Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946

РАЗЛОЖЕНИЕ ОБРАТНОГО РАССТОЯНИЯ В ТЕОРИИ ПРИТЯЖЕНИЯ

Г. Н. Дубошин

(Москва)

В различных приложениях теории потенциала часто возникает необходимость представления силовой функции притягивающего тела бесконечным рядом того или иного вида. Аналитическая структура подобного ряда зависит, разумеется, от характера рассматриваемой задачи, но также от метода исследования, его цели и, наконец, от выбора переменных, определяющих положение притягиваемой частицы или тела. Поэтому такие ряды могут быть чрезвычайно разнообразными по своей форме и свойствам, но всегда должны удовлетворять некоторым очевидным общим условиям, а именно: 1) должны быть абсолютно сходящимися и дифференцируемыми для всякого положения притягиваемой частицы в некоторой, вполне определенной области пространства; 2) должны позволять производить достаточно быстро и с надлежащей точностью необходимые вычисления; 3) должны быть таковы, чтобы было возможно написать сразу любой желаемый член в конечном виде, и, наконец, 4) должны позволять оценить погрешность, возникающую при замене точной суммы суммой какого-либо конечного числа членов. Эти необходимые условия, к сожалению, не всегда выполняются, что затрудняет эффективное использование подобных рядов в задачах прикладного характера и иногда лишает доверия получаемые с их помощью результаты.

В настоящей работе предлагается некоторая новая форма разложения обратного расстояния между двумя точками в бесконечный ряд достаточно простой структуры и удовлетворяющий тем общим условиям, которые были указаны выше. Эта новая форма разложения обусловливается в значительной степени применением цилиндрических координат для притягиваемой точки вместо прямоугольных или полярных и имеет по сравнению с классическими формами то преимущество, что координаты притягивающей точки входят только в коэффициенты ряда для обратного расстояния, которое рассматривается таким образом как функция цилиндрических координат притягиваемой точки. Кроме того, при таком способе разложения коэффициенты ряда оказываются весьма простыми функциями координат другой, притягивающей, точки, для которых получаются общие выражения в виде полиномов с числовыми коэффициентами, весьма просто вычисляемыми чисто арифметическим путем. Наконец, указываются области пространства, в которых подобные ряды сходятся абсолютно и могут быть применимыми для приложений к различным задачам.

Пусть в некоторой системе координат x, y, z будут координаты притягиваемой точки и X, Y, Z — притягивающей. Задача заключается в разложении функции Δ^{-1}, где Δ — взаимное расстояние между обеими точками, определяемое формулой

$$\Delta^2 = (x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2$$

Рассматривая Δ преимущественно как функцию x, y, z, введем вместо прямоугольных цилиндрические координаты ρ, v, z, полагая $x=\rho\cos v$, $y=\rho\sin v$, и напишем предыдущую формулу в следующем виде:

$$\Delta^2 = z^2 - 2zZ + \Delta_0^2$$

где положено

$$\Delta_0^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R\gamma, \qquad R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}, \qquad \gamma = \frac{X}{R}\cos v + \frac{Y}{R}\sin v$$

Очевидно, что R — радиус-вектор притягивающей точки, γ — косинус угла между ρ и R, а Δ_0 — расстояние между притягивающей точкой и проекцией, притягиваемой на плоскость xy, которая играет в нашей работе роль основной координатной плоскости.

При любых положениях притягиваемой и притягивающей точек мы будем иметь $|\gamma| \leqslant 1$, $|Z| \leqslant \Delta_0$.

Положив $h = Z/\Delta_0$, $\bar{z} = z/\Delta_0$, будем иметь

$$\frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-2h\bar{z}+\bar{z}^2}} \tag{1}$$

Это выражение можно представить в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням $\bar{z}$:

$$\frac{\Delta_0}{\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(h)\bar{z}^n \tag{2}$$

где $P_n(h)$ — n-й полином Лежандра, определяемый формулой

$$P_n(h) = \sum_{r=0}^{m} A_{nr} h^{n-2r} \qquad \left(A_{nr} = (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n \cdot r!(n-r)!(n-2r)!}\right) \tag{3}$$

в которой m — наибольшее целое число, заключающееся в $n/2$, и A_{nr} — числовые коэффициенты.

Так как $|h| \leqslant 1$, то ряд (2) сходится абсолютно при $|\bar{z}| < 1$. Теперь находим искомое разложение обратного расстояния по целым положительным степеням z в следующем виде:

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n z^n, \qquad \text{где} \quad Z_n = \frac{P_n(h)}{\Delta_0^{n+1}} \tag{4}$$

Очевидно, что ряд (4) будет абсолютно сходящимся при всяком положении притягиваемой точки в области, определяемой условием $|z| < \Delta_0$. Поэтому равенство $|z| = \Delta_0$ или

$$z^2 = (x-X)^2 + (y-Y)^2 + Z^2 \tag{5}$$

в котором x, y, z рассматриваются как текущие координаты, а X, Y, Z как параметры, будет уравнением поверхности, ограничивающей область сходимости ряда (4). Из уравнения (5) видно, что пограничная поверхность есть двуполостный гиперболоид вращения вокруг оси, проходящей через притягивающую точку перпендикулярно основной плоскости xy. Центр этой поверхности лежит всегда в плоскости xy, а одна из вершин находится в притягивающей точке. Сечение поверхности любой плоскостью, проходящей через ось вращения, есть равносторонняя гипербола, действительная и мнимая полуоси которой равны $|Z|$. Если притягивающая точка лежит в плоскости xy, то уравнение (5) получает вид

$$z^2 = (x-X)^2 + (y-Y)^2 \tag{6}$$

и есть уравнение круглого конуса с вершиной в точке (X, Y, O). Очевидно, что конус (6) есть асимптотический конус гиперболоида (5), каково бы ни было Z. Легко усмотреть, что областью сходимости ряда (4) является та часть пространства, которая заключена между полостями гиперболоида или вне конуса (6). В областях, лежащих внутри каждой полости гиперболоида, заведомо $|z| > \Delta_0$, а потому в этих областях разложение (4) не применимо. Но не представляет труда написать для этих внутренних областей разложение обратного расстояния по отрицательным степеням z.

Действительно, полагая $h = Z/\Delta_0$, $z' = \Delta_0/z$, имеем

$$\frac{|z|}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1-2hz'+z'^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(h)\, z'^n$$

откуда получается разложение

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n' \frac{1}{z^{n+1}}, \qquad \text{где} \quad Z_n' = P_n(h)\, \Delta_0{}^n \tag{7}$$

Ряд (7) сходится абсолютно при любом положении притягиваемой точки внутри гиперболоида (5) или конуса (6). Но для приложений, нас интересующих, главную роль играет первый случай, т. е. когда $|z| < \Delta_0$, а поэтому будем рассматривать в этой работе преимущественно разложение обратного расстояния по положительным степеням z.

Область применимости ряда (4) [а также и ряда (7)] зависит от положения притягивающей точки, т. е. от параметров X, Y, Z, а потому эта область изменяется при изменении этих параметров, т. е. при перемещении точки $(X\ Y, Z)$. Это изменение области обусловливается только изменением расстояния между двумя вершинами пограничного гиперболоида и параллельным перемещением его в пространстве. Областью безусловной применимости, т. е. областью, не зависящей от положения притягивающей точки, если последняя перемещается, будет, очевидно, общая часть всех областей, соответствующих различным положениям притягивающей точки в пространстве. Эту область безусловной применимости нетрудно построить, если известны все положения притягивающей точки или даже только область пространства, внутри которой перемещается или может перемещаться притягивающая точка.

Например, пусть известно, что притягивающая точка есть какая-то точка окружности, лежащей в плоскости xy, с центром в начале координат. Вообразим два круглых конуса с углами раствора по 90°, вершины которых лежат на оси z на расстояниях от начала, равных радиусу окружности. Тогда область сходимости ряда (4) состоит из двух областей, одна из которых есть общая внешняя для обоих конусов, а другая — общая внутренняя, заключенная между вершинами.

Область сходимости ряда (7) также состоит из двух областей, каждая из которых есть общая внутренняя для обоих конусов, расположенная с одной стороны обеих вершин. Те же части пространства, которые являются внешними для одного конуса, а для другого внутренними, должны быть исключены из рассмотрения, так как в этом случае нужно точно знать положение притягивающей точки.

Заметим еще, что область безусловной применимости ряда (4) можно определить иногда более простыми неравенствами. Действительно, мы видели, что ряд (4) сходится абсолютно при условии $|z| < \Delta_0$; так как, с другой стороны, мы имеем всегда $|R-\rho| \leqslant \Delta_0$, то ряд (4) заведомо будет сходящимся абсолютно при $|z| < |R-\rho|$.

Пусть известно теперь, что притягиваемая и притягивающая точки движутся таким образом, что мы имеем всегда $\rho < R$. Тогда, если мы обозначим через $R_{\min}$ положительное число, меньшее всех значений, которые может принимать R при движении притягивающей точки, то ряд (4) заведомо будет абсолютно сходящимся, если

$$|z| < R_{\min} - \rho$$

Наоборот, если известно, что всегда $R < \rho$, то ряд (4) будет заведомо абсолютно сходящимся, если

$$|z| < \rho - R_{\max}$$

где $R_{\max}$ — положительное число, большее всех значений, которые может принимать R при движении притягивающей точки.

Перейдем теперь к рассмотрению коэффициентов Z_n ряда (4). Подставляя в формулу (4) вместо $P_n(h)$ его выражение (3) и полагая

$$\zeta = \frac{Z}{R}, \qquad H_{nr} = A_{nr} \zeta^{n-2r}$$

получим для Z_n следующее выражение:

$$Z_n = \sum_{r=0}^{m} H_{nr} \frac{R^{n-2r}}{\Delta_0^{2n-2r+1}}, \qquad \text{где} \quad m = E\left(\frac{n}{2}\right) \tag{8}$$

Последнее выражение значительно упрощается, если притягивающая точка находится в плоскости xy. Действительно, в этом случае $Z=0$, а следовательно, и $h=0$ и мы имеем из формулы (4)

$$Z_n = \frac{P_n(0)}{\Delta_0^{n+1}}$$

Но, как известно,

$$P_{2n+1}(0) = 0, \qquad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

поэтому

$$Z_{2n+1} = 0, \qquad Z_{2n} = \frac{P_{2n}(0)}{\Delta_0^{2n+1}}$$

и разложение обратного расстояния напишется в этом случае следующим образом:

$$\frac{1}{\Delta}=\sum_{n=0}^{\infty} Z_{2n} z^{2n} \tag{9}$$

Перейдем к разложению величин Z_n. Чтобы получить эти разложения, нужно получить предварительно разложения функций $\Delta_0^{-2\alpha-1}$, где α — целое положительное число, причем $\alpha=n-r\ (r=0, 1, 2, \ldots, m)$ в случае $\zeta\neq 0$ и $\alpha=n$ для случая $\zeta=0$. Эти разложения будут располагаться по целым положительным степеням отношения ρ/R, если $\rho<R$, и по целым положительным степеням отношения R/ρ, если $\rho>R$. Действительно, если $\rho<R$, то, полагая $\sigma=\rho/R$, можем написать

$$\left(\frac{R}{\Delta_0}\right)^{2\alpha+1}=(1-2\gamma\sigma+\sigma^2)^{-\alpha-\frac{1}{2}}=G^{\alpha}(\sigma) \qquad (\alpha \text{ — индекс})$$

Если же $\rho>R$, то, полагая $\sigma=R/\rho$, имеем

$$\left(\frac{\rho}{\Delta_0}\right)^{2\alpha+1}=(1-2\gamma\sigma+\sigma^2)^{-\alpha-\frac{1}{2}}=G^{\alpha}(\sigma)$$

Таким образом, в обоих случаях разложению подлежит одна и та же функция $G^{\alpha}(\sigma)$, определенная в промежутке $0\leqslant\sigma<1$, а величина γ рассматривается как параметр, причем $|\gamma|\leqslant 1$. Это разложение можно найти в главе 15 2-й части книги «Курс современного анализа» Уиттекера и Ватсона, вследствие чего можем написать сразу для функции $G^{\alpha}(\sigma)$ следующее разложение:

$$G^{\alpha}(\sigma)=\sum_{\nu=0}^{\infty} G_{\nu}^{\alpha}\sigma^{\nu} \tag{10}$$

которое сходится абсолютно при условии $0\leqslant\sigma<1$.

Коэффициенты разложения (10) G_{ν}^{α} суть полиномы степени ν относительно величины γ, определяемые формулой

$$G_{\nu}^{\alpha}=B_{\nu}^{\alpha}(1-\gamma^2)^{-\alpha}\frac{d^{\nu}}{d\gamma^{\nu}}\left[(1-\gamma^2)^{\nu+\alpha}\right]$$

где B_{ν}^{α} — числовые коэффициенты вида

$$B_{\nu}^{\alpha}=\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\,\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\cdots[2\alpha+(2\nu-1)]}{(2\nu+2\alpha)(2\nu+2\alpha-1)\cdots[2\nu+2\alpha-(\nu-1)]}$$

Полагая $\nu=0, 1, 2, 3, \ldots$, находим без труда

$$G_0^{\alpha}=1, \qquad G_2^{\alpha}=\frac{1}{2}(2\alpha+1)(2\alpha+3)\gamma^2-\frac{1}{2}(2\alpha+1)$$

$$G_1^{\alpha}=(2\alpha+1)\gamma, \qquad G_3^{\alpha}=\frac{1}{6}(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)\gamma^3-\frac{1}{2}(2\alpha+1)(2\alpha+3)\gamma$$

и так далее.

Для вычисления следующих полиномов удобно воспользоваться рекуррентной формулой, которую легко проверить:

$$\frac{\nu}{2\alpha+1}G_{\nu}^{\alpha}=\gamma G_{\nu-1}^{\alpha+1}-G_{\nu-2}^{\alpha+1}$$

применяя которую, получим, например,

$$G_4^\alpha = \frac{1}{24}(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)\gamma^4 -$$
$$- \frac{1}{4}(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)\gamma^2 + \frac{1}{8}(2\alpha+1)(2\alpha+3)$$

Общая формула для полиномов G_ν^α имеет вид

$$G_\nu^\alpha = \sum_{s=1}^{\overline{m}} (-1)^s \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)\cdots(2\alpha+2\nu-2s-1)}{2^s \cdot s!\,(\nu-2s)!}\gamma^{\nu-2s} \tag{11}$$

где $\overline{m}$ — наибольшее целое число, заключающееся в $\nu/2$. Эту формулу легко проверить при помощи рекуррентной формулы, применяя метод индукции.

Действительно, мы имеем

$$\frac{\nu+1}{2\alpha+1}G_{\nu+1}^\alpha = \gamma G_\nu^{\alpha+1} - G_{\nu-1}^{\alpha+1} = \frac{(2\alpha+3)(2\alpha+5)\cdots(2\alpha+2\nu+1)}{\nu!}\gamma^{\nu+1} -$$
$$- \sum_{s=0}^{\overline{m}'-1} (-1)^s \frac{(2\alpha+3)(2\alpha+5)\cdots(2\alpha+2\nu-2s+1)}{2^{s+1}(s+1)!\,(\nu-2s-2)!}\gamma^{\nu-2s-1} -$$
$$- \sum_{s=0}^{\overline{m}'-1} (-1)^s \frac{(2\alpha+3)(2\alpha+5)\cdots(2\alpha+2\nu-2s-1)}{2^s s!\,(\nu-2s-1)!}\gamma^{\nu-2s-1}$$

откуда находим

$$G_{\nu+1}^\alpha = \sum_{s=0}^{\overline{m}'} (-1)^s \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)\cdots[2\alpha+2(\nu+1)-2s-1]}{2^s s!\,[(\nu+1)-2s]!}\gamma^{(\nu+1)-2s}$$

где $\overline{m}'$ — наибольшее целое число, заключающееся в $(\nu+1)/2$. Таким образом справедливость общей формулы (11) доказана. Вводя для сокращения обозначение

$$\Gamma_{\nu s}^\alpha = (-1)^s \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)\cdots(2\alpha+2\nu-2s-1)}{2^s s!\,(\nu-2s)!} \tag{12}$$

напишем формулу (11) в виде

$$G_\nu^\alpha = \sum_{s=0}^{\overline{m}} \Gamma_{\nu s}^\alpha \gamma^{\nu-2s} \tag{13}$$

Теперь нетрудно написать разложение функции $\Delta_0^{-2\alpha-1}$. Действительно, для $\rho < R$ имеем

$$\left(\frac{R}{\Delta_0}\right)^{2\alpha+1} = G^\alpha\left(\frac{\rho}{R}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu^\alpha \frac{\rho^\nu}{R^\nu} \tag{14}$$

причем согласно предыдущему этот ряд сходится абсолютно для всех значений ρ в промежутке $0 \leqslant \rho < R$, т. е. для всякого положения притягиваемой точки внутри круглого цилиндра, радиуса R, осью которого является ось z и уравнение которого есть $x^2 + y^2 = R^2$.

Для $\rho > R$ имеем

$$\left(\frac{\rho}{\Delta_0}\right)^{2\alpha+1} = G^\alpha\left(\frac{R}{\rho}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu^\alpha \frac{R}{\rho^\nu} \tag{15}$$

причем этот ряд сходится абсолютно для всякого $\rho > R$, т. е. для всякого положения притягиваемой точки вне цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$.

Формулы (14) и (15) дают, наконец, возможность составить окончательные выражения для коэффициентов Z_n в разложении обратного расстояния.

Действительно, для $\rho < R$ имеем, полагая

$$\Phi_\nu^n = \sum_{r=0}^{m} H_{nr} G_\nu^{n-r}, \qquad Z_n = \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_\nu^n \frac{\rho^\nu}{R^\nu} \tag{16}$$

Здесь Φ_ν^n, представляющие собой линейные комбинации полиномов $G_\nu^n, G_\nu^{n-1}, \ldots, G_\nu^{n-m}$ одной и той же степени ν, суть также полиномы такого же характера и могут быть представлены в следующем виде:

$$\Phi_\nu^n = \sum_{s=0}^{m} \Phi_{\nu s}^n \gamma^{\nu-2s}, \quad \text{где} \quad \Phi_{\nu s}^n = \sum_{r=0}^{m} H_{nr} \Gamma_{\nu s}^{n-r} = \sum_{r=0}^{m} A_{nr} \Gamma_{\nu s}^{n-r} \zeta^{n-2r} \tag{17}$$

суть полиномы степени n относительно величины ζ.

Если притягивающая точка находится в плоскости xy, то эти формулы значительно упрощаются. Действительно, тогда $\zeta = 0$ и из второй формулы (17) имеем

$$\Phi_{\nu s}^{2n+1} = 0, \qquad \Phi_{\nu s}^{2n} = A_{2n,n} \Gamma_{\nu s}^n = P_{2n}(0)\, \Gamma_{\nu s}^n$$

Первая формула (17) дает

$$\Phi_\nu^{2n+1} = 0, \qquad \Phi_\nu^{2n} = P_{2n}(0) \sum_{s=0}^{m} \Gamma_{\nu s}^n \gamma^{\nu-2s} = P_{2n}(0)\, G_\nu^n \tag{18}$$

и, наконец, формула (16) дает

$$Z_{2n+1} = 0, \qquad Z_{2n} = \frac{P_{2n}(0)}{R^{2n+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu^n \frac{\rho^\nu}{R^\nu} \tag{19}$$

Обратимся к случаю, когда $\rho > R$. Мы имеем, полагая

$$\Psi_\nu^n = \sum_{r=\bar r}^{m} H_{nr} G_{\nu-(2m-2r)}^{n-r}, \qquad Z_n = \frac{R^{n-2m}}{\rho^{2n-2m+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu^n \frac{R^\nu}{\rho^\nu} \tag{20}$$

где $\bar r = m - \bar m$, если $\bar m < m$, и $\bar r = 0$, если $\bar m \geqslant m$.

Здесь функции Ψ_ν^n также представляют собой линейные комбинации полиномов $G_{\bar\nu}^{n-r}$, $(\bar\nu \leqslant \nu)$, степени которых не выше ν, а потому эти функции суть тоже полиномы степени ν и могут быть представлены в следующем виде:

$$\Psi_\nu^n = \sum_{s=0}^{\bar m} \Psi_{\nu s}^n \gamma^{\nu-2s}$$

где

$$\Psi_{\nu s}^n = \sum_{r=0}^{k} H_{n,m-r} \Gamma_{\nu-2r,s-r}^{n-(m-r)} = \sum_{r=0}^{k} A_{n,m-r} \Gamma_{\nu-2r,s-r}^{n-(m-r)} \zeta^{n-2(m-r)} \tag{22}$$

причем $k = s$, если $\bar m < m$, и $k = m$, если $\bar m \geqslant m$. Таким образом функции $\Psi_{\nu s}^n$ суть полиномы относительно величины ζ, степени которых не выше n.

Если притягивающая точка находится в плоскости xy, то эти формулы также упрощаются. Действительно, полагая $\zeta=0$, имеем

$$\Psi_{\nu s}^{2n+1}=0 \qquad \Psi_{\nu s}^{2n}=A_{2n,n}\Gamma_{\nu s}^{n}=P_{2n}(0)\,\Gamma_{\nu s}^{n}$$

и формула (21) дает

$$\Psi_{\nu}^{2n+1}=0, \qquad \Psi_{\nu}^{2n}=P_{2n}(0)\sum_{s=0}^{\overline{m}}\Gamma_{\nu s}^{n}\gamma^{\nu-2s}=P_{2n}(0)\,G_{\nu}^{n}$$

и, наконец,

$$Z_{2n+1}=0, \qquad Z_{2n}=\frac{P_{2n}(0)}{\rho^{2n+1}}\sum_{\nu=0}G_{\nu}^{n}\frac{R^{\nu}}{\rho^{\nu}} \tag{23}$$

Подставляя теперь найденные выражения коэффициентов Z_n в формулу (4), получим следующие разложения для обратного расстояния между притягивающей и притягиваемой точками:

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Phi_{\nu}^{n}\frac{z^{n}}{R^{n}}\frac{\rho^{\nu}}{R^{\nu}} \qquad \text{для} \quad \rho<R,\ \zeta\neq 0 \tag{I}$$

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}P_{2n}(0)\,G_{\nu}^{n}\frac{z^{2n}}{H^{2n}}\frac{\rho^{\nu}}{R^{\nu}} \qquad \text{для} \quad \rho<R,\ \zeta=0 \tag{II}$$

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Psi_{\nu}^{n}\frac{z^{n}}{\rho_{u}}\frac{R^{\nu+n-2m}}{\rho^{\nu+n-2m}} \qquad \text{для} \quad \rho>R,\ \zeta\neq 0 \tag{III}$$

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}P_{2n}(0)\,G_{\nu}^{n}\frac{z^{2n}}{\rho^{2n}}\frac{R^{\nu}}{\rho^{\nu}} \qquad \text{для} \quad \rho>R,\ \zeta=0 \tag{IV}$$

Нетрудно установить области сходимости этих двойных рядов.

Действительно, ряд (I) сходится абсолютно при всяком положении притягиваемой точки в области, определяемой неравенствами

$$z^{2}<(x-X)^{2}+(y-Y)^{2}+Z^{2}, \qquad x^{2}+y^{2}<R^{2} \tag{A}$$

т. е. в части пространства, заключающейся внутри цилиндра и вне гиперболоида (5).

Если притягивающая точка может занимать различные положения в пространстве, то область безусловной применимости ряда (I) определяется неравенствами

$$0\leqslant\rho<R_{\min}, \qquad |z|<R_{\min}-\rho \tag{B}$$

где $R_{\min}$ — положительное число, меньшее всех значений, которые может принимать R при различных положениях притягивающей точки.

Ряд (II) сходится абсолютно при всяком положении притягиваемой точки в области, определяемой неравенствами

$$z^{2}<(x-X)^{2}+(y-Y)^{2}, \qquad x^{2}+y^{2}<R^{2} \tag{C}$$

т. е. в части пространства, заключающейся внутри цилиндра и вне конуса (6). Областью безусловной применимости ряда (II) является та же область (B).

Ряд (III) сходится абсолютно при всяком положении притягиваемой точки в области, определяемой неравенствами

$$z^2 < (x-X)^2 + (y-Y)^2 + Z^2, \qquad x^2 + y^2 > R^2 \tag{A'}$$

т. е. в части пространства, являющейся внешней и для цилиндра и для гиперболоида.

Если притягивающая точка может занимать различные положения в пространстве, то область безусловной применимости ряда (III) определяется неравенствами

$$R_{\max} < \rho < \infty, \qquad |z| < \rho - R_{\max} \tag{B'}$$

где $R_{\max}$ — положительное число, большее всех значений, которые может принимать R при различных положениях притягивающей точки.

Ряд (IV) сходится абсолютно при всяком положении притягиваемой точки в области, определяемой неравенствами.

$$z^2 < (x-X)^2 + (y-Y)^2, \qquad x^2 + y^2 > R^2 \tag{C'}$$

т. е. в части пространства, являющейся внешней и для цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ и для конуса $z^2 = (x-X)^2 + (y-Y)^2$.

Областью безусловной применимости ряда (IV) является та же область (B′) как и для ряда (III).

Таким образом области сходимости наших рядов установлены. Рассмотрим теперь разложение обратного расстояния для случая, когда притягиваемая точка находится внутри одной из полостей пограничного гиперболоида (5). В этом случае имеет место разложение (7).

Формулы (3) и (7) дают

$$Z_n' = \Delta_0{}^n P_n(h) = \sum_{r=0}^{m} A_{n,r} Z^{n-2r} \Delta_0{}^{2r} = R^n \sum_{r=0}^{m} H_{nr} \left(\frac{\Delta_0{}^2}{R^2}\right)^r \tag{24}$$

где попрежнему $H_{nr} = A_{nr} Z^{n-2r}$.

Полагая теперь $\sigma = \rho / R$, имеем

$$\left(\frac{\Delta_0{}^2}{R^2}\right)^r = (1 - 2\gamma\sigma + \sigma^2)^r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, m) \tag{25}$$

Последнее выражение есть полином степени $2r$ относительно σ, который нетрудно представить в развернутом виде. Действительно, применяя полиномиальную теорему, найдем

$$(1 - 2\gamma\sigma + \sigma^2)^r = \sum_{\nu=0}^{2r} G_\nu'^r \sigma^\nu, \qquad \text{где} \quad G_\nu'^r = (-1)^\nu \sum_{s=\bar{s}}^{m} \Gamma_{\nu s}'^r \gamma^{\nu-2s} \tag{26}$$

Здесь m обозначает, как и раньше, наибольшее целое число, заключающееся в $\nu / 2$, далее $\bar{s} = 0$, если $\nu \leqslant r$, и $\bar{s} = \nu - r$, если $\nu > r$, а $\Gamma_{\nu s}'^r$ суть числовые коэффициенты, определяемые формулой

$$\Gamma_{\nu s}'^r = \frac{r!\, 2^{\nu-2s}}{s!\,(\nu-2s)!\,(r-\nu+s)!} \tag{27}$$

Очевидно, что функции $G_\nu'^r$ суть полиномы относительно γ, степени которых не превышают числа r, причем каждому r соответствует $2r+1$ этих полиномов.

Подставляя выражения (26) в формулу (24) и располагая результат по возрастающим степеням σ, имеем

$$Z_n' = R^n \sum_{\nu=0}^{2m} \Phi_\nu'^n \sigma^\nu, \qquad \text{где} \qquad \Phi_\nu'^n = \sum_{r=\bar{r}}^{m} H_{nr} G_\nu'^r \tag{28}$$

причем $\bar{r} = \nu / 2$, если ν — четное, и $\bar{r} = (\nu+1) / 2$, если ν — нечетное.

Теперь формула (7) примет вид

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{|z|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{z^n} \left(\sum_{\nu=0}^{2m} \Phi_\nu'^n \frac{\rho^\nu}{R^\nu} \right) \tag{V}$$

и это разложение сходится абсолютно при всяком положении притягиваемой точки в области

$$z^2 > (x-X)^2 + (y-Y)^2 + Z^2 \tag{D}$$

т. е. в части пространства, заключающейся внутри каждой полости гиперболоида (5).

Если притягивающая точка находится в плоскости xy, то формула (V) принимает вид

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{|z|} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(0) \frac{R^{2n}}{z^{2n}} \left(\sum_{\nu=0}^{2n} G_\nu'^n \frac{\rho^\nu}{R^\nu} \right) \tag{VI}$$

и это разложение сходится абсолютно при всяком положении притягиваемой точки в области

$$z^2 > (x-X)^2 + (y-Y)^2 \tag{E}$$

т. е. внутри каждой из двух полостей конуса (6).

Если притягивающая точка может занимать различные положения в пространстве, то, как нетрудно видеть, область абсолютной применимости рядов (V) и (VI) определяется неравенством

$$|z| > R_{\max} + \rho \tag{F}$$

где $R_{\max}$ — положительное число, большее всех значений R при различных положениях притягивающей точки.

Обратимся теперь к рассмотрению коэфициентов Φ_ν^n, G_ν^n и Ψ_ν^n рядов (I), (II), (III) и (IV). Величины G_ν^n суть функции только величины γ и являются полиномами степени ν относительно γ с числовыми коэффициентами. Величины Φ_ν^n и Ψ_ν^n, как показывают формулы (17), (21) и (22), суть также полиномы степени ν относительно γ, коэффициентами которых являются полиномы относительно $\zeta = Z / R$ с числовыми коэффициентами.

Величина γ зависит от полярной координаты v притягиваемой точки и от координат X, Y, Z или, точнее, от отношений X / R, Y / R, т. е. от величин, определяющих положение притягивающей точки.

Нашей задачей является теперь получение развернутых выражений для величин Φ_ν^n, G_ν^n и Ψ_ν^n как явных функций от v и величин X/R, Y/R и Z/R. Покажем, что эти величины представляются в виде тригонометрических полиномов, расположенных по синусам и косинусам целых кратностей полярного угла v, коэфициенты которых суть целые рациональные функции величин X/R, Y/R и Z/R с числовыми коэффициентами, и получим общие формулы для вычисления этих функций Φ_ν^n, G_ν^n и Ψ_ν^n.

Для этого рассмотрим прежде всего величину γ и найдем развернутое выражение для любой целой положительной степени этой величины.

Полагая для сокращения $\xi = X/R$, $\eta = Y/R$, имеем

$$\gamma = \xi\cos v + \eta\sin v, \qquad \gamma^\nu = (\xi\cos v + \eta\sin)^\nu \tag{29}$$

Чтобы развернуть последнее выражение, перейдем от тригонометрических функций к показательным и представим γ в виде

$$\gamma = \frac{1}{2}\left[(\xi - i\eta)\,e^{iv} + (\xi + i\eta)\,e^{-iv}\right] = \frac{1}{2}\left(\bar{u}e^{iv} + ue^{-iv}\right)$$

где e — основание натуральных логарифмов, $i = \sqrt{-1}$ и временно введено обозначение $u = \xi + i\eta$, $\bar{u} = \xi - i\eta$. Отсюда

$$\gamma^\nu = \frac{1}{2^\nu}\left(\bar{u}e^{iv} + ue^{-iv}\right)^\nu = \frac{1}{2^\nu}\sum_{s=0}^{\nu} C_\nu^s \bar{u}^{\nu-s} u^s e^{i(\nu-s)v}\, e^{-isv} \tag{30}$$

где C_ν^s — биномиальные коэффициенты, т. е. $C_\nu^s = \dfrac{\nu!}{s!\,(\nu-s)!}$.

Обозначая теперь, как в ранее, через $\bar{m}$ наибольшее целое число, заключающееся в $\nu/2$, разобьем последнюю сумму на две следующим образом,

$$\gamma^\nu = \frac{1}{2^\nu}\sum_{s=0}^{\bar{m}} \bar{C}_\nu^s\, \bar{u}^{\nu-s} u^s e^{i(\nu-s)v}\, e^{-isv} + \frac{1}{2^\nu}\sum_{s=\bar{s}}^{\nu} \bar{C}_\nu^s\, \bar{u}^{\nu-s} u^s e^{i(\nu-s)v}\, e^{-isv}$$

где $\bar{s} = \bar{m}$, если ν четное, $\bar{s} = \bar{m}+1$, если ν нечетное $\bar{C}_\nu^s = C_\nu^s$, но $\bar{C}_\nu^m = \frac{1}{2}\,C_\nu^m$, если ν четное.

Полагая теперь во второй сумме $\nu - s = s'$, изменяя порядок суммирования и заменяя, наконец, s' на s, получим

$$\gamma^\nu = \frac{1}{2^\nu}\sum_{s=0}^{\bar{m}} \bar{C}_\nu^s\, \bar{u}^{\nu-s} u^s e^{i(\nu-s)v} e^{-isv} + \frac{1}{2^\nu}\sum_{s=0}^{\bar{m}} \bar{C}_\nu^s\, \bar{u}^s u^{\nu-s} e^{isv} e^{-i(\nu-s)v}$$

или, так как $u\bar{u} = \xi^2 + \eta^2$:

$$\gamma^\nu = \frac{1}{2^\nu}\sum_{s=0}^{\bar{m}} \bar{C}_\nu^s (\xi^2+\eta^2)^s\, \bar{u}^{\nu-2s} e^{i(\nu-2s)v} + \frac{1}{2^\nu}\sum_{s=0}^{\bar{m}} \bar{C}_\nu^s\, (\xi^2+\eta^2)^s\, u^{\nu-2s} e^{-i(\nu-2s)v}$$

Переходя теперь от показательных функций к тригонометрическим и соединяя обе суммы в одну, имеем

$$\gamma^\nu = \frac{1}{2^\nu}\sum_{s=0}^{\bar{m}} \bar{C}_\nu^s (\xi^2+\eta^2)^s \Big\{\left[\bar{u}^{\nu-2s} + u^{\nu-2s}\right]\cos(\nu-2s)\,v +$$
$$+ i\left[\bar{u}^{\nu-2s} - u^{\nu-2s}\right]\sin(\nu-2s)\,v\Big\}$$

$$u^{\nu-2s}=(\xi-i\eta)^{\nu-2s}=\sum_{k=0}^{\nu-2s}(-k)^k C_{\nu-2s}^k \xi^{\nu-2s-k} i^k \eta^k$$

$$u^{\nu-2s}=(\xi+i\eta)^{\nu-2s}=\sum_{k=0}^{\nu-2s} C_{\nu-2s}^k \xi^{\nu-2s-k} i^k \eta^k$$

и получаем

$$\bar{u}^{\nu-2s}+u^{\nu-2s}=\sum_{k=0}^{\nu-2s}[(-1)^k+1]\, C_{\nu-2s}^k \xi^{\nu-2s-k} i^k \eta^k$$

$$\bar{u}^{\nu-2s}-u^{\nu-2s}=\sum_{k=0}^{\nu-2s}[(-1)^k-1]\, C_{\nu-2s}^k \xi^{\nu-2s-k} i^k \eta^k$$

Так как $(-1)^k+1=2$, $(-1)^k-1=0$ при четном k и $(-1)^k+1=0$, $(-1)^k-1=-2$ при нечетном k, то в первой сумме останутся только члены с четными k, а во второй сумме — только с нечетными, и можем написать

$$\bar{u}^{\nu-2s}+u^{\nu-2s}=+2\sum_{k=0}^{\overline{m-s}}(-1)^k C_{\nu-2s}^{2k} \xi^{\nu-2s-2k}\eta^{2k}$$

$$u_{\nu-2s}-u^{\nu-2s}=-2i\sum_{k=0}^{\overline{m-s}}(-1)^k C_{\nu-2s}^{2k+1} \xi^{\nu-2s-2k-1}\eta^{2k+1}$$

Полагая теперь

$$\Xi_{\nu,\nu-2s}=\frac{C_\nu^s}{2^{\nu-1}}(\xi^2+\eta^2)^s\sum_{k=0}^{\overline{m}-s}(-1)^k C_{\nu-2s}^{2k} \xi^{\nu-2s-2k}\eta^{2k} \tag{31}$$

$$\Upsilon_{\nu,\nu-2s}=\frac{\bar{C}_\nu^s}{2^{\nu-1}}(\xi^2+\eta^2)^s\sum_{k=0}^{\overline{m-s}}(-1)^k C_{\nu-2s}^{2k+1} \xi^{\nu-2s-2k-1}\eta^{2k+1} \tag{32}$$

получим

$$\gamma^\nu=\sum_{s=0}^{\overline{m}}[\Xi_{\nu,\nu-2s}\cos(\nu-2s)v+\Upsilon_{\nu,\nu-2s}\sin(\nu-2s)v] \tag{33}$$

а это и есть искомая формула, из которой получаются между прочим известные формулы тригонометрии, дающие разложения целых степеней синуса и косинуса по таковым же функциям кратных углов.

Подставляя теперь найденные выражения для степеней γ в формулы (17) и (21), получим формулы для коэффициентов Φ_ν^n и Ψ_ν^n рядов (I) и (III):

$$\Phi_\nu^n=\sum_{s=0}^{m}[X_{\nu,\nu-2s}^n\cos(\nu-2s)v+Y_{\nu,\nu-2s}^n\sin(\nu-2s)v] \tag{34}$$

где

$$X_{\nu,\nu-2s}^n=\sum_{\sigma=0}^{s}\Phi_{\nu\sigma}^n\Xi_{\nu-2\sigma,\nu-2s}\,,\qquad Y_{\nu,\nu-2s}^n=\sum_{\sigma=0}^{s}\Phi_{\nu\sigma}^n\Upsilon_{\nu-2\sigma,\nu-2s} \tag{35}$$

и

$$\Psi_\nu^n = \sum_{s=0}^{m} [\overline{X}^n_{\nu,\nu-2s} \cos(\nu-2s)\,v + \overline{Y}^n_{\nu,\nu-2s} \sin(\nu-2s)\,v] \tag{36}$$

$$\overline{X}^n_{\nu,\nu-2s} = \sum_{\sigma=0}^{s} \Psi^n_{\nu\sigma} \Xi_{\nu-2\sigma,\nu-2s}, \qquad \overline{Y}^n_{\nu,\nu-2s} = \sum_{\sigma=0}^{s} \Psi^n_{\nu\sigma} \Upsilon_{\nu-2\sigma,\nu-2s} \tag{37}$$

Если положить $\zeta=0$ в формулах (35) и (37), то формулы (34) и (36) дадут выражения для коэффициентов рядов (II) и (IV).

Аналогичные формулы можно получить для функций $\Phi_\nu'^n$, являющихся коэффициентами ряда (V), представляющего разложение обратного расстояния по отрицательным степеням z. Теперь основные формулы (I) и (III) можно написать в окончательном виде, подставляя вместо Φ_ν^n и Ψ_ν^n их выражения (34) и (36):

для $\rho<R$, $\zeta\neq 0$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} [X^n_{\nu,\nu-2s} \cos(\nu-2s)\,v + Y^n_{\nu,\nu-2s} \sin(\nu-2s)\,v] \frac{z^n}{R^n} \frac{\rho^\nu}{R^\nu} \tag{I'}$$

для $\rho>R$, $\zeta\neq 0$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} [\overline{X}^n_{\nu,\nu-2s} \cos(\nu-2s)\,v + \overline{Y}^n_{\nu,\nu-2s} \sin(\nu-2s)\,v] \frac{z^n}{\rho^n} \frac{R^{\nu+n-2m}}{\rho^{\nu+n-2m}} \tag{III'}$$

Если мы положим в этих формулах $\zeta=0$, то получим разложения (II) и (IV) в виде:

для $\rho<R$, $\zeta=0$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} [X^{2n,0}_{\nu,\nu-2s} \cos(\nu-2s)\,v + Y^{2n,0}_{\nu,\nu-2s} \sin(\nu-2s)\,v] \frac{z^{2n}}{R^{2n}} \frac{\rho^\nu}{R^\nu} \tag{II'}$$

для $\rho>R$, $\zeta=0$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\overline{m}} [X^{2n,0}_{\nu,\nu-2s} \cos(\nu-2s)\,v + Y^{2n,0}_{\nu,\nu-2s} \sin(\nu-2s)\,v] \frac{z^{2n}}{\rho^{2n}} \frac{R^\nu}{\rho^\nu} \tag{IV'}$$

где

$$X^{2n,0}_{\nu,\nu-2s} = P_{2n}(0) \sum_{\sigma=0}^{s} \Gamma^n_{\nu\sigma} \Xi^0_{\nu-2\sigma,\nu-2s}, \quad Y^{2n,0}_{\nu,\nu-2s} = P_{2n}(0) \sum_{\sigma=0}^{s} \Gamma^n_{\nu\sigma} \Upsilon^0_{\nu-2\sigma,\nu-2s} \tag{38}$$

Наконец, функции Ξ^0 и Υ^0 получаются из формул (31) и (32) заменой в последних множителя $\xi^2+\eta^2$ единицей.

Полученным рядам можно придать несколько иную форму, которая получится, если мы включим степени R в коэффициенты при синусах и косинусах целых кратностей угла v. Делая это и вводя для сохранения однородности формул постоянные числа $R_{\min}$ и $R_{\max}$, т. е. наименьшее и наибольшее из значений величины R, которые она может принимать при различных положениях притягивающей точки в пространстве, напишем основные формулы (I′) и (III′) в следующем виде:

для $\rho < R_{\min}$, $\zeta \neq 0$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{R_{\min}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} [X'^{n}_{\nu,\nu-2s} \cos(\nu-2s)v + Y'^{n}_{\nu,\nu-2s} \sin(\nu-2s)v] \frac{z^n}{R^n_{\min}} \frac{\rho^\nu}{R^\nu_{\min}} \qquad (\mathrm{I}'')$$

где

$$X'^{n}_{\nu,\nu-2s} = \left(\frac{R_{\min}}{R}\right)^{n+\nu+1} Y^{n}_{\nu,\nu-2s}, \qquad Y'^{n}_{\nu,\nu-2s} = \left(\frac{R_{\min}}{R}\right)^{n+\nu+1} Y^{n}_{\nu,\nu-2s} \qquad (39)$$

для $\rho > R_{\max}$, $\zeta \neq 0$ (III″)

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{R_{\max}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} [\overline{X}'^{n}_{\nu,\nu-2s} \cos(\nu-2s)v + \overline{Y}'^{n}_{\nu,\nu-2s} \sin(\nu-2s)v] \frac{z^n}{R^n_{\max}} \frac{R_{\max}^{\nu+2n-2m+1}}{\rho^{\nu+2n-2m+1}}$$

где

$$\overline{X}'^{n}_{\nu,\nu-2s} = \left(\frac{R}{R_{\max}}\right)^{\nu+n-2m} \overline{X}^{n}_{\nu,\nu-2s}, \qquad \overline{Y}'^{n}_{\nu,\nu-2s} = \left(\frac{R}{R_{\max}}\right)^{\nu+n-2m} \overline{Y}^{n}_{\nu,\nu-2s} \qquad (40)$$

Коэффициенты рядов (I″) и (III″) зависят только от координат притягивающей точки.

Полученные нами ряды решают поставленную задачу, ибо удовлетворяют тем общим условиям, которые были сформулированы в начале статьи.

Мы не рассмотрели только оценки погрешности, которая получится, если мы заменим наши ряды конечными суммами, но этот вопрос должен составить содержание отдельной статьи.

Поступила в редакцию
10 VII 1945

Государственный астрономический
институт им. П. К. Штернберга при МГУ

G. N. DUBOSHIN. EXPANSION OF RECIPROCAL DISTANCE IN THE THEORY OF POTENTIAL

The present paper gives a new form of expansion of the reciprocal distance between the attracting and attracted points into an infinite series.

The reciprocal distance is considered as a function of cylindrical coordinates ρ, v and z of the attracted point, while the attracting point is determined by right angle coordinates X, Y, Z; which play the part of parameters. The reciprocal distance is presented in the form of a power series of z and powers of ratio ρ / R or R / ρ, where $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

These series are given by formulae (I), (II), (III) and (IV), in which Φ''_ν, G'' and Ψ'' are functions of the polar angle v and coordinates of the attracting point. These functions are given by formulae (39) and (41). The regions of convergency of series (I), (II), (III), and (IV) are determined by the inequalities (A), (C), (A′) and (C′).

Series (I) and (III) are given in more detailed manner by formulae (I′) and (III′); series (II) and (IV), by formulae (II′) and (IV′).