Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ШТАМПОВ КРУГОВОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ

Л. А. Галин

(Москва)

Настоящая статья посвящена решению ряда контактных задач теории упругости. Эти задачи состоят в следующем: на абсолютно твердое тело (которое в дальнейшем называется штампом), находящееся на упругом полупространстве, действуют силы, вследствие чего в упругом теле возникает напряженное состояние. Одной из целей произведенного исследования является установление распределения давлений на площадке контакта, а также нахождение зависимости между силой, действующей на штамп, и величиной его перемещения. В работе рассмотрены штампы круговой формы в плане. Подобным задачам были посвящены следующие работы: осесимметричные случаи (штампы в виде тел вращения) рассматривались в работах Г. Герца[1], Я. Буссинеска[2], А. Лява[3], М. Я. Леонова[4], И. Я. Штаермана[5,18], А. И. Лурье[6] и Д. Гардинга и Д. Снеддона[7]. Несимметричный случай (штамп с плоским основанием, не параллельным поверхности упругого полупространства) рассматривался В. М. Абрамовым[8] и А. И. Лурье[6]. При этом во всех исследованных случаях предполагалось, что силы трения между штампом и упругим телом отсутствуют.

В настоящей работе дано решение задачи о штампе круговой формы в плане с произвольно изогнутым основанием (§ 2). Что касается осесимметричной задачи, то особенное внимание было уделено установлению простой зависимости между силой, действующей на штамп, и его перемещением (§ 4). Установлено влияние на распределение давления под штампом нагрузки, действующей на поверхности полупространства (§ 5). Дано решение задачи об осесимметричном штампе при наличии сил трения, также обладающих осевой симметрией (§ 6).

§ 1. Основные уравнения задачи. Граничные условия в контактной задаче для упругого полупространства ($z \leqslant 0$) при отсутствии сил трения имеют следующий вид:

на площадке контакта L при $z=0$

$$w = f(x, y) + C, \qquad \tau_{xz} = 0, \qquad \tau_{yz} = 0 \tag{1.1}$$

на свободной поверхности, вне L при $z=0$

$$\sigma_z = 0, \qquad \tau_{xz} = 0, \qquad \tau_{yz} = 0$$

Здесь w — перемещение точек упругого полупространства в направлении оси z, C — перемещение штампа, τ_z, τ_{xz}, τ_{yz} — компоненты напряжения.

Уравнение поверхности штампа

$$z = f(x, y)$$

Перемещения u, v, w и компоненты напряжения σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} в пространственной задаче могут быть следующим образом выражены [9] через четыре гармонических функции φ, φ_1, φ_2 и χ:

$$\begin{gathered} u = \varphi_1 + z\frac{\partial \chi}{\partial x}, \qquad v = \varphi_2 + z\frac{\partial \chi}{\partial x}, \qquad w = \varphi + z\frac{\partial \chi}{\partial z} \\ \sigma_z = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2z\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right) \\ \tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial x} + 2z\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\,\partial z}\right) \\ \tau_{zy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial y} + 2z\frac{\partial^2 \chi}{\partial y\,\partial z}\right) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

При этом [9] устанавливается, что

$$\chi = -\frac{1}{2(1-\nu^2)}\varphi$$

На основании (1.2) получены следующие граничные условия для определения функции φ при $z = 0$:

$$\varphi = f(x, y) \quad \text{на } S, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{вне } S \tag{1.3}$$

Из (1.2) также следует, что $\varphi(x, y, 0) = w(x, y, 0)$.

Нормальное давление, действующее на поверхности упругого полупространства, равно

$$p(x, y) = (\sigma_z)_{z=0} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) следует, что функция $\varphi(x, y, z)$ может быть представлена в виде потенциала простого слоя

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1-\nu^2}{\pi E}\iint\limits_S p(\xi, \eta)\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \tag{1.5}$$

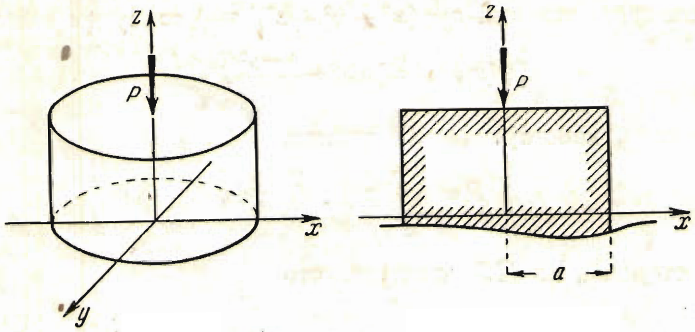
Таким образом определение $\varphi(x, y, z)$ в случае отсутствия сил трения сводится к следующему случаю задачи Дирихле: необходимо найти гармоническую функцию, исчезающую на бесконечности и непрерывную всюду, кроме кругового диска S. На верхней и на нижней сторонах диска она принимает равные по величине заданные значения.

Граничные условия для других случаев контактных задач будут приведены в соответствующих разделах.

Заметим, что на основании функции $\varphi(x, y, z)$ могут быть в явной форме выражены величины компонент напряжения, действующего в любой точке упругого полупространства [6].

§ 2. Контактная задача без сил трения. Общий случай. Рассмотрим случай, когда в упругое полупространство вдавливается штамп круговой формы в плане (круг радиуса a), основание которого является поверхностью, представляющей функцию двух координат (фиг. 1). Пусть уравнение этой поверхности $z = f(x\,,\,y)$.

Для определения гармонической функции, равной $f(x\,,\,y)$ на верхней и на нижней сторонах диска и исчезающей на бесконечности, воспользуемся выражением, данным Гобсоном [10] (см. также книгу Гейне [11]).



Фиг. 1.

Если ввести сфероидальные координаты r^*, η^*, φ^*, которые связаны с прямоугольными следующими соотношениями:

$$x = \sqrt{r^{*2} + a^2 \sin \eta^*} \cos \varphi^*\,, \quad y = \sqrt{r^{*2} + a^2 \sin \eta^*} \sin \varphi^*\,, \quad z = r^* \cos \eta^* \tag{2.1}$$

(причем $0 < r^* < \infty\,,\; 0 < \eta^* < \pi/2\,;\; 0 < \varphi^* < 2\pi$), то будем иметь

$$\varphi(r^*\,,\,\eta^*\,,\,\varphi^*) = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} f(\eta^*\,;\,\varphi^*) \frac{za \sin \eta_1^*}{\pi^2 r \cos \eta^*} \left\{ 1 + \right. \tag{2.2}$$

$$\left. + \frac{a \cos \eta_1^* \cos \eta^*}{r} \operatorname{arc\,tg} \frac{a \cos \eta_1^* \cos \eta^*}{r} \right\} d\eta_1^*\, d\varphi_1^*$$

Здесь r — расстояние между точками с координатами соответственно r^*, η^*, φ^* и $r^* = 0\,;\; \eta_1^*\,,\; \varphi_1^*$.

Если перейти теперь к прямоугольным координатам, приняв при этом во внимание, что элемент площади в сфероидальных и прямоугольных координатах соответственно будет

$$ds = a^2 \sin \eta_1^* \cos \eta_1^*\, d\eta_1^*\, d\varphi_1^*\,; \qquad ds = d\xi\, d\eta$$

то получим

$$\varphi(x\,,\,y\,,\,z) = \iint\limits_S f(\xi\,,\,\eta) \left[\frac{z}{\pi^2 r^3} \left(\frac{1}{M} + \operatorname{arc\,tg} M \right) \right] d\xi\, d\eta \tag{2.3}$$

Здесь

$$M = \frac{z\sqrt{2}\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2}}{r\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + R}}$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}, \qquad R = \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2 + 4a^2 z^2}$$

На основании φ могут быть определены напряжения в упругом теле.

Что касается давления, действующего на площадке контакта, то для него согласно (1.4) будем иметь

$$p(x, y) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} \tag{2.4}$$

Воспользуемся выражением (2.2) для определения силы, действующей на штамп, которая имеет такое значение, что поверхность упругого тела под штампом будет определяться уравнением $z = f(x, y)$.

Из (1.5) следует, что при $s = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \to \infty$ будем иметь

$$[\varphi(x, y, z)]_{s\to\infty} = \frac{1-\nu^2}{\pi E} P \frac{1}{s} \tag{2.5}$$

Здесь P — сила, действующая на штамп:

$$P = \iint\limits_S p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{2.6}$$

С другой стороны, из (2.2) следует, что

$$[\varphi(r^*, \eta^*, \varphi^*)]_{r^*\to\infty} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{za \sin\eta_1^*}{\pi^2 \cos\eta^* s^2}\, d\eta_1^*\, d\varphi_1^*$$

При этом $z / \cos\eta^* = r^*$. Кроме того, при $r^* \to \infty$ будет иметь место $r^* \to s$. Отсюда при $s \to \infty$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{a}{\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} f(\eta_1^*, \varphi_1^*) \sin\eta_1^*\, d\eta_1^*\, d\varphi_1^* \tag{2.7}$$

Если теперь сравнить (2.5) и (2.7) и перейти от сфероидальных координат к полярным на диске S, воспользовавшись для этого (2.1), то получим выражение для силы, действующей на штамп.

Результат может быть сформулирован следующим образом:

На штамп круговой формы в плане (радиуса a), основание которого ограничено поверхностью $z = f(x, y)$, находящийся на упругом полупространстве, действует сила P. Для того чтобы поверхность упругого тела под штампом определялась также уравнением $z = f(x, y)$, нужно, чтобы

$$P = \frac{E}{\pi(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi}\int_0^{a} f(\rho_1, \theta) \frac{\rho_1}{\sqrt{a^2 - \rho_1^2}}\, d\rho_1\, d\theta \tag{2.8}$$

Следует заметить, что здесь перемещение штампа в направлении оси z входит в качестве постоянного слагаемого в функцию $f(x, y)$.

Рассмотрим случай, когда $f(\rho, \theta) = C$. При этом штамп с плоским основанием вдавливается на глубину, равную C, и, следовательно,

$$P = \frac{2E}{1-\nu^2} C \int_0^{a} \frac{\rho_1}{\sqrt{a^2 - \rho_1^2}}\, d\rho_1 = \frac{2aE}{1-\nu^2} C \tag{2.9}$$

Это совпадает с результатами Буссинеска (см. [2]).

§ 3. О функции Грина для внешности кругового диска. В § 4 будет рассмотрена осесимметричная контактная задача при дополнительном требовании относительно давления под штампом, которое должно быть ограничено на контуре площадки касания. Решение можно было бы получить, исходя из общей формулы (2.3). Однако удобнее определение функции $\varphi(x, y, z)$ свести к задаче Неймана. При этом для построения решения будет необходима функция Грина, которая обращается в нуль на внешности кругового диска и ведет себя как $1/r$ в окрестности точки, расположенной на диске. Так как эта функция представляет значительный интерес, в частности, для задачи о крыле круговой формы в плане, дадим элементарный способ ее определения. Установим некоторые свойства введенной функции Грина.

Пусть построена $K(x, y, z, \xi, \eta)$ гармоническая функция x, y и z, удовлетворяющая следующим условиям.

1. В области Λ функция $K(x, y, z, \xi, \eta) = 0$, причем Λ — полубесконечная область в плоскости $z=0$, внешняя к некоторой области L, также находящейся в плоскости $z=0$.

2. Функция $K(x, y, z, \xi, \eta)$ ведет себя как

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}$$

в окрестности точки $(x=\xi,\ y=\eta,\ z=0)$, находящейся в области L.

3. $K(x, y, z, \xi, \eta)$ непрерывна во всем пространстве, кроме области L.

4. Функции $K(x, y, z, \xi, \eta)$ и $\partial K(x, y, z, \xi, \eta)/\partial z$ непрерывны в точках области L. Функцию $K(x, y, z, \xi, \eta)$ можно представить в виде (3.1)

$$K(x, y, z, \xi, \eta) = \iint\limits_{\Lambda} q(\xi, \eta, \xi', \eta') \frac{d\xi' d\eta'}{\sqrt{(x-\xi')^2+(y-\eta')^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}$$

При этом плотность простого слоя $q(\xi, \eta, \xi', \eta')$ подбирается так, чтобы выполнялось условие 1. Это всегда можно сделать, если известно решение задачи Дирихле для пространства, внешнего по отношению к области Λ.

Из (3.1) следует, что $K(x, y, z, \xi, \eta)$ — четная функция z. Следовательно, в точках, где $z=0$ и где $K(x, y, z, \xi, \eta)$ и $\partial K(x, y, z, \xi, \eta)/\partial z$ непрерывны, $\partial K(x, y, z, \xi, \eta)/\partial z = 0$. Это будет соблюдаться везде, кроме точки с координатами $x=\xi$, $y=\eta$, $z=0$, где $\partial K(x, y, z, \xi, \eta)/\partial z = \infty$

Образуем теперь функцию

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{L} g(\xi, \eta) K(x, y, z, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{3.2}$$

Очевидно, $F(x, y, z)$ будет гармонической функцией переменных x, y и z. Она может быть представлена в виде суммы

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) \tag{3.3}$$

$$F_1(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{L} g(\xi, \eta) \left\{ \iint\limits_{\Lambda} q(\xi, \eta, \xi', \eta') \frac{d\xi'\, d\eta'}{\sqrt{(x-\xi')^2+(y-\eta')^2+z^2}} \right\} d\xi d\eta$$

$$F_2(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{L} g(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}} \tag{3.4}$$

При этом поверхность L строится таким образом, чтобы точка $x=\xi$, $y=\eta$, $z=0$ находилась снизу от нее.

Функция $F_1(x, y, z)$ является четной по отношению к z и имеет производную непрерывную в точках области L.

Следовательно, в этих точках $[\partial F_1(x, y, z) / \partial z]_{z=0}=0$. С другой стороны, как известно, $[\partial F_2(x, y, z) / \partial z]_{z=0}=f(x, y)$. Поэтому в области L имеем

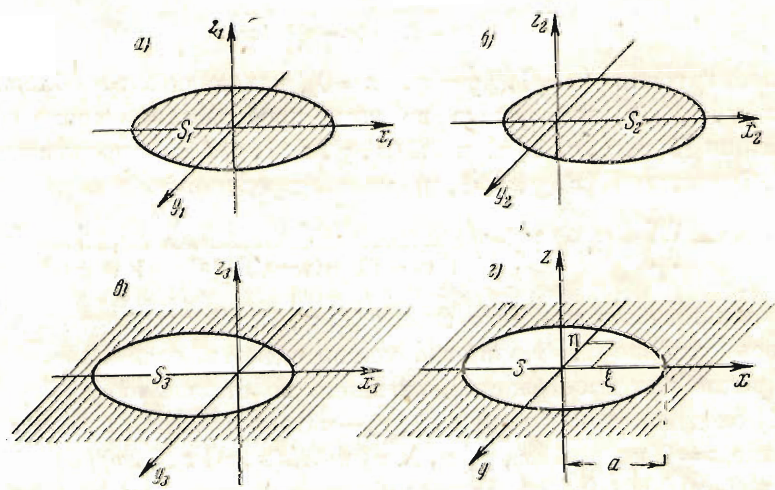
$$\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{z=0}=g(x, y) \tag{3.5}$$

В области Λ функция $F(x, y, z)=0$, так как подинтегральное выражение для точки в этой области, как это видно из (3.2), будет равно нулю.

Таким образом $F(x, y, z)$ удовлетворяет следующим граничным условиям при $z=0$:

$$\frac{\partial F}{\partial z}=g(x, y) \quad \text{на } L, \qquad F=0 \quad \text{на } \Lambda \tag{3.6}$$

Определим теперь функцию $K(x, y, z, \xi, \eta)$ для случая, когда область L является кругом радиуса a.



Фиг. 2.

Для определения $K(x, y, z, \xi, \eta)$ будем исходить из функции $H_1(x_1, y_1, z_1, \alpha)$, которая (фиг. 2 a) удовлетворяет следующим условиям при $z_1=0$:

$$H_1(x_1, y_1, z_1, \alpha)=1 \quad \text{на } S_1, \qquad \frac{\partial}{\partial z}H_1(x_1, y_1, z_1, \alpha)=0 \quad \text{вне } S_1$$

где S_1 — круг радиуса α.

Если ввести сфероидальные координаты r^*, η^*, φ^* по формулам (2.1), полагая при этом $a=\alpha$, то можно показать, что

$$H_1(x_1, y_1, z_1, \alpha)=\frac{2}{\pi}\,Q_0\left(i\,\frac{r^*}{\alpha}\right)$$

Здесь $Q_0(ir^*/\alpha)$ — функция Лежандра второго рода нулевого порядка.

Как известно [11], $Q_0(ir^*/a) = \operatorname{arc\,ctg}(r^*/a)$. Выражая r^*/a через x_1, y_1 и z_1, будем иметь

$$H_1(x_1, y_1, z_1, \alpha) = \tag{3.7}$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \alpha^2 + \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2 z^2}}\right]$$

Если теперь введем новые переменные $x_2 = x_1 + \beta$, $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$, то получим функцию

$$H_2(x_2, y_2, z_2, \alpha) = H_1(x_2 - \beta, y_2, z_2, \alpha)$$

равную единице на некотором круге S_2, центр которого не совпадает с началом координат (фиг. 2,*б*)

Применим к $H_2(x_2, y_2, z_2, \alpha)$ преобразование инверсии относительно начала координат. Полученная функция будет равна $(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{-1/2}$ на внешности круга S_3 в плоскости $z = 0$. Если вычесть ее из $(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{-1/2}$, то полученное выражение будет равно нулю на внешности круга S_3 и будет, вести себя как $(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{-1/2}$ в начале координат (фиг. 2, *в*). В результате этих преобразований найдем

$$H_3(x_3, y_3, z_3, \alpha) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}}\left[1 - H_1\left(\frac{x_3}{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}, \frac{y_3}{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}, \frac{z_3}{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}, \alpha\right)\right]$$

Для того чтобы получить функцию, равную нулю на внешности круга S_3 в плоскости $z = 0$, центр которого совпадает с началом координат, введем переменные

$$x_4 = x_3 + \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2} = x_3 + \xi_1, \qquad y_4 = y_3, \qquad z_4 = z_3$$

В таком случае будем иметь

$$H_4(x_4, y_4, z_4, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{(x_4 - \xi_1)^2 + y_4^2 + z_4^2}}\left\{1 - \right. \tag{3.8}$$

$$\left. - H_1\left[\frac{x_4 - \xi_1}{(x_4 - \xi_1)^2 + y_4^2 + z_4^2}, \frac{y_4}{(x_4 - \xi_1)^2 + y_4^2 + z_4^2}, \frac{z_4}{(x - \xi_1)^2 + y_4^2 + z_4^2}\right]\right\}$$

Введем систему координат x, y, z, повернутую относительно x_4, y_4, z_4 на некоторый угол (фиг. 2, *г*) вокруг оси z_4. Имеем следующие соотношения:

$$\xi^2 + \eta^2 = \xi_1^2, \qquad x^2 + y^2 = x_4^2 + y_4^2, \qquad (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (x_4 - \xi_1)^2 + y_4^2 \tag{3.9}$$

Кроме того, если обозначить радиус круга S через a, то

$$\alpha = \frac{a}{a^2 - \xi_1^2}, \qquad \beta = \frac{\xi_1}{a^2 - \xi_1^2} \tag{3.10}$$

Если подставить (3.7) в (3.8) и заменить в $H_1(x_1, y_1, z_1, \alpha)$ величины x_1, y_1 и z_1 на новые переменные, приняв во внимание также (3.9) и (3.10), то в результате будет получена гармоническая функция $K(x, y, z, \xi, \eta)$, удовлетворяющая поставленным условиям:

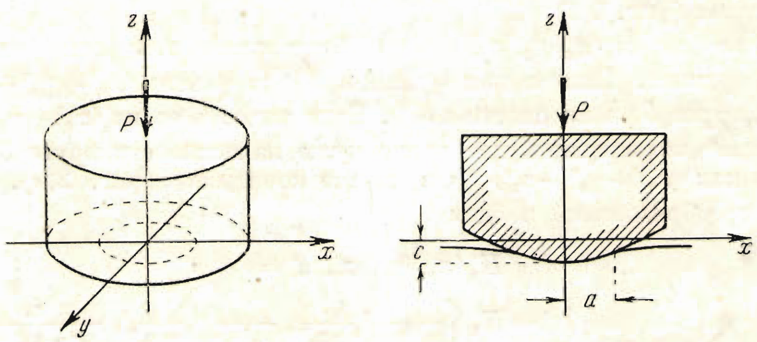
$$K(x, y, z, \xi, \eta) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{r}\frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}}{\sqrt{2}\,ar} \tag{3.11}$$

где

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}, \qquad R=\sqrt{(a^2-x^2-y^2-z^2)^2+4a^2z^2}$$

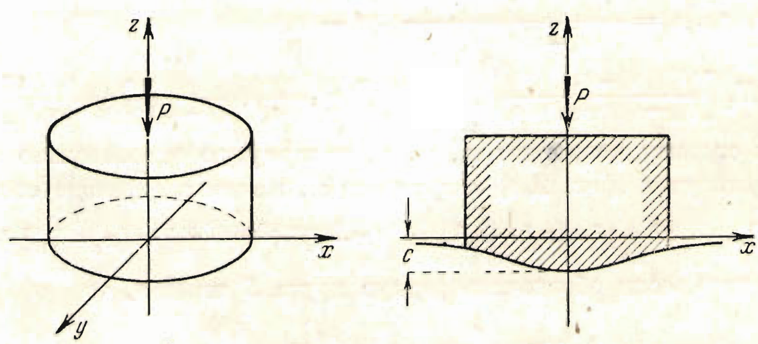
Эта функция была определена Н. Е. Кочиным[12] на основании результатов А. Зоммерфельда[13]. Метод А. Зоммерфельда, использующий потенциал в римановом пространстве, достаточно сложен.

§ 4. Осесимметричная контактная задача без сил трения. В этом разделе дается решение контактных задач теории упругости, когда в упругое полупространство $z\leqslant 0$ вдавливается штамп, ограниченный поверхностью вращения. При этом предполагается, что между штампом и упругим телом сил



Фиг. 3.

трения нет. На штамп действует сила P, направленная по оси симметрии. Будем полагать, что поверхность, ограничивающая штамп, обладает производными в точках, расположенных на краях площадки контакта. При этом давление, возникающее под штампом, будет ограниченным на окружности, являющейся контуром этой площадки (фиг. 3).



Фиг. 4.

Если штамп имеет такую форму, что при увеличении силы P выше некоторой величины в соприкосновение не входят новые участки поверхности, то размеры площадки контакта будут заданными (фиг. 4). В этом случае поверхность, ограничивающая штамп, будет обладать ребром на краях площадки контакта. Давление в этих точках будет, вообще говоря, неограниченным. Решение этой задачи также дается в настоящем разделе.

Граничные условия для определения напряженного состояния будут:
на площадке контакта, — круге S радиуса a, при $z=0$

$$u_z = f(\rho) + c\,, \qquad \tau_{z\theta} = 0, \qquad \tau_{z\rho} = 0$$

на свободной поверхности вне S при $z=0$ (4.1)

$$\sigma_z = 0\,, \qquad \tau_{z\theta} = 0\,, \qquad \sigma_{z\rho} = 0$$

Здесь $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Уравнение поверхности, ограничивающей штамп, $z = f(\rho)$, причем $f(0)=0$. Плоскость $z=0$ совпадает с поверхностью недеформированного полупространства. Поэтому C — величина перемещения штампа; σ_z, $\tau_{z\theta}$, $\tau_{z\rho}$ — компоненты напряжения в цилиндрических координатах. При этом σ_z ограничено на контуре круга S. Перемещение в направлении оси z обозначено u_z. В прямоугольных координатах эти условия будут:
на круге S при $z=0$

$$w = f(\rho) + C\,, \qquad \tau_{xz} = 0\,, \qquad \tau_{yz} = 0$$

вне круга S при $z=0$ (4.2)

$$\sigma_z = 0\,, \qquad \tau_{xz} = 0\,, \qquad \tau_{yz} = 0$$

Компонента напряжения σ_z ограничена на контуре круга S.

Согласно (1.3) условия для определения $\varphi(x, y, z)$, причем имеет место $\varphi(x,y,o) = w(x,y,o)$, будут при $z=0$

$$\varphi = f(x, y) + C \quad \text{на } S, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{вне } S \tag{4.3}$$

При этом $f(x, y)$ является функцией радиуса $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Так как функция $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)\varphi = 0$, то, использовав первое из условий (1.15), получим равенство, которое будет иметь место на круге S:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x, y) = -\triangle f(x, y) \tag{4.4}$$

Здесь и в дальнейшем $\triangle$ обозначает двумерный оператор Лапласа.

Введем функцию

$$\psi(x, y, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{4.5}$$

Согласно (1.4) нормальное давление на поверхности следующим образом выражается через функцию $\psi(x, y, z)$:

$$p(x, y) = (\sigma_z)_{z=0} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\psi(x, y, 0) \tag{4.6}$$

Обозначим

$$s = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{4.7}$$

На основании (1.5) устанавливаем поведение $\psi(x, y, z)$ на бесконечности:

$$[\psi(x, y, z)]_{s\to\infty} = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{s\to\infty} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1-\nu^2}{\pi E}\iint\limits_S p(\xi, \eta)\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}\right]_{s\to\infty} =$$

$$= -\frac{1-\nu^2}{\pi E} P \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{1-\nu^2}{\pi E} P \frac{z}{s^3} \tag{4.8}$$

Здесь P — сила, действующая на штамп, определяется на основании (2.6).

Для определения $\psi(x, y, z)$ имеем следующие условия при $z=0$:

$$\psi=0 \quad \text{вне } S, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z}=-\triangle f(x, y) \quad \text{на } S \tag{4.9}$$

Таким образом мы получили условия вида (3.6) и согласно установленным свойствам функции $K(x, y, z, \xi, \eta)$ будем иметь

$$\psi(x, y, z)=\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_S \triangle f(\xi, \eta) K(x, y, z, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta=$$
$$=\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_S \triangle f(\xi, \eta)\frac{2}{\pi r}\operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2+R}}{\sqrt{2ar}}\right\} d\xi d\eta \tag{4.10}$$

Рассмотрим поведение $\psi(x, y, z)$ на бесконечности.

Нетрудно показать, что при $s\to\infty$ и, следовательно, при $r\to s$

$$\frac{2}{\pi r}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}\sqrt{x^2-x^2-y^2-z^2+R}}{\sqrt{2ar}}\to\frac{2}{\pi}\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}\,\frac{z}{s^3}$$

так как

$$\frac{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2+R}}{\sqrt{2ar}}\to\frac{\sqrt{2}\,az\sqrt{s^2-a^2}}{(s^2-a^2)\sqrt{2as}}\to\frac{z}{s^2}$$

На основании этого

$$\lim_{s\to\infty}\psi(x, y, z)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{s\to\infty}=\left\{\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_S \triangle f(\xi, \eta)\frac{2}{\pi}\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}\, d\xi\, d\eta\right\}\frac{z}{s^3} \tag{4.11}$$

Сравнивая (4.8) и (4.11), находим следующее выражение для силы, действующей на штамп:

$$P=\frac{E}{\pi(1-\nu^2)}\iint\limits_S \triangle f(\xi, \eta)\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}\, d\xi\, d\eta \tag{4.12}$$

Или, принимая во во внимание зависимость $f(\xi, \eta)$ только от радиуса, получим

$$P=\frac{2E}{1-\nu^2}\int\limits_0^a \triangle f(\rho_1)\rho_1\sqrt{a^2-\rho_1^2}\, d\rho_1 \tag{4.13}$$

Согласно (4.6) имеем следующее выражение для нормального давления на поверхности:

$$p(x, y)=-\frac{E}{2(1-\nu^2)}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \triangle f(\xi, \eta) K(x, y, 0, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{4.14}$$

Величина $p(x, y)$ будет ограничена всюду на круге S, так как $K(x, y, z, \xi, \eta)$ имеет особенность того же порядка, что и $1/r$. Поэтому интеграл в выражении (4.14) будет иметь всюду конечное значение (при условии, что $\triangle f(\xi, \eta)$ является ограниченной величиной).

Таким образом выполнено требование ограниченности давления под штампом, которое содержится в условиях (4.2).

Подставим в (4.14) из (3.11) значение $K(x, y, z, \xi, \eta)$ при $z=0$. Замечая, что при этом

$$r=\sqrt{(x-\xi^2)+(y-\eta)^2}, \qquad R=a^2-x^2-y^2$$

получим

$$K(x, y, 0, \xi, \eta)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{a\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \tag{4.15}$$

Введем полярные координаты

$$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\theta, \qquad \xi=\rho_1\cos\theta_1, \qquad \eta=\rho_1\sin\theta_1 \tag{4.16}$$

Принимая во внимание, что $f(x, y)$ является функцией только радиуса ρ, получим из (4.14), используя также (4.15)

$$p^*(\rho)=\frac{-E}{4\pi(1-\nu^2)}\int_0^a\int_0^{2\pi}\triangle f^*(\rho_1)K(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho_1\cos\theta_1, \rho_1\sin\theta_1)\rho_1\,d\theta_1\,d\rho_1$$

Или окончательно

$$\begin{gathered}p^*(\rho)=-\frac{E}{4\pi(1-\nu^2)}\int_0^a\triangle f^*(\rho_1)H(\rho, \rho_1)\,d\rho_1\\ H(\rho, \rho_1)=\left\{\int_0^{2\pi}\frac{2\rho_1}{\pi\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_1\cos\theta_1+\rho_1^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}\sqrt{a^2-\rho_1^2}}{a\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_1\cos\theta_1+\rho_1^2}}\,d\theta_1\right\}d\rho_1\end{gathered} \tag{4.17}$$

При этом

$$\triangle=\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial\rho_1}+\frac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}\right)$$

Можно показать, что при том убывании $\psi(x, y, z)$ при приближении к бесконечности, которое имеет место в данном случае, функция

$$\int_{-\infty}^{z}\psi(x, y, \zeta)\,d\zeta$$

будет также гармонической. На основании этого находим величину перемещения поверхности упругого полупространства:

$$\begin{gathered}\varphi(x, y, 0)=\int_{-\infty}^{0}\psi(x, y, z)\,dz=\\ =-\frac{1}{2\pi}\iint_S\triangle f(\xi, \eta)\int_{-\infty}^{0}K(x, y, z, \xi, \eta)\,dz\,d\xi\,d\eta\end{gathered} \tag{4.18}$$

Подставляя вместо $K(x, y, z, \xi, \eta)$ выражение (3.11), установим, что ядро интеграла является функцией следующих величин:

$$\int_{-\infty}^{0}K(x, y, z, \xi, \eta)\,dz=G^*\left[\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{\xi^2+\eta^2}\right]$$

Если ввести теперь полярные координаты по формулам (4.16), то в нашем случае, когда $f(\xi, \eta)$ является функцией только ρ_1, будем иметь

$$\varphi(x, y, z) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \triangle f(\xi, \eta)\, G^*\left[\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},\ \sqrt{x^2+y^2},\ \sqrt{\xi^2+\eta^2}\right] d\xi\, d\eta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^a \left\{\int\limits_0^{2\pi} \triangle f(\rho_1)\, G^*\left[\sqrt{\rho_1^2-2\rho_1\rho\cos(\theta_1-\theta)+\rho^2},\ \rho_1,\ \rho\right] d\theta_1\right\} d\rho_1 \tag{4.19}$$

Если заменить θ через $\theta^* = \theta + \alpha$ и θ_1 через $\theta_1^* = \theta_1 + \alpha$ и взять пределы интегрирования $\alpha < \theta_1^* < 2\pi + \alpha$, что, очевидно, возможно, то, так как

$$d\theta = d\theta^*, \qquad d\theta_1 = d\theta_1^*, \qquad \theta - \theta_1 = \theta^* - \theta_1^*$$

значение интеграла (4.19) не будет зависеть от α.

Таким образом $\varphi(x, y, z)$, определенная по (4.19), не зависит от угла θ.

Согласно условию (4.4) имеем $\triangle\varphi = \triangle f^*(\rho)$; поэтому

$$\varphi = f(\rho) + \varphi^*, \qquad \text{причем} \quad \triangle\varphi^* = 0.$$

Но так как φ^*, на основании доказанного выше, может зависеть только от радиуса, то она будет постоянной величиной. Поэтому

$$w(x, y, 0) = \varphi(x, y, z) = f^*(\rho) + C$$

Так как согласно определению $\rho^*(0) = 0$, то C будет величина перемещения точки упругого полупространства в начале координат, или, что то же, перемещение штампа, на который действует сила такой величины, что радиус площадки контакта будет равен a.

Таким образом функция $\varphi(x, y, 0) = w(x, y, 0)$, определенная на основании $\psi(x, y, z)$, на круге S будет действительно совпадать с уравнением поверхности штампа $f(\rho)$.

Определим величину перемещения. Так как перемещение жесткого штампа повсюду одинаково, то найдем его в начале координат:

$$w(0, 0, 0) = \varphi(0, 0, 0) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \triangle f(\xi, \eta)\left\{\int\limits_{-\infty}^{0} K(0, 0, z, \xi, \eta)\, dz\right\} d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \triangle f(\xi, \eta)\, G^{**}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{4.20}$$

Здесь

$$G^{**}(\xi, \eta) = \int\limits_{-\infty}^{0} K(0, 0, z, \xi, \eta)\, dz$$

Если теперь ввести согласно (4.16) полярные координаты, то выражение (4.20) будет иметь следующий вид:

$$C = w(0, 0, 0) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \triangle f(\xi, \eta)\, G^{**}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a \triangle f(\rho_1)\, G(\rho_1)\, d\rho_1\, d\theta_1 = -\int\limits_0^a \triangle f(\rho_1)\, \rho_1 G(\rho_1)\, d\rho_1 \tag{4.21}$$

Это имеет место, так как выше было показано, что $G^{**}(\xi, \eta)$ зависит только от $\rho_1=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$. Определим функцию $G^{**}(\xi, \eta)$. Принимая в (3.11) $x=0$, $y=0$, получим

$$K(0, 0, z, \xi, \eta)=\frac{2}{\pi\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}\sqrt{a^2-z^2+\sqrt{(a^2-z^2)+4a^2z^2}}}{\sqrt{2}\,a\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2}}=$$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2}}$$

Отсюда

$$G^{**}(\xi, \eta)=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{2}{\pi\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2}}\,dz$$

или, введя $\xi^2+\eta^2=\rho_1^2$ и принимая во внимание четность подинтегрального выражения относительно z, будем иметь

$$G(\rho_1)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\rho_1^2+z^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-\rho_1^2}}{\sqrt{\rho_1^2+z^2}}\,dz \tag{4.22}$$

или иначе

$$G(\rho_1)=\frac{2}{\pi\sqrt{a^2-\rho_1^2}}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt{a^2-\rho_1^2}}{\sqrt{\rho_1^2-z^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-\rho_1^2}}{\sqrt{\rho_1^2+z^2}}\,dz \tag{4.23}$$

Имеем разложение, которое справедливо при $\tau^2<+\infty$

$$\operatorname{arc\,tg}\tau=\frac{\tau}{1+\tau^2}\sum_{k=0}\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\left(\frac{\tau^2}{1+\tau^2}\right)^k$$

или

$$\tau\operatorname{arc\,tg}\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}(k-1)!^2}{(2k-1)!}\left(\frac{\tau^2}{1+\tau^2}\right)^k \tag{4.24}$$

Если

$$\tau=\frac{\sqrt{a^2-\rho_1^2}}{\sqrt{\rho_1^2+z^2}}, \qquad \text{то} \qquad \frac{\tau^2}{1+\tau^2}=\frac{a^2-\rho_1^2}{a^2+z^2}$$

Следовательно, подинтегральное выражение в (4.23) будет таким:

$$\frac{\sqrt{a^2-\rho_1^2}}{\sqrt{\rho_1^2+z^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-\rho_1^2}}{\sqrt{\rho_1^2+z^2}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-2}(k-1)!}{(2k-1)!}\frac{(a^2-\rho_1^2)^k}{(a^2+z^2)^k}$$

Отсюда получим

$$G(\rho_1)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a-\rho_1^2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-2}(k-1)!^2}{(2k-1)!}(a^2-\rho_1^2)^k\int\limits_0^{\infty}\frac{dz}{(a^2+z^2)^k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}(k-1)!^2}{\pi(2k-1)!}\left(a^2-\rho_1^2\right)^{k-\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\infty}\frac{dz}{(a^2+z^2)^k} \tag{4.25}$$

Имеем следующее выражение:

$$\int\limits_0^\infty \frac{dz}{(a^2+z^2)^k} = \frac{\pi\,(2k-2)!}{2^{2k-1}\,(k-1)!^2}\,\frac{1}{a^{2k-1}} \tag{4.26}$$

Подставляя (4.26) в (4.25), найдем

$$G(\rho_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-\rho_1{}^2}}{a}\right)^{2k-1}$$

Полученный ряд легко суммируется. Окончательно найдем

$$G(\rho_1) = \operatorname{Ar\,th}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\rho_1}{a}\right)^2}\,\right] \tag{4.27}$$

Подставляя (4.27) в (4.21), будем иметь

$$C = w(0,0,0) = -\int\limits_0^a \triangle f(\rho_1)\,\rho_1\,\operatorname{Ar\,th}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\rho_1}{a}\right)^2}\,\right] d\rho_1 \tag{4.28}$$

Итак, получено следующее решение поставленной задачи.

Штамп, являющийся телом вращения, уравнение поверхности которого $z=f(\rho)$, *причем* $f(0)=0$, *прижимается к упругому полупространству силой* P, *действующей по оси вращения таким образом, что радиус площадки контакта будет равен* a. *Силы трения между штампом и упругим телом отсутствуют. Давление под штампом всюду ограничено. В таком случае сила, прижимающая штамп:*

$$P = \frac{2E}{(1-\nu^2)}\int\limits_0^a \triangle f(\rho_6)\,\rho_1\sqrt{a^2-\rho_1{}^2}\,d\rho_1 \tag{4.29}$$

Перемещение штампа

$$C = -\int\limits_0^a \triangle f(\rho_1)\,\rho_1\,\operatorname{Ar\,th}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\rho_1}{a}\right)^2}\,\right] d\rho_1 \tag{4.30}$$

Давление под штампом

$$p(\rho) = -\frac{E}{4\pi(1-\nu^2)}\int\limits_0^a \triangle f(\rho_1)\,H(\rho,\rho_1)\,d\rho_1 \tag{4.31}$$

где $H(\rho,\rho_1)$ *дается выражением* (4.17).

Наиболее общим случаем осесимметричного штампа, рассмотренным до сих пор, является параболоид с уравнением $z=A\rho^\lambda$ (работы А. И. Лурье [6]), И. Я. Штаермана [5, 18]). С помощью примененного здесь метода может быть установлено в конечном виде соотношение между силой и перемещением.

Пусть

$$f(\rho) = A\rho^\lambda \tag{4.32}$$

В таком случае

$$\triangle f(\rho) = \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\right) f(\rho) = A\lambda^2\rho^{\lambda-2} \tag{4.32a}$$

Вводя новую переменную $\rho = a\sin\tau$, получим следующее выражение для силы, действующей на штамп:

$$P = \frac{2E}{1-\nu^2}\int_0^a \triangle f(\rho_1)\,\rho_1\sqrt{a^2-\rho_1^2}\,d\rho_1 =$$

$$= \frac{2E}{1-\nu^2}\,Aa^{\lambda+1}\,\lambda^2\int_0^{\pi/2}(\sin^{\lambda-1}\tau-\sin^{\lambda+1}\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{2E}{1-\nu^2}\,Aa^{\lambda+1}\,\lambda^2\left[2^{\lambda-2}\frac{\Gamma(\lambda/2)^2}{\Gamma(\lambda)} - 2^{\lambda}\frac{\Gamma(\lambda/2)^2}{\Gamma(\lambda+2)}\right]$$

После некоторых преобразований находим окончательно

$$P = \frac{E}{1-\nu^2}\,Aa^{\lambda+1}\,2^{\lambda-1}\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\,\frac{\Gamma(\lambda/2)^2}{\Gamma(\lambda)} \tag{4.33}$$

Принимая во внимание (4.28) и (4.32а), получим выражение для перемещения в следующей форме:

$$C = -\int_0^a \triangle f(\rho_1)\,\rho_1\,\mathrm{Ar\,th}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\rho_1}{a}\right)^2}\right]d\rho_1 =$$

$$= -A\lambda^2 a^{\lambda}\int_0^{\pi/2}\sin^{\lambda-1}\tau\,\mathrm{Ar\,th}(\cos\tau)\cos\tau\,d\tau$$

Но

$$\mathrm{Ar\,th}(\cos\tau) = -\lg\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}$$

В таком случае, интегрируя по частям, находим

$$C = A\lambda^2 a^{\lambda}\int_0^{\pi/2}\lg\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\sin^{\lambda-1}\tau\cos\tau\,d\tau = -A\lambda^2 a^{\lambda}\,\frac{1}{\lambda}\,2^{\lambda-2}\frac{\Gamma(\lambda/2)^2}{\Gamma(\lambda)}$$

Окончательно получим

$$C = -Aa^{\lambda}\,2^{\lambda-2}\,\lambda\,\frac{\Gamma(\lambda/2)^2}{\Gamma(\lambda)} \tag{4.34}$$

На основании (4.33) и (4.34) можно установить зависимость между P и C

$$P = \left[\frac{E}{1-\nu^2}\,2^{\frac{2}{\lambda}}\,\frac{1}{\lambda+1}\,\lambda^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\,\Gamma(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}\,\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{2}{\lambda}}A^{\frac{1}{\lambda}}\right]|C|^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \tag{4.35}$$

Иначе эта зависимость может быть записана следующим образом

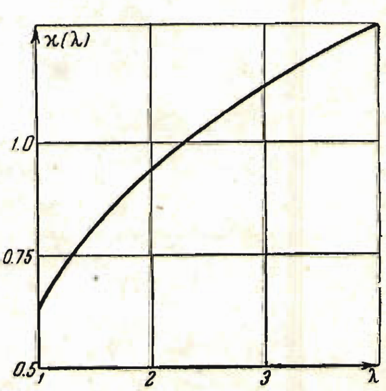
$$P = \frac{E}{1-\nu^2}\,\varkappa(\lambda)\,A^{\frac{1}{\lambda}}\,|C|^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}$$

При этом

$$\varkappa(\lambda) = 2^{\frac{2}{\lambda}}\,\frac{\lambda^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}{\lambda+1}\,\Gamma(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}\,\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{2}{\lambda}}$$

Приведем значения $\varkappa(\lambda)$ для нескольких значений λ:

$\lambda =$	1	2	3	4
$\varkappa =$	0.636	0.942	1.127	1.253



Фиг. 5.

На фиг. 5 зависимость $\varkappa(\lambda)$ от λ изображена графически.

В случае, рассмотренном Герцем [1], когда штамп представляет параболоид второй степени, будем иметь

$$f(\rho) = A\rho^2, \qquad \triangle f(\rho) = 4A$$

Тогда

$$P = -\frac{8E}{1-\nu^2} A \int_0^a \rho_1 \sqrt{a^2 - \rho_1^2}\, d\rho_1 = -\frac{8E}{3(1-\nu^2)} A a^3$$

$$C = -4A \int_0^a \operatorname{Ar\,th}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\rho_1}{a}\right)^2}\right] d\rho_1 = -2a^2 A$$

$$p(x, y) = -\int_0^a \frac{E}{2(1-\nu^2)} 4A \frac{1}{2\pi} \iint_S K(x, y, o, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

Подставляя значение интеграла (см. [14]), найдем

$$p(x, y) = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} 4A \frac{2}{\pi} \sqrt{a^2 + x^2 - y^2} = -\frac{4E}{\pi(1-\nu^2)} A \sqrt{a^2 - \rho^2}$$

Эти выражения совпадают с результатами, полученными Герцем.

В заключение рассмотрим случай, когда в упругое полупространство вдавливается штамп, форма которого приведена на фиг. 4. В этом случае радиус площадки контакта будет заданной величиной и давление на ее краях будет, вообще говоря, неограниченным. Рассмотрим задачу, когда задано перемещение штампа. В этом случае гармоническая функция $\varphi^*(x, y, z)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям при $z=0$:

$$\varphi^* = f(\rho) - C^* \quad \text{на} \quad S, \qquad \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = 0 \quad \text{вне} \quad S \tag{4.36}$$

где C^* — заданная величина, S — круг радиуса a.

Будем искать $\varphi^*(x, y, z)$ в виде суммы

$$\varphi^*(x, y, z) = \varphi_1^*(x, y, z) + \varphi_2^*(x, y, z)$$

Причем $\varphi_1^*(x, y, z)$, определенная по формуле (4.18), как это следует из (4.28), удовлетворяет условиям при $z=0$:

$$\varphi_1^* = f(\rho) - C \quad \text{на } S, \qquad \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial z} = 0 \quad \text{вне } S \tag{4.37}$$

Здесь

$$C = \int_0^a \triangle f(\rho_1)\, \rho_1 \operatorname{Ar\,th}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\rho_1}{a}\right)^2}\right] d\rho_1 \tag{4.38}$$

Функция φ_2^* должна удовлетворять условиям при $z=0$:

$$\varphi_2^* = C - C^* \quad \text{на } S, \qquad \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z} = 0 \quad \text{вне } S \tag{4.39}$$

В таком случае $\varphi^* = \varphi_1^* + \varphi_2^*$ удовлетворяет (4.36).

На основании (3.7) функция $\varphi_2^*(x, y, z)$ выражается следующим образом:

$$\varphi_2^* = (C - C^*) \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,ctg}\left(\frac{1}{a\sqrt{2}} \sqrt{\varphi^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{(\rho^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2}}\right)$$

Итак,

$$\varphi^*(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\iint_S \triangle f(\xi, \eta)\left\{\int_{-\infty}^{z} K(x, y, \zeta, \xi, \eta)\,d\zeta\right\} d\xi\, d\eta + \tag{4.40}$$

$$+(C - C^*)\,\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,ctg}\left(\frac{1}{a\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2-a^2+\sqrt{(x^2+y^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}}\right)$$

Определим давление на поверхности, принимая во внимание, что

$$\left(\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{2}{\pi}(C - C^*)\,\frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

Получим

$$p^*(\rho) = \frac{-E}{4\pi(1-\nu^2)}\left\{\int_0^a \triangle f(\rho_1)\,H(\rho, \rho_1)\,d\rho_1 + (C^* - C)\,\frac{4}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right\} \tag{4.41}$$

Здесь $H(\rho, \rho_1)$ определяется согласно (4.17), а C согласно (4.38).

§ 5. Влияние нагрузки, действующей вне штампа. Рассмотрим случай, когда на поверхности упругого полупространства в области Σ, лежащей вне круга S радиуса a, приложено нормальное давление.

В таком случае для определения гармонической функции будем иметь следующие условия при $z = 0$:

$$\varphi = f(x, y) \quad \text{на } S, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{2(1-\nu^2)}{E}\,q(x, y) \quad \text{на } \Sigma \tag{5.1}$$

Функция φ может быть представлена в виде двух слагаемых $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, причем для φ_1 имеем граничные условия при $z = 0$:

$$\varphi_1 = f(x, y) \quad \text{на } S, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \qquad \text{на } \Sigma \tag{5.2}$$

Функция φ_1, удовлетворяющая (5.2), определяется согласно (2.3) и (2.4). Для определения φ имеем граничные условия при $z = 0$:

$$\varphi_2 = 0 \quad \text{на } S, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{2(1-\nu^2)}{E}\,q(x, y) \quad \text{на } \Sigma \tag{5.3}$$

Таким образом получаем условия, аналогичные (3.6). Для нахождения φ_2 необходимо построить функцию Грина $K_1(x, y, z, \xi, \eta)$, равную нулю на диске S и ведущую себя как $1/r$ в окрестности точки с координатами $x = \xi$, $y = \eta$, $z = 0$ на плоскости Σ. Для того чтобы найти эту функцию, применим к $K(x, y, z, \xi, \eta)$ преобразование инверсии, при котором внутренность круга переходит в его внешность, и нормируем полученную функцию так, чтобы она имела особенность вида $1/r$. В результате получим

$$K_1(x, y, z, \xi, \eta) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{r}\,\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2-a^2}\,\sqrt{x^2+y^2+z^2-a^2+R_1}}{\sqrt{2ar}} \tag{5.4}$$

Здесь

$$R_1 = \sqrt{(a^2-x^2-y^2-z^2)^2+4a^2z^2}, \qquad r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2} \tag{5.5}$$

В таком случае на основании (3.2) и (3.6)

$$\varphi_2(x, y, z) = \frac{2(1-\nu^2)}{2\pi E}\iint_{\Sigma\ \Sigma} q(\xi, \eta)\,K_1(x, y, z, \xi, \eta)\,d\xi\, d\eta \tag{5.6}$$

Определим давление, возникающее под штампом в результате действия нормального давления на поверхности упругого полупространства вне штампа. Будем иметь на S

$$p(x, y) = (\sigma_z)_{z=0} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)_{z=0}$$

Отсюда

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Sigma} q(\xi, \eta) \left[\frac{\partial}{\partial z}\left[K_1(x, y, \xi, \eta)\right]\right]_{z=0} d\xi\, d\eta \tag{5.7}$$

В результате довольно длинных вычислений находим

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} K_1(x, y, z, \xi, \eta)\right]_{z=0} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \tag{5.8}$$

Таким образом на основании (5.7) и (5.8) получим следующее решение поставленной задачи.

Если на поверхности упругого полупространства вне штампа приложено давление $q(x, y)$, то под штампом возникает дополнительное давление

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\Sigma} q(\xi, \eta) \frac{1}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} d\xi\, d\eta \tag{5.9}$$

Здесь Σ — внешность круга S в плоскости $z = 0$. В случае, когда на штамп с плоским основанием действует сила P, направленная по оси симметрии, и сила Q, приложенная в точке с координатами $x = l$, $y = 0$ (фиг. 6), то давление

$$p(x, y) = -\frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + \frac{Q}{\pi^2 [(x-l)^2 + y^2]} \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \tag{5.10}$$

Это выражение получено для случая, когда штамп перемещается так, что его основание остается параллельным плоскости $z = 0$. Если фиксировать положение силы P, то результат будет несколько иным.

Фиг. 6.

На фиг. 7 приведены графики, изображающие величину дополнительных давлений, возникающих под штампом радиуса $a = 1$ в случае, когда в точке с координатами $y = 0$, $x = l = 1.5$ приложена сосредоточенная сила. При этом $p(0, y)$ означает давление, которое имеет место вдоль диаметра, где $x = 0$, а $p(x, 0)$ — давление вдоль диаметра, совпадающего с осью y.

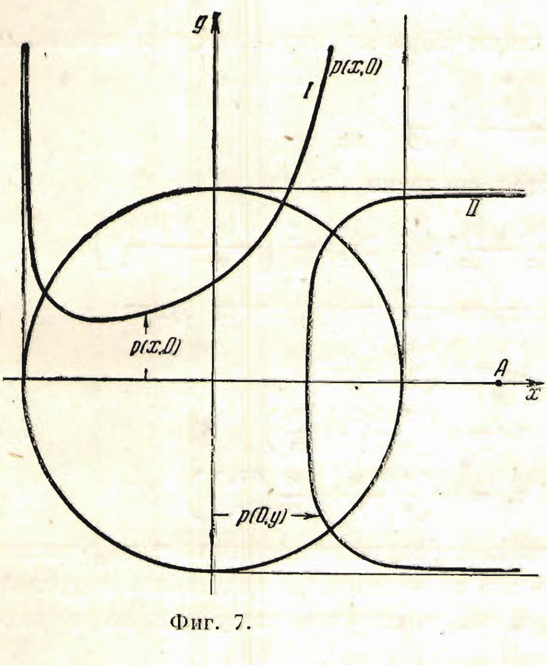
Дополнительное давление может быть выражено следующим образом:

$$p(x, y) = \frac{Q}{\pi^2} k(x, y), \qquad k(x, y) = \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{[(x-l)^2 + y^2] \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

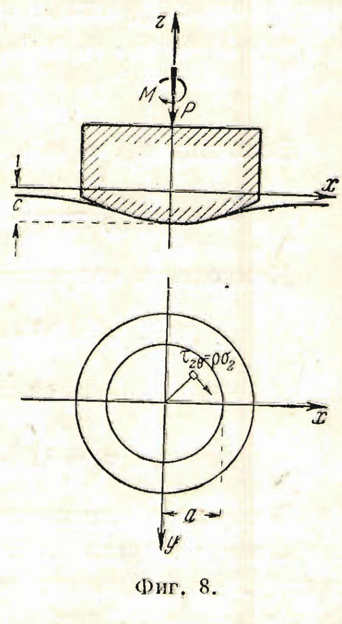
Приведем значения $k(x, y)$ в разных точках под штампом:

$(x=0, y)$	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$k(x, y)$	∞	0.646	0.536	0.508	0.500	0.498	0.500	0.508	0.536	0.646	∞
$(x, y=0)$	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$k(x, y)$	∞	0.354	0.318	0.339	0.396	0.498	0.676	1.011	1.729	3.810	∞

§ 6. Осесимметричные контактные задачи с силами трения. В этом разделе дается решение контактных задач теории упругости, когда в упругое полупространство вдавливается штамп, ограниченный поверхностью вращения, причем между штампом и упругим телом имеют место силы трения. Рассматриваемый вопрос представляет интерес для некоторых задач машиностроения, например для определения давления, возникающего между пятой и подпятником. До сих пор величина сил трения в этих случаях определялась лишь приближенными методами (см., например, [15]).



Фиг. 7.



Фиг. 8.

На штамп, находящийся на упругом полупространстве, действует сила P, направленная по оси вращения. Кроме того, он поворачивается вокруг этой оси моментом M. Угловая скорость вращения равна ω. Между штампом и упругим полупространством имеют место силы трения, направление которых совпадает с направлением вращения, т. е. является перпендикулярным к радиусу площадки контакта, имеющей в плане форму круга (фиг. 8).

Так как сила трения равна произведению нормального давления на коэффициент трения, то на площадке контакта имеет место граничное условие $\tau_{z\theta} = \mu\sigma_z$. Скорость движения различных точек штампа различна и в зависимости от угловой скорости и расстояния до оси вращения будет $v_0 = \omega\rho$.

Так как коэффициент трения между твердыми телами зависит, вообще говоря, от скорости движения, то будем полагать

$$\mu = F(v_0) = F(\rho\omega) \tag{6.1}$$

Для определения напряженного состояния имеем следующие граничные условия на площадке контакта при $z=0$:

на круге S радиуса a

$$u_z = f(\rho) + C, \qquad \tau_{z\theta} = F(\rho\omega)\,\sigma_z, \qquad \tau_{\rho z} = 0 \tag{6.2}$$

вне круга S, на свободной поверхности

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{z\theta} = 0, \quad \tau_{\rho z} = 0$$

Напряжение σ_z ограничено на контуре круга S. Напишем уравнения Ламе в цилиндрических координатах ρ, z и θ (см., например [16], [17]):

$$\begin{gathered}
(\lambda+2\mu)\frac{\partial\delta}{\partial\rho} - \frac{2\mu}{\rho}\frac{\partial\omega_z}{\partial\theta} + 2\mu\frac{\partial\omega_\theta}{\partial z} = 0\\
(\lambda+2\mu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial\delta}{\partial\theta} - 2\mu\frac{\partial\omega_\rho}{\partial z} + 2\mu\frac{\partial\omega_z}{\partial\rho} = 0\\
(\lambda+2\mu)\frac{\partial\delta}{\partial z} - 2\mu\frac{\partial(\rho\omega_\theta)}{\partial\rho} + \frac{2\mu}{\rho}\frac{\partial\omega_\rho}{\partial\theta} = 0
\end{gathered} \tag{6.3}$$

где объемное расширение δ следующим образом выражается на основании перемещений u_ρ, u_z и u_θ

$$\delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Величины ω_ρ, ω_θ и ω_z определяются согласно

$$2\omega_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \qquad 2\omega_\theta = \frac{\partial u_\rho}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial\rho}, \qquad 2\omega_z = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial\rho} - \frac{\partial u_\rho}{\partial\theta}\right]$$

Компоненты напряжения в цилиндрических координатах будут

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \lambda\delta + 2\mu\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}, & \tau_{\rho z} &= \mu\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial\rho}\right)\\
\sigma_z &= \lambda\delta + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}, & \tau_{z\theta} &= \mu\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\\
\sigma_\theta &= \lambda\delta + 2\mu\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}, & \tau_{\rho\theta} &= \mu\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\theta} + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{u_\theta}{\rho}\right)\right)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

В случае осесимметричной задачи компоненты напряжения и деформации не зависят от угла θ. Если принять это во внимание и подставить в уравнения (6.3) и (6.4) значения δ, ω_ρ, ω_z и ω_θ, то получим следующие выражения для уравнений Ламе:

$$\begin{gathered}
(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u_\rho}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right] = 0\\
\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial\rho}\right] = 0\\
(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] - \mu\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial u_\rho}{\partial z} - \rho\frac{\partial u_z}{\partial\rho}\right] = 0
\end{gathered} \tag{6.5}$$

Для компонент напряжений найдем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \lambda\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}, & \tau_{\rho z} &= \mu\left[\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial\rho}\right]\\
\sigma_z &= \mu\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}, & \tau_{z\theta} &= \mu\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\\
\sigma_\theta &= \lambda\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right], & \tau_{\rho\theta} &= \mu\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{u_\theta}{\rho}\right)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Можно убедиться, что в первое и третье из уравнений Ламе входят только u_z и u_ρ, а во второе только u_θ. Точно так же компоненты напряжения σ_ρ, σ_θ, σ_z и $\tau_{\rho z}$ зависят от u_ρ и u_z, а $\tau_{\rho\theta}$ и $\tau_{z\theta}$ зависят от u_θ.

Таким образом в осесимметричном случае в упругом теле существуют две независимые системы деформаций и напряжений.

Мы получим первую из них, если положим $u_\theta = 0$. При этом $u_\rho \neq 0$ и $u_z \neq 0$. В этом случае компоненты напряжения $\tau_{\rho\theta}$ и $\tau_{z\theta}$ будут равны нулю, а σ_z, σ_ρ, σ_θ и $\tau_{\rho z}$ отличны от нуля.

Вторая система будет получена, если $u_\rho = 0$, $u_z = 0$, $u_\theta \neq 0$. При этом компоненты напряжения σ_θ, σ_ρ, σ_z и $\tau_{\rho z}$ будут равны нулю, а $\tau_{\rho\theta}$ и $\tau_{z\theta}$ отличны от нуля.

Напряженное состояние в нашей задаче, когда в упругое полупространство вдавливается штамп в виде тела вращения, причем имеют место силы трения, обусловленные вращением штампа вокруг своей оси, может быть разбито на два независимых напряженных состояния.

Для определения первого из них имеем следующие граничные условия на площадке контакта при $z = 0$:

на круге S

$$u_z^* = f(\rho) + c, \qquad \tau_{\rho z}^* = 0, \qquad \tau_{z\theta}^* = 0 \tag{6.7}$$

вне круга S

$$\sigma_z^* = 0, \qquad \tau_{\rho z}^* = 0, \qquad \tau_{z\theta}^* = 0$$

Для определения второго напряженного состояния имеем условия при $z = 0$:

на круге S

$$u_\theta^{**} = 0, \qquad \tau_{\rho z}^{**} = 0, \qquad \tau_{z\theta}^{**} = F(\rho\omega)\,\sigma_z^* \tag{6.8}$$

вне круга S

$$\sigma_z^{**} = 0, \qquad \tau_{\rho z}^{**} = 0, \qquad \tau_{z\theta}^{**} = 0$$

Сумма этих двух напряженных состояний (т. е. напряжения $\sigma_z = \sigma_z^* + \sigma_z^{**}$, $\tau_{\rho z} = \tau_{\rho z}^* + \tau_{\rho z}^{**}$ и т. д.) будет удовлетворять исходным граничным условиям (6.2) и таким образом даст решение поставленной задачи. (Для определения напряженного состояния, удовлетворяющего условиям (6.8), нужно положить $u_\rho = 0$, $u_z = 0$, $u_\theta \neq 0$. При этом будет получено $u_z = 0$ и $\sigma_z = 0$ как на круге, так и вне круга S.)

Так как напряженные состояния, удовлетворяющие (6.7) и (6.8), находятся независимо друг от друга, то для определения компоненты напряжения $\tau_{z\theta}^{**}$ при $z = 0$, которая в данном случае представляет интерес, нужно определить σ_z^*, удовлетворяющую условиям (6.7), которые эквивалентны условиям (4.1), и умножить на функцию $F(\rho\omega)$.

Очевидно, $\tau_{z\theta}^{**} = \tau_{z\theta}$, так же как и $\sigma_z^* = \sigma_z$. Поэтому момент, необходимый для поворота штампа:

$$M = \int_0^a \rho_1 2\pi\rho_1 (\tau_{\rho_1\theta})_{z=0}\, d\rho_1 = \int_0^a 2\pi\rho_1^2 F(\rho_1\omega)\, p^*(\rho_1)\, d\rho_1 \tag{6.9}$$

Таким образом здесь решена следующая задача:

Штамп, представляющий собой тело вращения, уравнение поверхности которого $z = f(\rho)$, причем $f(0) = 0$, прижимается к упругому полупространству силой P, действующей по оси вращения таким образом, что радиус площадки контакта равен a. Между штампом и упругим полупространством имеют место силы трения, причем коэффициент трения равен $F(\omega\rho)$. Штамп также поворачивается вокруг оси симметрии моментом M.

В таком случае сила P определяется согласно (4.29), *перемещение C в направлении оси z согласно* (4.30), *нормальное давление под штампом $p^*(\rho)$ на основании* (4.31) *и* (4.17). *Момент, поворачивающий штамп,*

$$M = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^a F(\omega\rho)\,\rho^2 \left\{ \int_0^a \Delta f(\sigma_1)\, H(\rho, \rho_1)\, d\rho_1 \right\} d\rho \tag{6.10}$$

где $H(\rho, \rho_1)$ определяются из (4.17).

Определим величину момента, необходимого для поворота штампа при различных его формах. Будем полагать, что коэффициент трения μ — постоянная величина.

1. *Штамп с плоским основанием.* Площадка контакта — круг радиуса a. Распределение давления под штампом

$$p^*(\rho) = \frac{P}{2\pi a\sqrt{a^2-\rho^2}} \tag{6.11}$$

Здесь P — сила, действующая на штамп. Подставляя это выражение в (6.9), находим

$$M = \frac{P}{2\pi a}\int_0^a \frac{\mu 2\pi \rho_1^2}{\sqrt{a^2-\rho_1^2}}\, d\rho_1 = \mu P a \int_0^1 \frac{\xi^2\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{4}\,\mu P a \tag{6.12}$$

2. *Равномерное распределение давления под штампом.* Рассмотрим случай, когда штамп имеет такую форму, что на площадке контакта, радиус которой равен a, возникает равномерно распределенное давление. Если сила, действующая на штамп, равна P, то $p^*(\rho) = P / \pi a^2$.

В таком случае на основании (6.9) момент

$$M = 2\pi\mu \int_0^a p^*(\rho_1)\,\rho_1^2\, d\rho_1 = \frac{\mu P}{\pi a^2}\int_0^a \rho_1^2\, d\rho_1 = \frac{2}{3}\,\mu P a \tag{6.13}$$

3. *Штамп в виде параболоида второй степени.* Пусть на штамп действует сила P такая, что площадка контакта имеет радиус a. Он следующим образом зависит от величины силы:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\,\frac{1-\nu^2}{E}\,PR}$$

Здесь E и ν - упругие постоянные, R — радиус кривизны параболы, вращением которой получен параболоид, на ее оси симметрии, или, что то же, радиус сферы, которая приближенно заменяется параболоидом.

Распределение давления под штампом

$$p^*(\rho) = \frac{3P}{2\pi a^2}\sqrt{a^2-\rho^2}$$

Воспользовавшись (6.9), получим следующие выражения для момента:

$$M = \frac{3\mu P}{a^3}\int_0^a \rho_1^2 \sqrt{a^2-\rho_1^2}\, d\rho_1 = 3\mu Pa \int_0^1 \xi^2 \sqrt{1-\xi^2}\, d\xi = \frac{3\pi}{16}\mu Pa \qquad (6.14)$$

Таким образом величина момента, необходимого для поворота штампа при наличии сил трения, в значительной степени зависит от его формы.

Поступила в редакцию
28 XII 1945

Институт механики
Академии Наук СССР

L. A. GALIN. SPATIAL CONTACT PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR PUNCHES OF CIRCULAR SHAPE IN PLANE

A rigid body is brought into contact with an elastic semi-space. The surface of contact is of circular contour. The investigation is an attempt to establish the distribution of pressures over the contact surface and the relationship between the load and the displacement of the rigid body (punch).

Part 1 of the work shows that in the absence of friction, the pressure may be determined by finding one harmonic function $\varphi(x, y, z)$ vanishing at infinity, from boundary conditions (1.3). The value $\varphi(x, y, z)$ for $z=0$ coincides with the magnitude of displacement of the surface of the elastic semi-space.

Part 2 presents a solution of the problem of indentation of a punch whose contact surface is an arbitrary function of two coordinates (fig. 1). Here the boundary conditions (1.3) are satisfied by means of expression (2.2) given by Hobson. The formula for the load acting on the punch is given by (2.8)

Part 3 gives formula (3.11) for Green's function $K(x, y, z, \xi, \eta)$ equal to zero beyond the limits of the disc for $z=0$ and having the order r^{-1} in the vicinity of any point on the disc. A harmonic function satisfying the boundary conditions (3.6) may be constructed by means of $K(x, y, z, \xi, \eta)$.

Part 4 takes up the indentation of a punch which is a body of revolution (fig. 3). The punch is assumed to be without angular points, pressure is limited to the surface of contact, and there is no friction. Here the function $\psi(x, y, z) = \partial\varphi/\partial z$ is introduced, determined by boundary conditions (4.9) analogous to (3.6). A comparison of (4.8) and (4.11) yields the value (4.13) for the load acting on the punch. The magnitude of this load is such that the radius of the contour of the surface contact is equal to a. Displacement of the punch in the direction of the z-axis is determined by means of (4.18), (4.20), (4.21), (4.22) and (4.27). Distribution of pressure over the contact surface is given by (4.17).

In the particular case when the punch has the form of a paraboloid $z = A\rho^\lambda$, the magnitudes (4.33) for the load P and (4.34) for displacement C are derived. The relationship between them is given by the expression (4.35). If the punch is ribbed on the edge of the surface of contact (fig. 4), the pressure is given by the expressions (4.17) and (4.38).

Part 5 discusses the case when a normal pressure acts on the surface of the elastic semi-space beyond the limits of the punch. The additional normal pressure arising under the punch is determined by means of (5.6) and (5.7); the corresponding harmonic function $\varphi_2(x, y, z)$ for determination of this pressure being derived by means of boundary condition (5.3). In accordance with (3.2) and (3.6) Green's function $K_1(x, y, z, \xi, \eta)$ is set up for determination of function $\varphi_2(x, y, z)$.

Green's function is equal to zero within the circle S of radius a for $z=0$ and is of the order r^{-1} in the vicinity of any point in the plane Σ beyond the limits of circle S. The value of Green's function is given by expressions (5.4.) and (5.5).

Part 6 deals with contact problems in the presence of friction. Here a punch assumed to be a body of revolution is subjected to the action of a load along the axis of symmetry. Moreover, the punch is assumed to turn under the action of a torque. The forces of friction are normal to the radii and consequently have axial symmetry as well (fig. 6). The boundary conditions of the problem have the form (6.2). Expression (6.5) yields the Lamé equations, in cylindrical coordinates, for a stressed state independent of the polar angle θ. Experession (6.6) gives the values of stress components. These equations show that the stressed state in this problem may be considered as two independent stressed states. The first of them is determined by $u_\theta = 0$, $u_\rho \neq 0$, $u_z \neq 0$, $\sigma_\theta \neq 0$, $\sigma_\rho \neq 0$, $\tau_{\rho\theta} = 0$, $\tau_{z\theta} = 0$, $\tau_{\rho z} \neq 0$, the second by $u_\theta \neq 0$, $u_\rho = 0$, $u_z = 0$, $\sigma_\theta = 0$, $\sigma_\rho = 0$, $\tau_{\rho\theta} \neq 0$, $\tau_{z\theta} \neq 0$, $\tau_{\rho z} = 0$. Each may be determined independently. Hence, in the problem, $\tau_{z\theta} = F(\rho\omega)\ \sigma_z$ is true when $z=0$. The function $F(\rho\omega)$ is the coefficient of friction. The component σ_z is determined under the assumption of the absence of friction. The distribution of pressures, the load acting on the punch and the displacement of the punch are determined by means of (4.29), (4.30), (4.31) and (4.17) as in the case of a punch without friction. Expression (6.10) is derived for the torque. If the coefficient of friction μ is a constant, that is, is independent of the velocity, and if the load P acts on the punch and the radius of the contour of the contact surface is equal to a, the magnitude of the moment required to turn a plane punch is determined by formula (6.12). Conditions being the same, if the punch is of a form giving rise to uniformly distributed pressure on contact, the magnitude of the torque is determined by formula (6.13); if the form of the punch is spherical, the torque is determined by formula (6.14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hertz H. Gesammelte Werke. 1895. Bd I.
2. Boussinesq J. Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et de mouvement des solides élastiques. 1885.
3. Love A. E. The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford Series. 1939. 10. № 39.
4. Леонов М. Я. Прикладная математика и механика. 1939. Т. 3. Вып. 2.
5. Штаерман И. Я. ДАН. XXV. 1939.
6. Лурье А. И. Прикладная математика и механика. Т. 5. Вып. 3. 1941.
7. Harding J. W. and Sneddon J. N. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 1945. Vol. 41.
8. Абрамов В. М. ДАН. XXIII. 1939.
9. Треффц Э. Математическая теория упругости. 1932.
10. Hobson. E. W. Transactions of the Cambridge Mathematical Society. Vol. 18. 1900.
11. Heine E. Handbuch der Kugelfuctionen. Bd. II. 1881.
12. Кочин Н. Е. Прикладная математика и механика. 1940, Том 4. Вып. 1.
13. Sommerfeld A. Proceedings of the London Mathematical Society. 1897.
14. Кочин Н. Е. Прикладная математика и механика. 1945. Т. 9. Вып. 1.
15. Ретшер Ф. Детали машин. 1933. Том II.
16. Ляв А. Математическая теория упругости. 1935.
17. Reissner. E. Ingenieur Archiv. 1937. Bd. VIII. Heft 4.
18. Штаерман И. Я. ДАН. XXXVIII. 1943.