Институт механики Академии Наук Союза ССР
**Прикладная математика и механика. Том X, 1946**

ЗАМЕТКИ

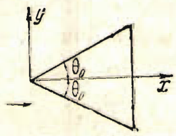
# К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ КЛИНА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ[1]

**Ф. И. Франкль**

(Москва)

При обтекании клина сверхзвуковым потоком, как известно, приходится различать три режима. В первом при скоростях потока, лишь немного превосходящих скорость звука, головная волна не касается острия клина и между этой волной и клином образуется область местных дозвуковых скоростей. Второму режиму соответствует диапазон скоростей, при котором головная волна исходит из острия клина, а скорость между головной волной и клином остается дозвуковой. В третьем скорость потока между клином и головной волной постоянна и больше скорости звука.

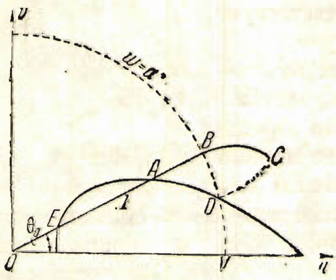
Пусть $\theta_0$ — угол между стороной клина и направлением потока (фиг. 1). Тогда проводят через начало координат в плоскости годографа (фиг. 2) прямую $l$, составляющую с осью $u$ угол $\theta_0$. Там же наносят петлю гипоциссоиды Буземана, соответствующую данной скорости набегающего потока.




Фиг. 1.

Если прямая $l$ не пересекается с петлей гипоциссоиды, то мы находимся в первом диапазоне. Если обе точки пересечения соответствуют дозвуковой скорости, то находимся во втором диапазоне. Наконец, если одна из точек пересечения соответствует сверхзвуковой скорости, то мы находимся в третьем диапазоне.

Для второго и третьего режимов конец вектора скорости за скачком непосредственно у вершины клина находится как точка пересечения прямой $l$ с петлей гипоциссоиды. Из опыта известно, что из двух точек пересечения нужно взять более удаленную от начала координат. Удовлетворительного объяснения причины этого до сих пор в литературе не имеется.




Фиг. 2.

Объяснение можно получить, применяя методы, указанные в моей работе [1], в которой исследуется первый из приведенных выше режимов. В этой заметке мы покажем, что и во втором диапазоне скоростей задача обтекания клина может быть сведена к краевой задаче в заданной области плоскости годографа, причем докажем также теорему единственности.

Будем рассуждать, пользуясь фиг. 2. Прямая $l$ пересекается с петлей гипоциссоиды Буземана в точках $E$ и $A$. С окружностью критических скоростей прямая $l$ пересекается в точке $B$. Точку пересечения гипоциссоиды с окружностью критических скоростей обозначим через $D$. Дуги $BC$ и $DC$ принадлежат к характеристикам — эпициклоидам Прандтля-Буземана.

Задача обтекания клина при достаточно глубоком донном вакууме сводится теперь к некоторой краевой задаче в области $ABCD$, а именно к следующей (фиг. 3):

на прямом отрезке $AB$ и на дуге эпициклоиды $BC$ имеем

$$\psi = 0 \tag{1}$$

[1] Изложенные здесь результаты были в основном получены мною в 1943 г. и тогда же впервые доложены в Томском университете.

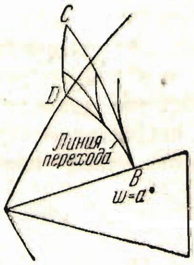
на дуге строфоиды $AD$ имеет место соотношение

$$K\frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\sigma-\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}d\theta=\frac{\rho_0}{\rho_1}\operatorname{ctg}\lambda d\psi \tag{2}$$

внутри области выполняется уравнение Чаплыгина

$$K\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}=0 \tag{3}$$

В этих формулах $\psi$ — функция тока, $\theta$ — угол наклона скорости, $\lambda$ — угол наклона скачка, $\rho_1$ — плотность невозмущенного потока, $\rho_0$ — плотность адиабатически заторможенного газа, а $K$ и $\sigma$ — функции скорости, данные Чаплыгиным в его работе «О газовых струях»:




Фиг. 3.

$$K=\frac{1-(2\beta+1)\tau}{(1-\tau)^{2\beta+1}},\qquad \sigma=\int\limits_{\tau}^{\tau^*}\frac{(1-\tau)^{\beta}\,d\tau}{2\tau} \tag{4}$$

где

$$\tau=\frac{V^2}{V_m{}^2},\qquad \tau^*=\frac{1}{2\beta+1},\qquad \beta=\frac{1}{\varkappa-1}$$

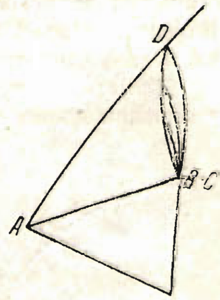
Здесь $V$ — скорость потока, $V_m$ — максимальная скорость (при истечении в вакуум), $\varkappa=c_p/c_v$ соотношение теплоемкостей при постоянных давлении и объеме.

Вывод краевого условия (2) дан в нашей работе[2]. Там же показано, что при выполнении условий (1) и (2) действительно получается обтекание клина. При этом, точно так же как и при выводе уравнения (3), мы должны пренебречь переменностью энтропии за скачком.

Доказательство единственности решения приведенной краевой задачи в плоскости годографа точно то же, как доказательство, данное для «первого режима» в нашей работе (2).

Выясним теперь, является ли поставленная нами краевая задача в плоскости годографа единственной задачей, которая соответствует обтеканию клина при достаточно глубоком донном вакууме.

Что скачку уплотнения соответствует дуга гипоциссоиды Буземана, в поверхности клина — часть прямой $l$, само собой разумеется.




Фиг. 4

Далее, можно наглядными соображениями показать, что переход от дозвуковой скорости к сверхзвуковой должен произойти именно у основания клина. В самом деле, в противном случае взаимное расположение линии перехода $w=a^*$ и линий Маха было бы такое же, как в симметричном (относительно оси) сопле Лаваля (см. мою работу[3]), причем точка $B$ на клине, где скорость потока равна критической, соответствовала бы центру сопла. Но тогда скачок уплотнения проходил бы через треугольник $BCD$, где $BD$ — линия критических скоростей, $BC$ и $DC$ — линия Маха, что невозможно, так как в плоскости годографа гипоциссоида Буземана лежит полностью вне треугольника $BCD$. Это соображение относится в одинаковой мере к первому и второму режимам.

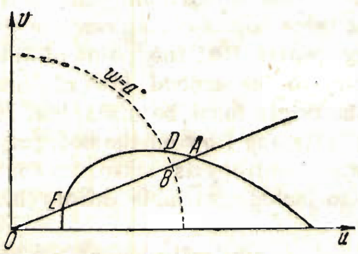
Итак, точка $B$ (фиг.2) должна соответствовать точке на основании клина, которую мы также обозначим через $B$. Если теперь донное давление не выше того, которое соответствует точке $C$ плоскости годографа, то вблизи точки $B$ основания клина должно образоваться течение Прандтля-Мейера, так что этой точке соответствует вся дуга эпициклоиды $BC$ (фиг. 4).

Остается показать, что в случае второго режима скорость за скачком у острия клина соответствует точке $A$, но не точке $E$ плоскости годографа. Заметим для этой цели, что при переходе из плоскости потока в плоскость годографа область $ABD$ дозвуковых скоростей (фиг. 4) должна локально топологически отображаться на соответствующую область плоскости годографа, так как якобиан этого отображения имеет постоянный отрицательный знак. Но тогда границе дозвуковой области не может соответствовать кривая, состоящая из дуги гипоциссоиды $ED$, прямого отрезка $EB$ и дуги окружности $BD$, так как эта кривая имеет одну точку самопересечения (точку $A$), образуя «восьмерку», что невозможно. Таким образом наше утверждение доказано.

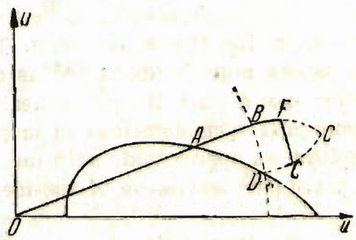
Если теперь увеличивать скорость набегающего потока, то область $ABCD$ будет уменьшаться и, наконец, сведется к точке. При дальнейшем росте скорости набегающего потока, когда скорость за скачком уже сверхзвуковая, она остается точкой.

Можно легко показать, что в случае третьего режима за скачком не может возникнуть дозвуковая скорость.

В самом деле, в противном случае дозвуковой области за скачком соответствовала бы в плоскости годографа область $EDB$, указанная на фиг. 5. Но тогда отображение



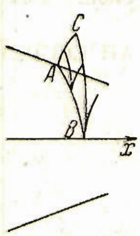

Фиг. 5.



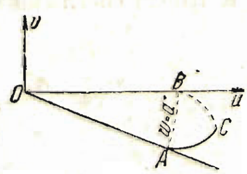

Фиг. 6.

дозвуковой области за скачком на плоскость годографа сохраняло бы ориентировку контурных элементов, т. е. имело бы положительный якобиан, что невозможно.

Укажем еще постановку задачи обтекания клина для второго диапазона скоростей в случае, когда донное давление выше того, которое соответствует точке $C$ (фиг. 2).




Фиг. 7.




Фиг. 8.

В этом случае краевая задача ставится в области $ABFGD$ плоскости годографа (фиг. 6), причем $FG$ является дугой окружности с центром в начале координат. Краевое условие на кривой $ABFG$ будет $\psi=0$; на дуге $AD$ сохраняется уравнение (2). Аналогично задача ставится в случае первого режима, как мы уже показали в нашей работе[2]. Теорема единственности для этой последней задачи еще не доказана.

Остановимся, наконец, дополнительно еще на вопросе о единственности решения задачи истечения сверхзвуковой струи из сосуда с симметрично расположенными плоскими стенками (при достаточно глубоком вакууме вне сосуда). В своей работе[2] я доказал эту единственность в предположении, что переход от дозвуковой скорости к сверзвуковой имеет место у края отверстия.

Покажем здесь, что так оно и должно быть. Доказательство ведем от противного. В самом деле, заметим, что мы имеем здесь дело с частным случаем симметричного сопла Лаваля. Следовательно, линия перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым и линии Маха были бы взаимно расположены так, как показано на фиг. 7. Но тогда стенка проходила бы через треугольник $ABC$, где $AB$ – линия перехода, $AC$ и $BC$ – линия Маха. Но это невозможно; ведь в плоскости годографа треугольник $ABC$ (фиг. 7) соответствует треугольнику $ABC$ (фиг. 8), а стенке соответствует прямая $OA$, которая лежит полностью вне треугольника $ABC$.

Поступила в редакцию
11 II 1946

## F. I. FRANKL. UNIQUENESS OF SOLUTION OF THE PROBLEM OF SUPERSONIC FLOW PAST A WEDGE

The paper deals with velocities behind the head wave in the vicinity of the vertex, of a wedge, in a supersonic gas flow, when the head wave touches the wedge. The end point of the velocity vector may be determined by the intersection of a straight line passing through the origin of coordinates in the hodograph plane and a Busemann hypocissoid. Experiment has shown that of the three points of intersection the middle point must be taken for the above case. Theory proves that the point of intersection on the infinite branch must be discarded as contrary to the second law of thermodynamics. The author shows that the point nearest the origin must be discarded, in accordance with topological considerations in mapping the plane flow on the hodograph plane. The author employs an approximate solution, in which entropy is taken as constant behind the head wave (the extension of the method to include variable entropy has not yet been evolved).

The author shows, in addition, that in cases of subsonic velocity behind the head wave, there will be critical velocity at the base of the wedge. This leads to the appearance of Prandtl-Meyer flows in the vicinity of the base. Similar phenomena are observed in the case of the expulsion of a supersonic gas jet from a vessel with plane walls.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин А. С. О газовых струях. Собр. соч. Изд. АН. Л. 1933. Т. II.
2. Франкль Ф. И. О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до и сверхзвуковых течений. Известия АН СССР. Сер. мат. 9. 1945.
3. Франкль Ф. И. К теории сопел Лаваля. Известия АН СССР. Сер. мат. 9. 194