Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОБЛАСТИ ОТВЕРСТИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА [1]

А. И. Лурье

(Ленинград)

1. Применяемые в настоящей работе исходные уравнения теории цилиндрической оболочки имеют приближенный характер. Они основаны на пренебрежении перемещениями u и v в срединной поверхности при вычислении изменений кривизны и кручения оболочки; последние выражаются только через радиальную составляющую w перемещения. При этих условиях задача о цилиндрической оболочке может быть приведена к разысканию функции перемещений φ, определяемой при отсутствии распределенных поверхностных нагрузок дифференциальным уравнением восьмого порядка

$$\triangle^4\varphi + \frac{12(m^2-1)}{m^2a^2h^2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь приняты обозначения: a — радиус цилиндра, h — толщина стенки, m — число Пуассона; через $\triangle$ обозначен, как обычно, оператор Лапласа $\triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, причем x — абсцисса, отсчитываемая вдоль образующей цилиндра, $y = a\theta$, где θ — азимут рассматриваемой меридиональной плоскости.

В дальнейшем мы будем также обозначать операции дифференцирования по x и y соответственно через ∂_1 и ∂_2.

Приводим формулы, выражающие перемещения, усилия и моменты через функцию перемещений. Осевое перемещение u определяется по формуле

$$u = \frac{1}{a}\partial_1\left(\triangle - \frac{m+1}{m}\partial_1^2\right)\varphi \tag{1.2}$$

Перемещение v, перпендикулярное меридиональной плоскости, находится по формуле

$$v = -\frac{1}{a}\partial_2\left(\triangle + \frac{m+1}{m}\partial_1^2\right)\varphi \tag{1.3}$$

Наконец, для радиального перемещения имеем выражение

$$w = \triangle^2\varphi \tag{1.4}$$

Выражения для осевого, кольцевого и касательного усилий соответственно будут

$$S_1 = \frac{Eh}{a}\partial_2^2\partial_1^2\varphi, \qquad S_3 = \frac{Eh}{a}\partial_1^4\varphi, \qquad S = -\frac{Eh}{a}\partial_2\partial_1^3\varphi \tag{1.5}$$

---

[1] Доложено на 2-ом Совещании по теории упругости, строительной механике и теории пластичности 25—28 марта 1946 в Институте механики Академии Наук СССР.

Для меридионального G_1, кольцевого G_2 изгибающих моментов и для крутящего момента H имеем выражения

$$G_1 = -D\left(\partial_1^2 + \frac{1}{m}\partial_2^2\right)\triangle^2\varphi, \qquad G_2 = -D\left(\partial_2^2 + \frac{1}{m}\partial_1^2\right)\triangle^2\varphi$$

$$H = -D\frac{m-1}{m}\partial_1\partial_2\triangle^2\varphi \qquad \left(D = \frac{Em^2h^3}{12(m^2-1)}\right) \tag{1.6}$$

Распределение крутящего момента H и перерезывающей силы в сечении $x = \text{const}$ статически эквивалентно распределению усилия

$$Q_1^* = Q_1 + \frac{\partial H}{\partial y} = -D\partial_1\left(\partial_1^2 + \frac{2m-1}{m}\partial_2^2\right)\triangle^2\varphi \tag{1.7}$$

на единицу длины дуги параллельного круга $x = \text{const}$. Точно так же распределение этого момента и перерезывающего усилия в сечении $\theta = \text{const}$ статически эквивалентно распределению усилия

$$Q_2^* = Q_2 + \frac{\partial H}{\partial x} = -D\partial_2\left(\frac{2m-1}{m}\partial_1^2 + \partial_2^2\right)\triangle^2\varphi \tag{1.8}$$

на единицу длины меридионального сечения цилиндра. Усилия Q_1^* и Q_2^* нормальны к поверхности цилиндра.

Уравнение (1.1) можно заменить системой уравнений

$$\triangle^2\varphi - \sqrt{\frac{12(m^2-1)}{m^2a^2h^2}}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} = 0, \qquad \triangle^2\varphi_1 + \sqrt{\frac{12(m^2-1)}{m^2a^2h^2}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0 \tag{1.9}$$

Введем вспомогательную комплексную функцию

$$\sigma_* = \varphi + i\varphi_1 \tag{1.10}$$

Для определения ее из (1.9) находим уравнение

$$\triangle^2\sigma_* + \sqrt{\frac{3(m^2-1)}{m^2}}\frac{2i}{ah}\frac{\partial^2\sigma_*}{\partial x^2} = 0 \tag{1.11}$$

Из (1.9) и выражений для усилий и моментов следует, что усилия S_1, S_2, S выражаются через мнимую часть функции $\triangle^2\sigma_*$, тогда как изгибающие моменты, крутящий момент и усилия Q_1^*, Q_2^* выражаются через вещественную часть этой же функции $\triangle^2\sigma_*$.

Поэтому, если ввести в рассмотрение функцию

$$\sigma = \triangle^2\sigma_* \tag{1.12}$$

вещественная часть которой представляет радиальное перемещение, как это следует из (1.4), то для усилий и моментов получим такие выражения:

$$\begin{aligned}
S_1 &= -\frac{D}{h}\sqrt{\frac{12(m^2-1)}{m^2}}\partial_2^2\,\mathrm{Im}\,\sigma, & G_1 &= -D\left(\partial_1^2 + \frac{1}{m}\partial_2^2\right)\mathrm{Re}\,\sigma \\
S_2 &= -\frac{D}{h}\sqrt{\frac{12(m^2-1)}{m^2}}\partial_1^2\,\mathrm{Im}\,\sigma, & G_2 &= -D\left(\partial_2^2 + \frac{1}{m}\partial_1^2\right)\mathrm{Re}\,\sigma \\
S &= \frac{D}{h}\sqrt{\frac{12(m^2-1)}{m^2}}\partial_1\partial_2\,\mathrm{Im}\,\sigma, & H &= -D\frac{m-1}{m}\partial_1\partial_2\,\mathrm{Re}\,\sigma \\
Q_1^* &= -D\partial_1\left(\frac{2m-1}{m}\partial_2^2 + \partial_1^2\right)\mathrm{Re}\,\sigma, & Q_2^* &= -D\partial_2\left(\frac{2m-1}{m}\partial_1^2 + \partial_2^2\right)\mathrm{Re}\,\sigma
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Ясно, что σ определяется из того же дифференциального уравнения (1.11), что и σ_*:

$$\triangle^2\sigma + \sqrt{\frac{3(m^2-1)}{m^2}}\frac{2i}{ah}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} = 0 \tag{1.14}$$

Заметим, что усилия S_1, S_2, S выражаются через мнимую часть σ по тем же формулам, что и соответствующие напряжения в задаче о плоском напряженном состоянии через функцию напряжений Эри.

2. Дадим теперь некоторые указания, относящиеся к решению дифференциального уравнения (1.14). Это уравнение можно представить в виде

$$L_1 L_2 \sigma = 0 \tag{2.1}$$

где через L_1 и L_2 обозначены дифференциальные операторы

$$L_1 = \triangle + 2(1-i)\beta\frac{\partial}{\partial x}, \qquad L_2 = \triangle - 2(1-i)\beta\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.2}$$

причем

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(m^2-1)}{m^2}}\frac{1}{2\sqrt{ah}} \tag{2.3}$$

Поскольку операторы L_1 и L_2 переставимы, решение каждого из уравнений

$$L_1\sigma = 0, \qquad L_2\sigma = 0 \tag{2.4}$$

является решением уравнения (1.14). В первом уравнении (2.4) полагаем

$$\sigma = e^{-(1-i)\beta x}\varphi(x, y) \tag{2.5}$$

и соответственно во втором

$$\sigma = e^{(1-i)\beta x}\psi(x, y) \tag{2.6}$$

Тогда ψ определится уравнением

$$\triangle\psi + 2i\beta^2\psi = 0 \tag{2.7}$$

Если ψ_1, ψ_2 будут линейно независимые решения этого уравнения, то частными решениями первого уравнения (2.4) будут выражения

$$\psi_1 e^{-(1-i)\beta x}, \qquad \psi_2 e^{-(1-i)\beta x} \tag{2.8}$$

а частными решениями второго уравнения

$$\psi_1 e^{(1-i)\beta x}, \qquad \psi_2 e^{(1-i)\beta x} \tag{2.9}$$

Конечно, любая линейная комбинация этих решений будет решением уравнения (1.14).

Введем в рассмотрение функции А. Н. Крылова

$$\begin{aligned} &\Omega_1(\xi) = \operatorname{ch}\xi\cos\xi, && \Omega_2(\xi) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi\sin\xi + \operatorname{sh}\xi\cos\xi) \\ &\Omega_3(\xi) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\xi\sin\xi, && \Omega_4(\xi) = \frac{1}{4}(\operatorname{ch}\xi\sin\xi - \operatorname{sh}\xi\cos\xi) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Легко проверить, что выражения $\Omega_1(\xi) - 2i\Omega_3(\xi)$, $\Omega_2(\xi) - 2i\Omega_4(\xi)$ являются линейными комбинациями четной и нечетной от функций $e^{-(1-i)\xi}$, $e^{(1-i)\xi}$.

Можно поэтому вместо (2.8), (2.9) рассматривать решения (1.14) также в форме

$$[\Omega_1(\beta x) - 2i\Omega_3(\beta x)]\psi(x, y), \qquad [\Omega_2(\beta x) - 2i\Omega_4(\beta x)]\psi(x, y) \tag{2.11}$$

В дальнейшем будем рассматривать «полярные» координаты на поверхности цилиндра; именно примем

$$x = \rho \cos \lambda\,, \qquad y = \rho \sin \lambda \tag{2.12}$$

Кривые $\lambda = \text{const}$ суть винтовые линии: если развернуть цилиндр на плоскость, то эти винтовые линии перейдут в систему прямых, радиально расходящихся из начала координат. На этой плоскости кривые $\rho = \text{const}$ суть окружности, а на цилиндре это будут некоторые кривые одинаковых геодезических расстояний от начала координат — в эти кривые переходят окружности при изгибании плоскости в поверхность кругового цилиндра.

Преобразование (2.12), конечно, формально тождественно с преобразованием к полярным координатам на плоскости. Но формулы (1.13) также тождественны с соответствующими формулами плоской задачи и задачи изгиба тонких плит. Поэтому преобразование (2.12) к координатам ρ и λ должно привести к известным выражениям усилий и моментов в полярных координатах для указанных задач, относящихся к плоской плите. Получаем

$$\begin{aligned}
S_\rho &= -\frac{D}{h}\sqrt{\frac{12(m^2-1)}{m^2}}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)\operatorname{Im}\sigma\\
S_\lambda &= -\frac{D}{h}\sqrt{\frac{12(m^2-1)}{m^2}}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\operatorname{Im}\sigma\\
S_{\lambda\rho} &= \frac{D}{h}\sqrt{\frac{12(m^2-1)}{m^2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\operatorname{Im}\sigma\\
G_\rho &= -D\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{m\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{m\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)\operatorname{Re}\sigma\\
G_\lambda &= -D\left(\frac{\partial^2}{m\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)\operatorname{Re}\sigma\\
H_{\rho\lambda} &= -D\frac{m-1}{m}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\operatorname{Re}\sigma\\
Q_\rho^* &= -D\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\triangle+\frac{m-1}{m}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)\operatorname{Re}\sigma\\
Q_\lambda^* &= -D\left(\frac{\partial}{\rho\partial\lambda}\triangle+\frac{m-1}{m}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\operatorname{Re}\sigma\\
&\left(\triangle=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)
\end{aligned}\tag{2.13}$$

Решение уравнения (2.7) ищем в виде

$$\psi_n = R_n \cos n\lambda \qquad \text{или} \qquad \psi_n = R_n \sin n\lambda \tag{2.14}$$

где n — целое число. Для определения $R_n(\rho)$ получается дифференциальное уравнение Бесселя.

$$R_n'' + \frac{1}{\rho}R_n' + \left(2i\beta^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)R_n = 0 \tag{2.15}$$

Нас будет интересовать решение этого уравнения, убывающее при больших значениях аргумента $\beta\rho$ по экспоненциальному закону; это решение дается, как известно, первой функцией Ганкеля n-го порядка

$$H_n^1(\beta\rho\sqrt{2i}) = \psi_n(\beta\rho) + i\chi_n(\beta\rho) \tag{2.16}$$

Возвращаясь к решению (2.11) дифференциального уравнения (1.14), будем рассматривать решения этого уравнения вида

$$\sigma_n = [\Omega_1(\beta x) - 2i\Omega_3(\beta x)]\,[\psi_n(\beta\rho) + i\chi_n(\beta\rho)]\cos n\lambda = (\alpha_n + i\beta_n)\cos n\lambda \qquad (2.17)$$

где n четно, и решение

$$\sigma_k = [\Omega_2(\beta x) - 2i\Omega_4(\beta x)]\,[\psi_k(\beta\rho) + i\chi_k(\beta\rho)]\cos k\lambda = (\alpha_k + i\beta_k)\cos k\lambda \qquad (2.18)$$

где k нечетное.

При $\beta|x| \to \infty$ функции $\Omega_i(\beta x)$ возрастают, как $e^{\beta|x|}$. С другой стороны, асимптотическое представление функции Ганкеля имеет вид

$$H_n^{(1)}(\beta\rho\sqrt{2i}) \sim \frac{e^{-\beta\rho}}{\sqrt{\pi\beta\rho/\sqrt{2}}}\left[\cos\left(\beta\rho - \frac{4n+3}{8}\pi\right) + i\sin\left(\beta\rho - \frac{4n+3}{8}\pi\right)\right] \qquad (2.19)$$

Поэтому σ_n и σ_k при $\beta\rho \to \infty$ убывают по закону

$$\frac{1}{\sqrt{\beta\rho}}\, e^{-\beta(\rho - |x|)}$$

и, значит, при λ, отличном от нуля или π, стремятся к нулю по экспоненциальному закону, а при $\lambda = 0$ или $\lambda = \pi$ не медленнее, чем $\frac{1}{\sqrt{\beta\rho}}$. Нетрудно установить также, что решения (2.17) — (2.18) четны относительно x и λ.

При малых значениях аргумента представления функций α_i и β_i в форме рядов будут

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\beta^2\rho^2\left[(2+\cos 2\lambda)\ln\frac{\gamma\beta\rho}{\sqrt{2}} - 1\right] + \cdots \\
\beta_0 &= \frac{2}{\pi}\ln\frac{\gamma\beta\rho}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\beta^2\rho^2(2+\cos 2\lambda) + \cdots \\
\alpha_1 &= \cos\lambda\left(\frac{2}{3\pi}\beta^2\rho^2 - \frac{1}{3\pi}\beta^2\rho^2\cos 2\lambda - \frac{2}{\pi}\beta^2\rho^2\ln\frac{\gamma\beta\rho}{\sqrt{2}}\right) + \cdots \\
\beta_1 &= \cos\lambda\left(\frac{1}{2}\beta^2\rho^2 - \frac{2}{\pi}\right) + \cdots \\
\alpha_2 &= -\frac{1}{\pi}\frac{2}{\beta^2\rho^2} - \frac{1}{2\pi}\beta^2\rho^2\left(\frac{1}{4} + \cos 2\lambda - \frac{2}{3}\cos 4\lambda + \ln\frac{\gamma\beta\rho}{\sqrt{2}}\right) + \cdots \qquad (2.20) \\
\beta_2 &= \frac{1}{\pi}\cos 2\lambda + \frac{1}{8}\beta^2\rho^2 + \cdots \\
\alpha_3 &= \cos\lambda\left[-\frac{8}{\pi\beta^2\rho^2} + \frac{2}{3\pi}\beta^2\rho^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2\lambda + \frac{2}{5}\cos^4\lambda\right)\right] + \cdots \\
\beta_3 &= -\frac{2}{3\pi}\cos\lambda(1 - 2\cos 2\lambda) + \cdots \\
\alpha_4 &= -\frac{1}{\pi}\frac{1}{\beta^2\rho^2}(10 + 6\cos 2\lambda) + \cdots \\
\beta_4 &= \frac{24}{\pi}\frac{1}{\beta^4\rho^4} + \cdots
\end{aligned}$$

Здесь буквой γ обозначена постоянная Эйлера-Маскерони; $\ln\gamma = 0.5772\ldots$

3. Рассмотрим цилиндрическую оболочку, снабженную отверстием, ограниченным кривой $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$; если развернуть эту поверхность на плоскость, то последняя будет иметь круговой вырез радиуса ρ_0. При отсутствии отверстия напряженное состояние в стенке цилиндра определялось бы усилиями $S_1 = ph$ и $S_2 = qh$. Речь идет об определении искажения, которое претерпевает это напряженное состояние в области, примыкающей к отверстию. Эта задача представляет прямое обобщение на случай цилиндрической поверхности задачи Кирша о распределении напряжений в плоском напряженном поле, снабженном круговым отверстием. Строгое ее решение вряд ли доступно. В последующем мы дадим приближенное решение, пригодное в предположении, что параметр ρ_0^2 / ah мал; это значит, что в последующем мы считаем, что хотя отношение a / h велико, но радиус отверстия столь мал, что

$$\frac{\rho_0}{a} \ll \sqrt{\frac{h}{a}} \tag{3.1}$$

Комплексную функцию напряжений, определяющую искажение напряженного состояния, будем искать в форме

$$\sigma = (A + iB)\,\sigma_0 + (C + iD)\,\sigma_1 + (E + iF)\,\sigma_2 + (H + iK)\,\sigma_3 + (L + iM)\,\sigma_4 + \cdots \tag{3.2}$$

где $\sigma_0, \ldots, \sigma_4$ суть указанные выше решения (2.17), (2.18).

Нужно подобрать постоянные $A, B, \ldots$ так, чтобы удовлетворить некоторым условиям, приводимым ниже, на контуре отверстия. Это оказывается возможным в первом приближении — ценой пренебрежения величинами, имеющими порядок квадрата указанного выше параметра ρ_0^2 / ah. Положим

$$\begin{gathered}
A = A_0 + A_1\beta^2 + \cdots, \quad B = B_1\beta^2 + \cdots, \quad C = C_0 + C_1\beta^2 + \cdots, \quad D = D_1\beta^2 + \cdots, \\
E = E_2\beta^4 + \cdots, \quad F = F_1\beta^2 + F_2\beta^4 + \cdots, \quad H = H_2\beta^4 + \cdots, \quad K = K_3\beta^6 + \cdots, \\
L = L_4\beta^8 + \cdots, \quad M = M_3\beta^6 + \cdots
\end{gathered} \tag{3.3}$$

и, воспользовавшись разложениями (2.20), представим σ в виде ряда, ограничиваясь сохранением членов порядка β^2. Для мнимой и вещественной частей σ получим выражение

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,\sigma = \psi_0 + \beta^2\psi_1 + \ldots = \frac{2A_0}{\pi}\left(\ln\frac{\rho}{\rho_0} + \gamma'\right) - \frac{C_0}{\pi}(1 + \cos 2\lambda) - \frac{2F_1}{\pi}\,\frac{\cos 2}{\rho^2} + \\
+ \beta^2\Big[-\frac{1}{4}A_0\rho^2(2 + \cos 2\lambda) + \frac{C_0}{4}\rho^2(1 + \cos 2\lambda) + \frac{2A_1}{\pi}\left(\ln\frac{\rho}{\rho_0} + \gamma'\right) + \frac{1}{2}B_1 - \\
- \frac{2F_2}{\pi}\,\frac{\cos 2\lambda}{\rho^2} - \frac{1}{\pi}C_1(1 + \cos 2\lambda)\Big] + \ldots
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\sigma = w_0 + \beta^2 w_1 + \ldots = \frac{1}{2}A_0 + \frac{\beta^2}{\pi}\Big\{\frac{\pi A_1}{2} - 2B_1\gamma' + D_1 - \frac{F_1}{\pi} + A_0\Big(2\rho^2\ln\frac{\rho}{\rho_0} + \\
+ 2\rho^2\gamma' - \rho^2\Big) - 2B_1\ln\frac{\rho}{\rho_0} + C_0\rho^2\left(\frac{1}{4} - \ln\frac{\rho}{\rho_0} - \gamma'\right) + \cos 2\lambda\,\Big[A_0\rho^2\left(\ln\frac{\rho}{\rho_0} + \gamma'\right) + \\
+ C_0\rho^2\left(\frac{1}{6} - \ln\frac{\rho}{\rho_0} - \gamma'\right) + D_1 - \frac{2E_2}{\rho^2} - \frac{4H_2}{\rho^2}\Big] - \cos 4\lambda\left(\frac{C_0}{12}\rho^2 + \frac{F_1}{2} + \frac{4H_2}{\rho^2} + \frac{24M_3}{\rho^4}\right)\Big\}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь введено обозначение

$$\gamma' = \ln\frac{\gamma\rho_0\beta}{\sqrt{2}} \tag{3.6}$$

При $\beta=0$, что соответствует случаю плоского листа с круговым отверстием, получаем

$$\psi_0=\operatorname{Im}\sigma=\frac{2A_0}{\pi}\left(\ln\frac{\rho}{\rho_0}+\gamma'\right)-\frac{C_0}{\pi}(1+\cos 2\lambda)-\frac{2F_1}{\pi}\,\frac{\cos 2\lambda}{\rho^2} \tag{3.7}$$

$$w_0=\operatorname{Re}\sigma=\frac{1}{2}A_0 \tag{3.8}$$

Заметим, что $\sigma=\mathrm{const}$ представляет решение (1.14). Поэтому, добавляя к (3.2) постоянную

$$\sigma_*=-\frac{1}{2}A_0$$

получим $\operatorname{Re}\sigma=w=0$ при $\beta=0$, как и требуется.

Постоянные A_0, C_0, F_0 определяем теперь по условиям обращения в нуль усилий S_ρ и S_λ на контуре отверстия; это, как в задаче Кирша, приводит к условиям

$$S_\rho=\frac{1}{2}h(p+q)+\frac{1}{2}h(p-q)\cos 2\lambda-$$
$$-\frac{D}{h}\sqrt{\frac{12(m^2-1)}{m^2}}\left[\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)\psi_0\right]_{\rho=\rho_0}=0$$

$$S_{\rho\lambda}=-\frac{1}{2}h(p-q)\sin 2\lambda+\frac{D}{h}\sqrt{\frac{12(m^2-1)}{m^2}}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi_0\right]_{\rho=\rho_0}=0 \tag{3.9}$$

Первая группа слагаемых

$$\frac{1}{2}h(p+q)+\frac{1}{2}h(p-q)\cos 2\lambda,\qquad -\frac{1}{2}h(p-q)\sin 2\lambda$$

здесь определяет значение усилий S_ρ и $S_{\rho\lambda}$ при отсутствии отверстия. Вторая группа слагаемых в (3.9), составляемая по формулам (1.13), определяет искажение, которое претерпевает равномерно напряженное плоское поле при внесении отверстия. Из (3.9) находим

$$A_0=\frac{\pi\rho_0^2}{4Eh}\sqrt{\frac{12(m^2-1)}{m^2}}(p+q),\qquad C_0=\frac{\pi\rho_0^2}{2Eh}\sqrt{\frac{12(m^2-1)}{m^2}}(p-q)$$
$$F_1=-\frac{\pi\rho_0^4}{8Eh}\sqrt{\frac{12(m^2-1)}{m^2}}(p-q) \tag{3.10}$$

Постоянными A_1, F_2, C_1 распорядимся теперь так, чтобы слагаемые в выражении усилий, содержащие множитель β^2, обращались в нуль при $\rho=\rho_0$; для этого потребуем, чтобы

$$\left[\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)\psi_1\right]_{\rho=\rho_0}=0,\qquad \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi_1\right)_{\rho=\rho_0}=0 \tag{3.11}$$

получим

$$A_1=\frac{\pi\rho_0^2}{2}\left(A_0-\frac{1}{2}C_0\right),\quad C_1=\frac{\pi\rho_0^2}{2}(C_0-A_0),\quad F_2=-\frac{\pi\rho_0^4}{8}(C_0-A_0) \tag{3.12}$$

При этом определении постоянных с точностью до величин порядка $\beta^2\rho_0^2$ включительно на контуре отверстия будут выполнены условия

$$S_\rho=0,\qquad S_{\rho\lambda}=0 \tag{3.13}$$

а при $\beta=0$ решение задачи будет совпадать с решением задачи Кирша.

Теперь можно определить в области, примыкающей к контуру отверстия, усилие S_λ:

$$S_\lambda = \frac{1}{2} h(p+q) - \frac{1}{2} h(p-q)\cos 2\lambda - \frac{D}{h}\sqrt{\frac{12(m^2-1)}{m^2}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} \tag{3.14}$$

Вычисление дает

$$\frac{1}{h}S_\lambda = \frac{1}{2}(p+q)\left(1+\frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) - \frac{1}{2}(p-q)\left(1+\frac{3\rho_0^4}{\rho^4}\right)\cos 2\lambda + \tag{3.15}$$

$$+\sqrt{\frac{3(m^2-1)}{m^2}}\frac{\pi\rho_0^2}{4ah}\left[\left(1+\frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right)q - \frac{1}{4}(p-3q)\left(1+\frac{3\rho_0^4}{\rho^4}\right)\cos 2\lambda\right] + \ldots$$

Здесь вместо β^2 подставлено значение (2.3). В частности, на контуре отверстия получаем

$$\left(\frac{S_\lambda}{h}\right)_{\rho=\rho_0} = p+q-2(p-q)\cos 2\lambda + \sqrt{\frac{3(m^2-1)}{m^2}}\frac{\pi\rho_0^2}{4ah}[2q-(p-3q)\cos 2\lambda] \tag{3.16}$$

Рассмотрим, например, случай цилиндра, снабженного днищами и находящегося под постоянным внутренним давлением p_0; при отсутствии отверстия имели бы

$$p = \frac{p_0 a}{2h}, \qquad q = \frac{p_0 a}{h} \tag{3.17}$$

и по (3.16) получаем

$$\left(\frac{S_\lambda}{h}\right)_{\rho=\rho_0} = \frac{p_0 a}{h}\left[\frac{3}{2} + \cos 2\lambda + \sqrt{\frac{3(m^2-1)}{m^2}}\frac{\pi\rho_0^2}{4ah}\left(2+\frac{5}{2}\cos 2\lambda\right)\right] \tag{3.18}$$

При отсутствии кривизны коэффициент концентрации напряжения у отверстия в этом случае равен 2.5. При наличии кривизны этот коэффициент умножается на

$$1 + \frac{2.3}{3}\frac{\rho_0^2}{ah} \tag{3.19}$$

Перейдем к рассмотрению напряжений, возникающих вследствие изгиба оболочки; эти напряжения обращаются в нуль вместе с кривизной. Потребуем прежде всего, чтобы изгибающий момент G_ρ на контуре отверстия обращался в нуль. Вычисляя G_ρ по (2.13) и (3.5), приравниваем нулю свободный член и коэффициенты при $\cos 2\lambda$, $\cos 4\lambda$; получаем три уравнения, которые наряду с постоянными A_0, C_0, F_1, определенными выше по (3.10), содержат пять неизвестных

$$B_1, \quad D_1, \quad E_2, \quad H_2, \quad M_3 \tag{3.20}$$

и мы располагаем еще двумя константами, чтобы удовлетворить краевым условиям, относящимся к усилию Q_ρ^*. Выражение для Q_ρ^* надо составить по (2.13) и (3.5). Два недостающих уравнения для определения неизвестных (3.20) получим теперь, приравняв нулю коэффициенты при $\cos 2\lambda$ и $\cos 4\lambda$ в выражении Q_ρ^* при $\rho=\rho_0$. Свободный член в этом выражении оказывается при $\rho=\rho_0$ равным

$$(Q_\rho^*)_{\rho=\rho_0} = -\frac{D\beta^2}{\pi}8\left(A_0 - \frac{C_0}{2}\right) = -\frac{\rho_0 h}{2a}q \tag{3.21}$$

Равнодействующая перерезывающих усилий поэтому окажется равной

$$2\pi\rho_0 (Q_\rho^*)_{\rho=\rho_0} = -\pi\rho_0^2 \frac{qh}{a} = -\pi\rho_0^2 p_0$$

Этого следовало ожидать, так как перерезывающие усилия должны уравновешивать равнодействующую давлений по площади отверстия.

Остается определить нормальные напряжения по контуру отверстия, создаваемые изгибающим моментом $G_\lambda = \frac{\sigma_\lambda' h^2}{6}$, где σ_λ' — максимальное значение изгибных напряжений (на наружных волокнах). Для этого должны быть определены предварительно неизвестные (3.20). Опуская это вычисление, приводим лишь окончательный результат:

$$\sigma_\lambda' = -\frac{3\rho_0^2}{4ah}\frac{m+1}{m}\left[4q\gamma' + \frac{5}{2}q - \frac{1}{2}p - \cos 2\lambda\left(\frac{p}{6}\frac{7m+5}{3m+1} - \frac{q}{6}\frac{13m+23}{3m+1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2(m-1)}{3m+1}(3q-p)\gamma'\right) + \frac{1}{2}(p-q)\frac{4m-3}{4m+3}\cos 4\lambda\right] \qquad (3.22)$$

Если, например, напряжения p и q определены по (3.17), то, принимая $\frac{1}{m} = 0.3$ и замечая, что при этом

$$\gamma' = \ln\frac{\rho_0}{\sqrt{ah}} - 0.213$$

получим

$$\sigma_\lambda' = -\frac{q\rho_0^2}{ah}\left[3.9\ln\frac{\rho_0}{\sqrt{ah}} + 1.361 + \right.$$
$$\left. + \cos 2\lambda\left(0.996 - 1.035\ln\frac{\rho_0}{\sqrt{ah}}\right) - 0.154\cos 4\lambda\right] \qquad (3.23)$$

Добавочные нормальные напряжения, обусловленные наличием кривизны, равномерно распределенные по толщине оболочки по (3.16), будут

$$\sigma_\lambda'' = 1.29\frac{\rho_0^2 q}{ah} \qquad (3.24)$$

Значения этих напряжений, а также значения изгибных напряжений по контуру отверстия для некоторых значений параметра $\rho_0^2/2h$ приведены в таблице

$\frac{\rho_0}{\sqrt{ah}}$	$-\sigma_\lambda'/q$	$-\sigma_\lambda'/q$	σ_λ''/q	σ_λ''/q
	$\lambda=0$	$\lambda=\pi/2$	$\lambda=0$	$\lambda=\pi/2$
0.5	−0.055	0.786	1.458	−0.162
0.4	0.065	0.683	0.932	−0.104
0.3	0.112	0.514	0.523	−0.058
0.2	0.095	0.307	0.233	−0.009
0.1	0.044	0.111	0.058	−0.006

Поступило в редакцию
25 III 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

A. I. LOURYE. CONCENTRATION OF STRESSES IN THE VICINITY OF AN APERTURE IN THE SURFACE OF A CIRCULAR CYLINDER

The paper gives a generalization of the well-known Kirsch problem of the concentration of stresses in a plate with a circular aperture in the case of such an aperture in a plate bent into a cylindrical surface.

The approximate solution obtained satisfies all the conditions on the contour of the aperture, if the parameter ρ_0^2/ah may be taken as small (ρ_0 is the radius of the aperture; a is the radius of the cylinder; h is the thickness of the wall of the cylinder). Employed in the solution is the complex stress function, whose real and imaginary parts define respectively the radial displacement of points of the shell and the function analogous to the Airy function in the plane problem of the theory of elasticity. The distortion of the original given stressed state of the shell in the region of the aperture tends towards zero the farther from the aperture we move.

The distribution of normal stresses along the contour of the aperture is given by formulae (3.15) for stresses uniformly distributed through the thickness of the wall, and (3.22) for the bending stresses. Numerical data for the case of a cylinder with closed ends and subjected to a constant internal pressure are given in tabular form at the end of the paper.