические и тепловые характеристики пограничного слоя у задней кромки. Так как в следе за телом $\tau_w = 0$ и $q_w = 0$, уравнения (4.16)–(4.17) для следа принимают вид

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dz} + \frac{\bar{U}'}{U} \left[2 + \frac{H + \bar{U}^2}{1 - \bar{U}^2} + \frac{\bar{T}_w - 1}{1 - \bar{U}^2} \frac{\theta}{\bar{\vartheta}} H_T \right] \bar{\vartheta} = 0 \quad (16.3)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dx} + \frac{\bar{U}'}{\bar{U}} \bar{\theta} + \frac{1}{t_0^*} \frac{d\bar{t}_0^*}{dx} \bar{\theta} = 0 \quad (16.4)$$

Введем обозначение

$$G(\bar{x}) = \frac{H + \bar{U}^2}{1 - \bar{U}^2} + \frac{\bar{T}_w - 1}{1 - \bar{U}^2} \frac{\theta}{\bar{\vartheta}} H_T \quad (16.5)$$

и представим уравнение (16.3) в виде

$$\frac{1}{\bar{\vartheta}} \frac{d\bar{\vartheta}}{dx} = -(2 + G) \frac{d}{dx} \ln \frac{\bar{U}}{U_{\infty}} \quad (16.6)$$

Интегрируя это уравнение по \bar{x} в пределах от задней кромки (отмечаем индексом «1») до $\bar{x} = \infty$, получим

$$\ln \frac{\bar{\vartheta}_\infty}{\bar{\vartheta}_1} = (2 + G_1) \ln \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_\infty} + \int_{G_1}^{G_\infty} \ln \frac{\bar{U}}{\bar{U}_\infty} dG \quad (16.7)$$

При $\bar{U} \approx 0$, $\bar{T}_w = 1$ функция $G(\bar{x})$ переходит в $H(\bar{x})$. Но для несжимаемой жидкости имеет место предположение Сквайра и Юнга [8] о линейном характере зависимости $\ln(U/U_\infty)$ от H :

$$\frac{\ln(U/U_\infty)}{H_\infty - H} = \frac{\ln(U_1/U_\infty)}{H - H_1}$$

Принимая аналогичное допущение

$$\frac{\ln(U/U_\infty)}{G_\infty - G} = \frac{\ln(U_1/U_\infty)}{G_\infty - G_1} \quad (16.8)$$

получим ¹

$$\ln \frac{\bar{\vartheta}_\infty}{\bar{\vartheta}_1} = \left(2 + \frac{G_1 + G_\infty}{2}\right) \ln \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_\infty} \quad (16.9)$$

Напишем выражение для G_1 :

$$G_1 = \frac{H_1 + \bar{U}_1^2}{1 - \bar{U}_1^2} + \frac{\bar{T}_{w1} - 1}{1 - \bar{U}_1^2} \frac{\bar{\vartheta}_1}{\bar{\vartheta}_1} H_T \quad (16.10)$$

Легко видеть, что $H_\infty = 1$ и $H_{T_\infty} = 1$, поэтому

$$G_\infty = \frac{1 + \bar{U}_\infty^2}{1 - \bar{U}_\infty^2} + \frac{\bar{T}_{w\infty} - 1}{1 - \bar{U}_\infty^2} \frac{\bar{\vartheta}_\infty}{\bar{\vartheta}_\infty} \quad (16.11)$$

Заменяя в формуле (16.9) G_1 и G_∞ их значениями, получим окончательно

$$\bar{\vartheta}_\infty = \bar{\vartheta}_1 \left(\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_\infty}\right)^\pi \quad (16.12)$$

$$\pi = \frac{H_1 + 5}{2} + \frac{H_1 + 1}{2} \frac{\bar{U}_1^2}{1 - \bar{U}_1^2} + \frac{\bar{U}_\infty^2}{1 - \bar{U}_\infty^2} + \frac{1}{2} \frac{(\bar{T}_{w1} - 1) H_T \bar{\vartheta}_1 / \bar{\vartheta}_1}{1 - \bar{U}_1^2} + \frac{1}{2} \frac{(\bar{T}_{w\infty} - 1) \bar{\vartheta}_\infty / \bar{\vartheta}_\infty}{1 - \bar{U}_\infty^2}$$

Из уравнения (10.4) следует, что $\bar{b} \bar{U} (\bar{T}_w - 1) = \text{const}$, поэтому

$$(\bar{T}_{w\infty} - 1) \bar{b}_\infty = (\bar{T}_{w1} - 1) \bar{b}_1 \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_\infty} \quad (16.13)$$

¹ К этому же результату можно прийти из следующих элементарных соображений. Уравнение (16.7) можно представить в виде

$$\ln \frac{\bar{\vartheta}_\infty}{\bar{\vartheta}_1} = (2 + G_1) \ln \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_\infty} + (G_\infty - G_1) \ln \frac{\bar{U}_m}{\bar{U}_\infty}$$

где \bar{U}_m — некоторое среднее значение скорости \bar{U} , лежащее между \bar{U}_1 и \bar{U}_∞ . Но для обычных форм профилей отношение \bar{U}_1/\bar{U}_∞ вообще близко к единице, а так как величина $2 + G_1$ в несколько раз превосходит величину $G_\infty - G_1$, то при любом выборе среднего значения \bar{U}_m относительная ошибка в определении $\bar{\vartheta}_\infty$ оказывается невелика. Принимая среднее геометрическое $\bar{U}_m = \sqrt{\bar{U}_1 \bar{U}_\infty}$, вновь приходим к (16.9).

При малых числах Маха формулы (16.2), (16.12), (16.13) принимают вид

$$c_{xp} = 2 \sum \bar{\theta}_\infty, \quad \pi = \frac{H_1 + 5}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \frac{\bar{\theta}_1 H T_1}{\bar{\theta}_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{T_{w\infty}}{T_0} - 1 \right) \frac{\bar{\theta}_\infty}{\bar{\theta}_\infty}$$

$$\bar{\theta}_\infty = \bar{\theta}_1 \left(\frac{U_1}{U_\infty} \right)^\pi, \quad \left(\frac{T_{w\infty}}{T_0} - 1 \right) \bar{\theta}_\infty = \left(\frac{T_{w1}}{T_0} - 1 \right) \bar{\theta}_1 \frac{U_1}{U_\infty}$$

17. Пограничный слой в осесимметричном потоке газа. При осевом обтекании тел вращения турбулентным потоком остаются в силе уравнения (10.1) и (10.2) в переменных xu и преобразованные уравнения (10.3) и (10.4). Ограничиваясь случаем числа Прандтля $P = 1$ и вводя параметры R_θ , ζ ; R_0 и ζ_T , представим интегральные соотношения в виде

$$\frac{dR_\theta}{dx} + \frac{U'(H+1)}{U(1-U^2)} R_\theta + \frac{\bar{U}'(T_w-1)\Delta^*}{U(1-\bar{U}^2)\bar{\theta}} R_\theta + \frac{r'}{r} R_\theta = \frac{1}{\xi^2} \frac{1}{T_w} \bar{U} R_{00} (1-\bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} \quad (17.1)$$

$$\frac{dR_0}{dx} + \frac{r'}{r} R_0 + \frac{1}{t_0^*} \frac{dt_0^*}{dx} R_0 = \frac{1}{\xi \zeta_T} \frac{1}{T_w} \bar{U} R_{00} (1-\bar{U})^{\frac{x}{x-1}} \quad (17.2)$$

Используя закон сопротивления (12.12), закон теплоотдачи (13.11), выполняя замену переменных

$$z = e^{k\zeta} \left(1 - \frac{2}{k\xi} \right) k^2 \zeta^2, \quad z_T = \exp(k\zeta_T) \left(1 - \frac{2}{k\xi_T} \right) k \zeta_T$$

принимая мало изменяющиеся величины H , K , K_T постоянными по \bar{x} , а также принимая постоянное среднее значение для отношения $\Delta^*/\bar{\theta} = h$, получим систему линейных уравнений, решения которых имеют вид

$$z = \frac{\sqrt{(1-U^2)^c}}{\bar{T}^{nK} \bar{U}^c r^K} \left[C + \frac{K R_{00} k^2}{C_1} \int_{x_0}^x \frac{\bar{T}_w^{nK-n-1} \bar{U}^{c+1} r^K}{\sqrt{(1-\bar{U}^2)^c}} (1-\bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} d\bar{x} \right] \quad (17.3)$$

$$C = \left[\frac{z U^{c_r K} \bar{T}_w^{nK}}{\sqrt{(1-\bar{U}^2)^c}} \right]_{\bar{x}=\bar{x}_0}$$

$$z_T = \frac{1}{T_w^{nK} \bar{T}_w^{K_T} (T_w-1)^{K_T}} \left[C' + \right. \quad (17.4)$$

$$\left. + \frac{K_T R_{00} k^2}{C_1} \int_{x_0}^x \bar{T}_w^{nK_T-n-1} (\bar{T}_w-1)^{K_T} \frac{\bar{U}}{k\xi} (1-\bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} r^{K_T} d\bar{x} \right]$$

$$C' = [z_T \bar{T}_w^{nK_T} (\bar{T}_w-1)^{K_T} r^{K_T}]_{\bar{x}=\bar{x}_0}$$

Для напряжения трения и числа Нусельта остаются в силе формулы (14.6) и (15.5). В случае внутренней задачи

$$N_{00} = \frac{q_w L}{\lambda_{00} t_0^*} = \frac{1}{\xi \zeta_T} \frac{1}{\bar{T}_w} R_{00} \bar{U} (1-\bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}}, \quad C_{f00} = \frac{2\tau_w}{\rho_{00} U^2} = \frac{2}{\xi^2} \frac{1}{\bar{T}_w} (1-\bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} \quad (17.5)$$

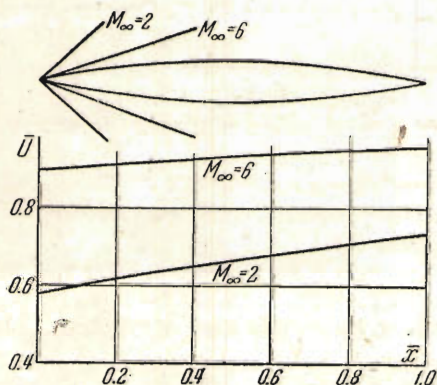
Изложенная теория, в частности установленные в разделе I интегральные соотношения импульсов и энергии, дает возможность определения тепловых и динамических характеристик пограничного слоя на криволинейной стенке в наиболее общих случаях, а именно, при наличии внешнего и внутреннего теплообмена. Расчет пограничного слоя по формулам, выведенным в разделах II и III в предположении числа Прандтля $P=1$, непосредственно позволяет найти при произвольных числах Маха (исключая интервал от $M_{\infty} = M_{\infty cr}$ до $M_{\infty} = 1$):

1) коэффициенты теплоотдачи от стенки к газу, имеющие место при поддержании заданной температуры стенки посредством теплоподвода изнутри тела, и коэффициенты теплоотдачи от газа к стенке, т. е. необходимый для поддержания заданной температуры стенки теплоотвод внутрь тела;

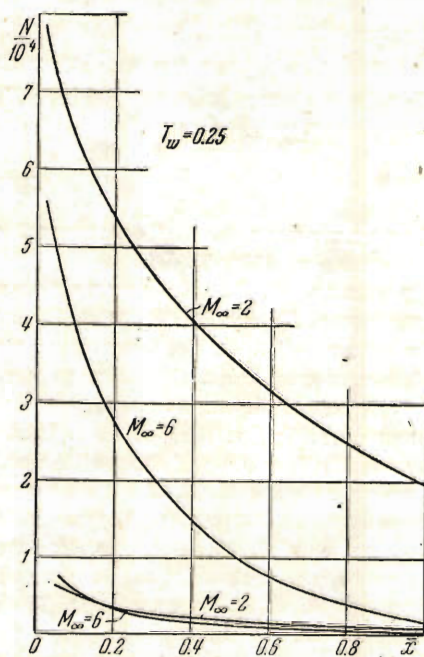
2) распределение напряжения трения вдоль обтекаемой стенки и профильное сопротивление крыла (в случае $M_{\infty} < M_{\infty cr}$) при произвольном отношении температур торможения потока и стенки.

При малых скоростях полученные уравнения выражают зависимость теплоотдачи и сопротивления от отношения абсолютных температур потока и стенки (влияние сжимаемости и изменения физических постоянных вследствие теплообмена).

В заключение приводим результат расчета одного примера. На фиг. 3 дано распределение скоростей внешнего потока при обтекании двугольника сверхзвуковым потоком; показаны также контур двугольника и расположение скачка. Обтекание рассчитано по методу Донова [9]. На фиг. 4 даны кривые для чисел Нусельта N , обеспечива-



Фиг. 3.



Фиг. 4.

ющих равномерное охлаждение поверхности до температуры $T_w = 0.25T_{\infty}$ при $R_{\infty} = 15 \times 10^6$, $M_{\infty} = 2$ и $M_{\infty} = 6$ для ламинарного (нижние кривые) и турбулентного (верхние кривые) режима.

Поступила в редакцию
1. VIII. 1945

L. E. KALIKHMAN. HEAT TRANSMISSION IN THE BOUNDARY LAYER

The paper deals with the boundary layer along a curved wall in a gas flow, in the presence of heat transfer. The solution of the problem is based on a generalization of the method evolved by Dorodnizin^[1] for a boundary layer with the Prandtl number $P=1$ without heat transfer. In the latter case the relation between the temperature field and the velocity field is given by the conditions of the problem (total energy is constant). In the case described in the present paper, this relation is not assumed to be given. The method suggested includes consideration of the compressibility of the gas for high velocities and high temperature gradient. The method holds as well for $P \neq 1$.

In the first part of the paper, basic expressions are established for temperature (2.6), pressure (3.1), density (3.2) and viscosity (3.3). Expression (4.13) gives the «thicknesses» of loss of energy. Integral expressions for momentum (4.15) and energy (4.16) are derived. Formula (4.9) is employed for the transformation to a new independent variable.

Part two deals with the theory of the laminar layer. The basic system (5.1) (5.3) is given in new variables. A generalization of the Pohlhausen method is developed. Initial conditions are examined and formulae (8.5), (8.9) for computation are derived.

Part three discusses the theory of the turbulent layer. The author derives the «resistance law» (12.12) and the «heat transfer law» (13.11). Approximate solutions (14.5) and (15.4) are given. Formulae (16.11), (16.12) for determination of the profile drag of aerofoils are derived. The case of axial symmetry is also examined; formulae (17.3), (17.4)

ЛИТЕРАТУРА

1. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. Прикладная математика и механика, 1942. Т. VI.
2. Франкль Ф. И., Христианович С. А., Алексеева Р. П. Основы газовой динамики. Труды ЦАГИ. 1938. Вып. 364.
3. Калихман Л. Е. Сопротивление и теплоотдача плоской пластины в потоке газа при больших скоростях. Прикладная математика и механика. 1945. Т. IX.
4. Калихман Л. Е. К расчету теплопередачи в турбулентном потоке несжимаемой жидкости. Труды НИИ-1. 1945. Вып. 4.
5. Lyon H. The Drag of Streamline bodies. Aircraft Engineering. 1934. № 67.
6. Дородницын А. А., Лойцянский Л. Г. Пограничный слой крылового профиля при больших скоростях. Труды ЦАГИ. 1944. Вып. 551.
7. Калихман Л. Е. Новый метод расчета турбулентного пограничного слоя и определения точки срыва. Доклады Академии Наук СССР. 1943. Т. 38. № 5—6.
8. Squire H. V. & Young A. D. The calculation of the profile drag of Aerofoils. ARC. R&M. 1938. No 4838.
9. Донов А. Плоское крыло с острыми кромками в сверхзвуковом потоке. Известия Академии Наук СССР. Сер. математическая. 1939. Стр. 603—626.