

ПЛОСКАЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА
ПЛАСТИЧЕСКИЕ ОБЛАСТИ У КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ
В ПЛАСТИНКАХ И БАЛКАХ¹

Л. А. Галин

(Москва)

При растяжении пластинки, обладающей отверстием, в его окрестности имеет место концентрация напряжений. При достаточно большой величине усилий, действующих на пластинку, здесь возникают области пластических деформаций. В настоящей работе произведено определение формы пластических областей у круговых отверстий, причем найдены напряжения в пластической и упругой областях. Подобные задачи могут быть двух видов: в одном случае упругая область всюду граничит с пластической областью, в другом случае на контуре упругой области могут быть участки поверхности, свободной от усилий, и участки, граничащие с пластической областью. Здесь рассмотрены задачи первого вида.

Следует заметить, что рассматриваемая упруго-пластическая задача принадлежит к числу задач смешанного типа, когда в одной области имеют место уравнения эллиптического, а в другой гиперболического типа. При этом граница между областями подлежит определению. Что касается области, где имеют место уравнения гиперболического типа (область пластических деформаций), то в ней решение (в данном случае величины напряжений) может считаться известным. Оно определяется на основании значений на контуре отверстия.

Таким образом вопрос сводится к следующей задаче: на некотором, подлежащем определению контуре, ограничивающем упругую область, даны три компоненты напряжения. Кроме того, известны значения напряжений на бесконечности (размеры пластинки предполагаются достаточно большими по сравнению с размерами отверстия). Предполагается, что связь между напряжениями и деформациями выражается диаграммой Прандтля. При этом в пластической области имеют место уравнения теории пластичности Сен-Венана для плоского деформированного состояния. Таким образом пластинка или должна быть достаточно толстой, или должна находиться в условиях плоской деформации.

До сих пор было известно решение подобной упруго-пластической задачи только для осесимметричного случая (см., например, Надаи^[1]).

¹ Доложено на 2-м Советании по теории упругости, строительной механике и теории пластичности 25—28 марта 1946 в Институте механики Акад. Наук СССР.

1. Растяжение пластинки с круговым отверстием

Будем рассматривать растяжение пластинки двумя силами, направленными по осям x и y , величина которых такова, что возникает пластическая область, целиком окружающая контур отверстия (фиг. 1).

Компоненты напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} удовлетворяют условиям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

При этом в упругой области имеет место условие совместности, которое приводит к выражению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (1.2)$$

В пластической области $\tau_{\max} = k$ и, следовательно,

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \quad (1.3)$$

Будем обозначать напряжения в пластической области посредством индекса 1, а напряжения в упругой области посредством индекса 2, помещенных сверху. Имеем следующие условия.

На контуре отверстия, — окружности радиуса R

$$\tau_{r_1}^{(1)} = 0, \quad \sigma_r^{(1)} = p \quad (1.4)$$

Если отверстие свободно от усилий, то $\sigma_r^{(1)} = 0$.

На границе между пластической и упругой областью напряжения непрерывны:

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)}, \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)} \quad (1.5)$$

Кроме того, на бесконечности (в упругой области)

$$\sigma_{x\infty}^{(2)} = A, \quad \sigma_{y\infty}^{(2)} = B, \quad \tau_{y_{1\infty}}^{(2)} = 0 \quad (1.6)$$

Этот случай является достаточно общим, так как при наличии на бесконечности касательных напряжений можно всегда за направление осей координат выбрать направление главных осей, в результате чего компоненты напряжения на бесконечности будут иметь вид (1.6).

Введем функцию напряжений φ , удовлетворяющую уравнениям (1.1), причем

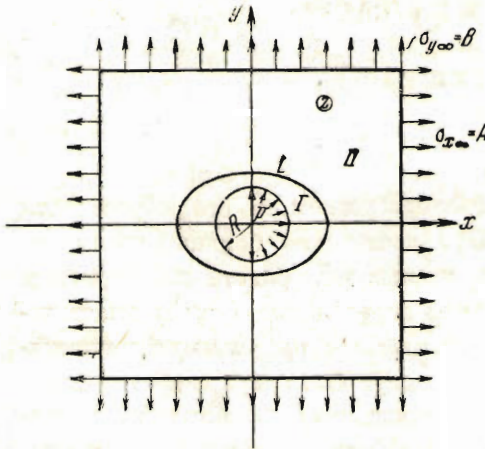
$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (1.7)$$

Из уравнений (1.2) и (1.3) следует, что в упругой области функция напряжений, которую будем обозначать φ_2 , удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Delta \varphi_2 = 0 \quad (1.8)$$

а в пластической области функция напряжений φ_1 — уравнению

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4k^2 \quad (1.9)$$



Фиг. 1.

Кроме того, условие непрерывности напряжений (1.5) приводит к тому, что на границе L между упругой и пластической областью должно иметь место

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \quad (1.10)$$

Определим функцию напряжений в пластической области.

Если использовать выражение составляющих напряжения в полярных координатах, учтя при этом, что φ_1 при данной нагрузке не зависит от угла θ , то получим

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}, \quad \sigma_\theta^{(1)} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = 0 \quad (1.11)$$

Уравнение (1.9) может быть записано в виде

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2$$

Или на основании (1.11)

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} \right)^2 = 4k^2$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} = \pm 2k$$

Функция, удовлетворяющая этому уравнению и условию (1.4), будет

$$\varphi_1 = kr^2 \lg \left(\frac{r}{R} \right) + \left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2} \right) r^2. \quad (1.12)$$

Компоненты напряжения в пластической области

$$\sigma_r^{(1)} = p + 2k \lg \frac{r}{R}, \quad \sigma_\theta^{(1)} = k + p + 2k \lg \frac{r}{R}, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = 0$$

Весьма существенно, что в данном случае φ_1 функция бигармоническая¹. Она удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Delta \varphi_1 = 0$$

и может быть представлена в форме

$$\varphi_1 = \operatorname{Re} \left[\bar{z} \left(k \lg \frac{z}{R} + \left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2} \right) z \right) \right] = \operatorname{Re} [\bar{z} \varphi_1^*(z)] \quad (1.13)$$

Образую бигармоническую функцию

$$\varphi_3 = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (1.14)$$

¹ Функция напряжений в пластической области будет бигармонической также в следующих случаях;

а) Пластическая деформация клина (напряжения не зависят от r)

$$\varphi_1 = kr^2 \theta$$

б) Случай постоянных напряжений

$$\varphi_1 = Ax^2 + Ey^2 + (\sqrt{k^2 - (B-A)^2}) xy$$

Употребляя метод, аналогичный примененному в данной статье, можно, пользуясь этими функциями, построить ряд решений плоских упруго-пластических задач.

Если представить φ_3 в следующем виде:

$$\varphi_3 = \operatorname{Re} [\bar{z}\varphi_3^*(z) + \chi_3^*(z)] \quad (1.15)$$

то будем иметь [2]

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = 4\operatorname{Re} [\Phi_3^*(z)] \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = 2[\bar{z}\Phi_3^{*\prime}(z) + \Psi_3^*(z)] \quad (1.17)$$

Здесь

$$\Phi_3^*(z) = \varphi_3^{*\prime}(z), \quad \Psi_3^*(z) = \chi_3^{*\prime}(z) \quad (1.18)$$

Установим, к каким выражениям на бесконечности стремятся (1.16) и (1.17). Имеем $z \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = \sigma_{y\infty}^{(2)} + \sigma_{x\infty}^{(2)} = B + A$$

С другой стороны, на основании (1.12) находим

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[kr^2 \lg \frac{r}{R} + \left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2} \right) r^2 \right] = 2k + 2p + 4k \lg \frac{r}{R} \quad (1.19)$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = B + A - 2k - 2p - 4k \lg \frac{r}{R} \quad (1.20)$$

Точно так же имеем при $z \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} = \sigma_{y\infty}^{(2)} - \sigma_{x\infty}^{(2)} = B - A \quad (1.21)$$

С другой стороны, пользуясь выражением (1.13) и (1.17), будем иметь

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} = 2k \frac{\bar{z}}{z} = 2ke^{-2i\theta} \quad (\theta = \arg z) \quad (1.22)$$

На основании (1.21) и (2.22)

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = B - A - 2ke^{-2i\theta} \quad (1.23)$$

На контуре L вследствие непрерывности напряжений и на основании (1.7)

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0 \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.25)$$

Отобразим область, внешнюю по отношению к L , на внешность единичного круга ($|\zeta| > 1$) так, чтобы бесконечно удаленная точка одной области переходила в бесконечно удаленную точку другой. Контур единичного круга будем обозначать буквой γ .

Тогда отображающая функция $\omega(\zeta)$ может быть представлена в следующем виде:

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + g(\zeta) \quad (1.25)$$

Здесь $g(\zeta)$ некоторая функция, регулярная вне γ , причем можно положить $g(\infty) = 0$.

Если обозначить

$$\Phi_3(\zeta) = \Phi_3^*(\omega(\zeta)), \quad \Psi_3(\zeta) = \Psi_3^*(\omega(\zeta)) \quad (1.27)$$

то из (1.16) и (1.17) получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = 4 \operatorname{Re} \Phi_3(\zeta) \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = 2 \left[\frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi_3'(\zeta) + \Psi_3(\zeta) \right] \quad (1.29)$$

Точкам на контуре L будут соответствовать точки на контуре γ . Поэтому вследствие (1.25) и на основании (1.28) и (1.29) будем иметь на γ

$$4 \operatorname{Re} \Phi_3(\zeta) = 0 \quad (1.30)$$

$$2 \left[\frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi_3'(\zeta) + \Psi_3(\zeta) \right] = 0 \quad (1.31)$$

При $\zeta \rightarrow \infty$ на основании (1.20) и (1.26) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} &= 4k \left(\frac{B}{4k} + \frac{A}{4k} - \frac{1}{2} - \frac{p}{2k} + \lg R - \lg |z| \right) = \\ &= 4k \left(\frac{B}{4k} + \frac{A}{4p} - \frac{1}{2} - \frac{p}{2k} + \lg R - \lg c - \lg |\zeta| \right) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Точно так же при $\zeta \rightarrow \infty$ из (1.23) получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = B - A - 2ke^{-2i\theta_1} \quad (\theta_1 = \arg \zeta_1) \quad (1.33)$$

Из (1.32) и (1.33) имеем условия для определения функций $\Phi_3(\zeta)$, $\Psi_3(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$

$$4 \operatorname{Re} [\Phi_3(\zeta)] = \begin{cases} 0 & \text{на } \gamma \\ 4k \left(\frac{B}{4k} + \frac{A}{4k} - \frac{1}{2} - \frac{p}{2k} + \lg R - \lg c - \lg |\zeta| \right) & \text{для } \zeta \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.34)$$

$$2 \left[\frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi_3'(\zeta) + \Psi_3(\zeta) \right] = \begin{cases} 0 & \text{на } \gamma \\ B - A - 2ke^{-2i\theta_1} & \text{для } \zeta \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.35)$$

На основании условия (1.34) определяется $\Phi_3(\zeta)$. Эта функция может быть представлена следующим образом:

$$\Phi_3(\zeta) = -k \lg \zeta + h(\zeta)$$

Здесь $h(\zeta)$ — функция, регулярная вне единичного круга.

Из (1.34) следует, что действительная часть $h(\zeta)$ равна нулю на контуре единичного круга и ограничена повсюду, в том числе и на бесконечности.

На основании этого $h(\zeta) = 0$. Таким образом

$$\Phi_3(\zeta) = -k \lg \zeta \quad (1.36)$$

Так как $h(\zeta) = 0$, то действительная часть $\Phi_3(\zeta)$ на бесконечности равна $-k \lg \zeta$. Поэтому на основании (1.34) будем иметь

$$\frac{B}{4k} + \frac{A}{4k} - \frac{1}{2} - \frac{p}{2k} + \lg R - \lg c = 0$$

Отсюда определяется величина c

$$c = R \exp \left\{ \frac{B}{4k} + \frac{A}{4k} - \frac{1}{2} - \frac{p}{2k} \right\} \quad (1.37)$$

Подставляя (1.35) в одно из условий (1.35), получим при $\zeta \rightarrow \infty$

$$2 \left[-\frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)} k \frac{1}{\zeta} + \Psi_3(\zeta) \right] = B - A - 2ke^{-2i\theta_1} \quad (1.38)$$

Но согласно (1.26) в этом случае

$$\omega(\zeta) = c\zeta, \quad \omega'(\zeta) = c \quad (1.39)$$

На основании (1.38) при $\zeta \rightarrow \infty$

$$2 \left[-\frac{c\bar{\zeta}}{c} k \frac{1}{\zeta} + \Psi_3(\zeta) \right] = B - A - 2ke^{-2i\theta_1}$$

Так как

$$2k \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} = 2ke^{-2i\theta_1} \quad (\theta_1 = \arg \zeta)$$

то при $\zeta \rightarrow \infty$

$$\Psi_3(\zeta) = \frac{B-A}{2} \quad (1.40)$$

Из (1.35) следует, что для определения $\Psi_3(\zeta)$, регулярной вне единичного круга и равной $(B-A)/2$ на бесконечности, необходимо воспользоваться условием

$$[\Psi_3(\zeta)]_r = \left[k \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \frac{1}{\zeta} \right]_r \quad (1.41)$$

Функция $\omega(\zeta)$ может быть представлена в виде (1.26), причем

$$g(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\zeta^n} \quad (1.42)$$

Преобразуем выражение (1.41) следующим образом:

$$[\bar{\omega}(\bar{\zeta})]_r = \left[\frac{1}{k} \omega'(\zeta) \zeta \Psi_3(\zeta) \right]_r$$

Здесь правая часть представляет функцию, регулярную вне единичного круга, кроме бесконечно удаленной точки, где она имеет полюс первого порядка, так как на основании (1.39) и (1.40) при $\zeta \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{k} \omega'(\zeta) \zeta \Psi_3(\zeta) = \frac{1}{k} c \zeta \frac{B-A}{2} = \frac{B-A}{2k} c \zeta \quad (1.43)$$

Функция $\omega(\zeta)$ имеет следующую форму:

$$\omega(\zeta) = c\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\zeta^n}$$

причем вследствие симметрии контура L относительно оси x коэффициенты a_n действительны.

Следовательно, в силу того, что на контуре единичного круга $\bar{\zeta} = 1/\zeta$

$$[\bar{\omega}(\bar{\zeta})]_{\gamma} = c \frac{1}{\bar{\zeta}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{\zeta}^n$$

Итак, имеем

$$\left[c \frac{1}{\bar{\zeta}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{\zeta}^n \right]_{\gamma} = \left[\frac{1}{k} \omega'(\zeta) \zeta \Psi_3(\zeta) \right]_{\gamma} \quad (1.44)$$

В левой части под знаком суммы нужно взять только один член $a_1 \bar{\zeta}$. В самом деле, применим к обеим частям равенства (1.44), умноженным на ζ^{-m} , формулу Коши

$$\int_{\gamma} \left[c \frac{1}{\bar{\zeta}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{\zeta}^n \right] \frac{1}{\zeta^m} d\bar{\zeta} = \int_{\gamma} \left[\frac{1}{k} \omega'(\zeta) \zeta \Psi_3(\zeta) \right] \frac{1}{\zeta^m} d\zeta$$

Выражение $\omega'(\zeta) \zeta \Psi_3(\zeta)$ согласно (1.43) представляет функцию, регулярную вне единичного круга, кроме бесконечно удаленной точки, где она имеет полюс первого порядка. Поэтому интеграл в левой части будет равен нулю при всех $m > 1$. Если взять величину вычета рассматриваемой функции в бесконечно удаленной точке из (1.43), то придем к выводу, что в правой части коэффициенты должны быть следующими

$$a_1 = \frac{B-A}{2k}, \quad a_n = 0 \quad (n > 1)$$

Бесконечная последовательность рассмотренных интегралов вполне определяет функцию, находящуюся под знаком интеграла в левой части равенства. Поэтому контурные значения выражений в правой и левой частях (1.44) будут действительно совпадать. Таким образом, имеем

$$\omega(\zeta) = c \zeta + \frac{B-A}{2k} c \frac{1}{\zeta} \quad (1.45)$$

Эта функция отображает внешность эллипса на внешность круга. Таким образом, граница между пластической и упругой областью будет эллипсом.

Функция $\Psi_3(\zeta)$, совпадающая на контуре единичного круга согласно (1.41) со значением

$$k \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \frac{1}{\bar{\zeta}}$$

будет

$$\Psi_3(\zeta) = \left[k \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \frac{1}{\bar{\zeta}} \right]_{\gamma} = k \frac{c[\zeta^{-1} + \beta\zeta]}{c[1 - \beta\zeta^{-2}]} \frac{1}{\bar{\zeta}} = k \frac{1 + \beta\zeta^2}{\zeta^2 - \beta} \quad (1.46)$$

При выводе этой формулы принято во внимание, что

$$[\bar{\zeta}]_{\gamma} = \left[\frac{1}{\zeta} \right]_{\gamma}$$

Кроме того, введено обозначение

$$\frac{B-A}{2k} = \beta \quad (1.47)$$

Полюсы $\Psi_3(\zeta)$ будут в точках $+\beta$, $-\beta$. Эти точки находятся внутри единичного круга, так как $B-A < 2k$. В самом деле, при $B-A = 2k$

$$\tau_{\max \infty} = \frac{B-A}{2} = k$$

и следовательно, вся пластинка будет в пластическом состоянии, что, очевидно, не может иметь места.

Таким образом $\Psi_3(\zeta)$ действительно будет регулярной во внешности единичного круга.

Установим теперь пределы применения полученного решения. Для того чтобы упругая область повсюду граничила с пластической, нужно, чтобы круг радиуса R , являющийся контуром отверстия, лежал внутри эллипса — границы между областями. Установим, когда эллипс коснется круга.

Из (1.45), подставляя сюда (1.37), получим

$$\omega(\zeta) = \left(\zeta + \frac{\beta}{\zeta} \right) R \exp \left(\frac{B}{4k} + \frac{A}{4k} - \frac{1}{2} - \frac{p}{2k} \right) \quad (1.48)$$

Касание произойдет в симметричных точках, расположенных на оси y , которым соответствуют $\zeta = +i$, $\zeta = -i$.

Имеем

$$\omega(i) = i(1-\beta) R \exp \left(\frac{B}{4k} + \frac{A}{4k} - \frac{1}{2} - \frac{p}{2k} \right)$$

Необходимо, чтобы было выполнено условие

$$iR < \omega(i) = i(1-\beta) R \exp \left(\frac{B}{4k} + \frac{A}{4k} - \frac{1}{2} - \frac{p}{2k} \right)$$

Это приводит к неравенству, которое должно соблюдаться:

$$\left(1 - \frac{B}{2k} + \frac{A}{2k} \right) \exp \left(\frac{B}{4k} + \frac{A}{4k} - \frac{1}{2} - \frac{p}{2k} \right) > 1 \quad (1.49)$$

Выразим теперь ζ на основании z

$$\zeta = \frac{z}{2c} + \sqrt{\left(\frac{z}{2c} \right)^2 - \beta} \quad (1.50)$$

Подставив это выражение в (1.33) на основании (1.27), найдем для $\Phi_3^*(z)$:

$$\Phi_3^*(z) = -k \lg \left(\frac{z}{2c} + \sqrt{\left(\frac{z}{2c} \right)^2 - \beta} \right) \quad (1.51)$$

Определим теперь величину $\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(2)}$.

Функция напряжений в упругой области φ_2 может быть представлена в форме

$$\varphi_2 = \operatorname{Re} [z\varphi_2^*(z) - \chi_2^*(z)] \quad (1.52)$$

Обозначим также

$$\Phi_2^*(z) = \varphi_2^{**}(z), \quad \Psi_3^*(z) = \frac{1}{4} \chi_2^{**}(z) \quad (1.53)$$

в силу того, что $\varphi_3 = \varphi_2 - \varphi_1$ и, следовательно, $\varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_1$, будет также иметь место $\varphi_2^* = \varphi_3^* + \varphi_1^*$, где φ_1^* и φ_2^* определяются согласно (1.13) и (1.15).

Это приводит к равенству

$$\Phi_2^*(z) = \Phi_3^*(z) + \Phi_1^*(z) \quad (1.54)$$

где

$$\Phi_1^*(z) = \varphi_1^{**}(z) \quad (1.55)$$

Сумма нормальных напряжений упругой области следующим образом выражается на основании $\Phi_2^*(z)$:

$$\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(2)} = 4 \operatorname{Re} [\Phi_2^*(z)] \quad (1.56)$$

На основании (1.13) и (1.55)

$$\Phi_1^*(z) = \frac{d}{dz} \left[kz \lg \frac{z}{R} + \left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2} \right) z \right] = kz \lg \frac{z}{R} + \left(\frac{p}{2} + \frac{k}{2} \right) z \quad (1.57)$$

Подставляя в (1.54) значение $\Phi_3^*(z)$ и $\Phi_1^*(z)$ из (1.51) и (1.57), получаем:

$$\Phi_2^*(z) = k \lg \frac{z}{R} + \left(\frac{p}{2} + \frac{k}{2} \right) z - k \lg \left(\frac{z}{2c} + \sqrt{\left(\frac{z}{2c} \right)^2 - \beta} \right)$$

Преобразуем это выражение, пользуясь формулой (1.37) для c . В результате найдем

$$\Phi_2^*(z) = \frac{A}{4} + \frac{B}{4} - k \lg \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \beta \frac{c^2}{z^2}} \right) \quad (1.58)$$

Отсюда на основании (1.56) получим

$$\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(2)} = A + B + 4k \operatorname{Re} \left[\lg \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \beta \frac{c^2}{z^2}} \right) \right] \quad (1.59)$$

Здесь c определяется согласно (1.37), а β согласно (1.47).

Кроме того, имеем в упругой области

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(2)} - \sigma_x^{(2)} + 2i\tau_{xy}^{(2)} &= \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.60)$$

При этом на основании (1.29)

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = 2 \left[\frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi_3'(\zeta) + \Psi_3(\zeta) \right]$$

Подставляя сюда значения $\bar{\omega}(\zeta)$, $\omega'(\zeta)$ из (1.26), $\Phi_3'(\zeta)$ из (1.35) и $\Psi_3(\zeta)$ из (1.46), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = 2 \left[-k \frac{1}{\zeta} \frac{c \left(\bar{\zeta} + \beta \frac{1}{\bar{\zeta}} \right)}{c \left(1 - \beta \frac{1}{\zeta^2} \right)} + k \frac{1 - \beta \zeta^2}{\zeta^2 - \beta} \right] \quad (1.61)$$

С другой стороны, на основании (1.22)

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} = 2k e^{-2i\theta} = 2k \frac{\bar{z}}{z} \quad (1.62)$$

Подставляя (1.61) и (1.62) в (1.60), найдем

$$\sigma_y^{(2)} - \sigma_x^{(2)} + 2i\tau_{xy}^{(2)} = 2k \left(\frac{1 + \beta\zeta^2}{\zeta^2 - \beta} - \frac{\zeta}{\zeta^2 - \beta} \frac{\bar{z}}{c} + \frac{\bar{z}}{z} \right)$$

При этом принято во внимание, что

$$\bar{\zeta} + \beta \frac{1}{\zeta} = \frac{\bar{z}}{c}$$

Выражая ζ согласно (1.50), получим окончательно

$$\sigma_y^{(2)} - \sigma_x^{(2)} + 2i\tau_{xy}^{(2)} = 2k \left(\frac{2c^2 - 2c^2\beta^2 + (\beta z - \bar{z})(z + \sqrt{z^2 - 4c^2\beta})}{z(z + \sqrt{z^2 - 4c^2\beta})} + \frac{\bar{z}}{z} \right) \quad (1.63)$$

Здесь c определяется согласно (1.37), а β согласно (1.47).

Выражения (1.59) и (1.63) дают возможность определить все компоненты напряжений. Значения $\sigma_x^{(2)}$, $\sigma_y^{(2)}$ и $\tau_{xy}^{(2)}$, выраженные через переменные x и y , довольно громоздки, и поэтому для вычислений удобнее пользоваться формулами (1.59) и (1.63).

Определим теперь перемещения в упругой области. Обозначая перемещения по осям x и y соответственно через u и v , будем иметь

$$u + iv = \kappa\varphi_2^*(z) - z\bar{\varphi}_2^{*\prime}(\bar{z}) - \bar{\psi}_2^*(\bar{z}) \quad (1.64)$$

где

$$\varphi_2^*(z) = \int \Phi_2^*(z) dz, \quad \psi_2^*(z) = \int \Psi_2^*(z) dz \quad (1.65)$$

Постоянные интегрирования при этом не существенны.

Рассмотренный случай упруго-пластической деформации соответствует собственно случаю плоского деформированного состояния, поэтому для κ должно быть принято значение

$$\kappa = 3 - 4\sigma$$

где σ — коэффициент Пуассона. В случае достаточно тонкой пластинки нужно было бы взять величину

$$\kappa^* = \frac{3 - \sigma}{1 - \sigma}$$

Следует, впрочем, заметить что значения κ и κ^* довольно близки. Так, для $\sigma = 0.3$

$$\kappa = 1.80, \quad \kappa^* = 2.07$$

Определим функцию $\varphi_2^*(z)$. Выполняя интегрирование, найдем на основании (1.58)

$$\begin{aligned} \varphi_2^*(z) &= \int \Phi_2^*(z) dz = \int \left[\frac{A+B}{4} - k \lg \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \beta c^2 \frac{1}{z^2}} \right) \right] dz = \\ &= \int \left[\frac{A+B}{4} - k \lg(c\sqrt{\beta}) + k \lg z - k \operatorname{Ar ch} \frac{z}{2c\sqrt{\beta}} \right] dz = \\ &= \left[\frac{A+B}{4} - k \lg(c\sqrt{\beta}) \right] z - k 2c\sqrt{\beta} \left[\frac{z}{2c\sqrt{\beta}} \operatorname{Ar ch} \frac{z}{2c\sqrt{\beta}} - \sqrt{\frac{z^2}{4c^2\beta} - 1} \right] + k z \lg z \end{aligned}$$

Или после некоторых преобразований, раскрывая значение $\text{Ar ch}(z/2c\sqrt{\beta})$, получим

$$\varphi_2^*(z) = \frac{A+B}{4} + k \sqrt{1 - \frac{4c^2\beta}{z^2}} - kz \lg \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \beta c^2 \frac{1}{z^2}} \right) \quad (1.66)$$

Из равенства $\varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_1$ следует, что функция $\Psi_2^*(z) = \Psi_3^*(z) + \Psi_1^*(z)$. Но $\Psi_1^*(z) = 0$, как это следует из (1.13), так как в данном случае $\chi_1^*(z) = 0$ и $\Psi_1^*(z) = \chi_1^{*''}(z)$. Поэтому

$$\Psi_2^*(z) = \Psi_3^*(z)$$

Для определения $\psi_2^*(z)$ выполним предварительно следующие преобразования:

$$\Psi_2^*(z) = \Psi_3^*(z) = k \frac{1 + \beta \zeta^2}{\zeta^2 - \beta} = k \left(\beta + (1 + \beta^2) \frac{1}{\zeta^2 - \beta} \right) \quad (1.67)$$

На основании (1.59)

$$\frac{1}{\zeta^2 - \beta} = \frac{1}{[z/2c + \sqrt{(z/2c)^2 - \beta}]^2 - \beta}$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{1}{[z/2c + \sqrt{(z/2c)^2 - \beta}]^2 - \beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - 4c^2\beta}} - 1 \right) \quad (1.68)$$

Подставляя (1.68) в (1.67), получим

$$\begin{aligned} \psi_2^*(z) &= \int \Psi_2^*(z) dz = \int k \left[\beta + (1 + \beta^2) \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - 4c^2\beta}} - 1 \right) \right] dz = \\ &= k\beta z + k(1 + \beta^2) \left[\frac{1}{2} \sqrt{z^2 - 4c^2\beta} - \frac{1}{2} z \right] \end{aligned}$$

Или после преобразований

$$\psi_2^*(z) = k\beta z + \frac{k}{2} (1 + \beta^2) \left(\sqrt{1 - \frac{4c^2\beta}{z^2}} \right) \quad (1.69)$$

Имеем, кроме того, из (1.58)

$$\bar{\varphi}_2^{**}(\bar{z}) = \bar{\Psi}_2^*(\bar{z}) = \frac{A+B}{4} - k \lg \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \beta c^2 \frac{1}{\bar{z}^2}} \right) \quad (1.70)$$

Подставляя (1.66), (1.69) и (1.70) в (1.64), получим

$$\begin{aligned} u + ic &= x\varphi_2^*(z) - z\bar{\varphi}_2^{**}(\bar{z}) - \bar{\psi}_2^*(\bar{z}) = \\ &= \frac{A+B}{4} (x-1)z - k\beta z + kz \sqrt{1 - \frac{4c^2\beta}{z^2}} + \frac{k}{2} (1 + \beta^2) \sqrt{1 - \frac{4c^2\beta}{z^2}} - \\ &- xkz \lg \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \beta c^2 \frac{1}{z^2}} \right) + kz \lg \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \beta c^2 \frac{1}{z^2}} \right) \quad (1.71) \end{aligned}$$

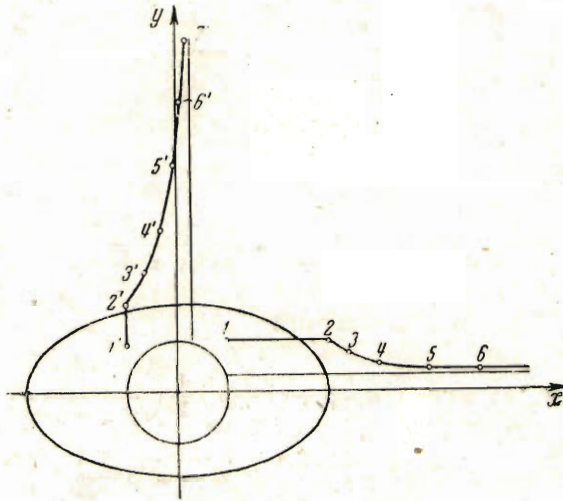
На основании полученных в этом разделе результатов был произведен ряд вычислений. Были определены формы границы между упругой и пластиче-

ской областью для следующих случаев: компонента напряжения $\sigma_{y\infty}$ во всех случаях равно $3k$, а компонента напряжения $\sigma_{x\infty}$ меняется.

Обозначая большую и малую полуоси эллипсов, являющихся границей между упругой и пластической областями, соответственно через a и b , приводим вычисленные значения a/R и b/R для ряда значений напряжения $\sigma_{x\infty}$

$\frac{\sigma_{x\infty}}{k}$	=	3.0	2.8	2.6	2.4	2.2	1.95
a/R	=	2.72	2.84	2.95	3.05	3.11	3.20
b/R	=	2.72	2.32	1.97	1.64	1.33	1.00

Предельное значение $\sigma_{x\infty}$, при котором эллипс касается контура отверстия, равно $1.95k$.



Фиг. 2.

Кроме того, для случая, когда $\sigma_{y\infty} = 3.0k$ и $\sigma_{x\infty} = 2.4k$, определены величины τ_{\max} на оси x и на оси y .

При этом для определения τ_{\max} была использована формула

$$|\tau_{\max}| = \frac{1}{2} |\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}|$$

На основании этих данных построен график (фиг. 2) значения τ_{\max}/k в точках, расположенных на оси x и на оси y

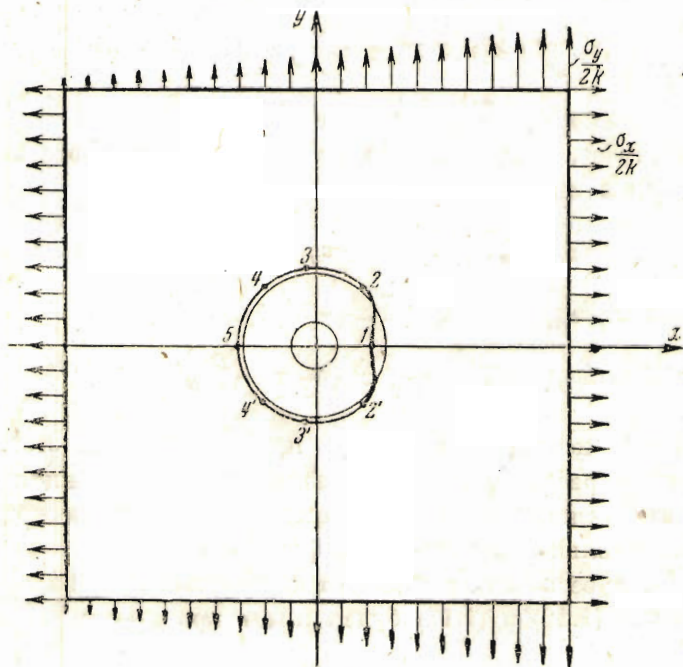
точки на оси x	1	2	3	4	5	6	
$\frac{\tau_{\max}}{k} =$	+1.000	+1.000	+0.728	+0.552	+0.426	+0.385	
точки на оси y	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'
$\frac{\tau_{\max}}{k} =$	+1.000	+1.000	+0.668	+0.360	+0.095	-0.045	-1.150

2. Балка с круговым отверстием

В рассмотренной выше задаче на бесконечности действовали постоянные напряжения; функция напряжений при $z \rightarrow \infty$ стремилась к выражению

$$\varphi_2 = \frac{B}{2} x^2 + \frac{A}{2} y^2$$

Если обратиться к более сложному случаю, когда напряжения при достаточном удалении от отверстия являются полиномами, то функция напряжения будет также полиномом выше чем второй степени.



Фиг. 3.

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда напряжения на бесконечности будут линейными функциями от x и y . С подобной формой напряженного состояния приходится иметь дело, например, в случае балки, на которую действуют растягивающие усилия и моменты. Один случай такой нагрузки изображен на фиг. 3.

Будем попережнему полагать, что пластинка обладает отверстием в форме круга радиуса R , центр которого совпадает с началом координат. На поверхности отверстия приложено давление p .

В этом случае при $z \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\varphi_2 = \operatorname{Re} [z (a_1 z^2 + a_2 z) + (a_3 z^3 + a_4 z^2)] \quad (2.1)$$

Допустим, что пластинка не обладает отверстием. В таком случае в начале координат при $z=0$ имели бы место напряжения $\sigma_x = A$ и $\sigma_y = B$. Мы считаем, что оси координат совпадают с направлением главных напряжений и поэтому $(\tau_{xy})_{z=0} = 0$.

Так как согласно формулам (1.16) и (1.67)

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re} \left[\frac{d}{dz} (a_1 z^2 + a_2 z) \right] = 4\operatorname{Re} [a_1 z + a_2]$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left[z \frac{d^2}{dz^2} (a_1 z^2 + a_2 z) + \frac{d^2}{dz^2} (a_3 z^3 + a_4 z^2) \right] = 2 [2a_1 \bar{z} + 6a_3 z + 2a_4]$$

то при $z=0$ имеем

$$B + A = 4a_3, \quad B - A = 4a_4 \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получим функцию φ_2 в следующей форме:

$$\varphi_2 = \operatorname{Re} \left[\bar{z} \left(a_1 z^2 + \frac{B+A}{4} z \right) + \left(a_2 z^3 + \frac{B-A}{4} z^2 \right) \right] \quad (2.3)$$

Здесь a_1 и a_2 — комплексные величины.

В частном случае, когда на бесконечности не действуют тангенциальные напряжения, будем иметь

$$\sigma_{x\infty} = A + Dy, \quad \sigma_{y\infty} = B + Fx \quad (2.4)$$

Тогда функция напряжений при $z \rightarrow \infty$ будет

$$\varphi_2 = \frac{A}{2} y^2 + \frac{B}{2} x^2 + \frac{F}{3} x^3 + \frac{D}{3} y^3 \quad (2.5)$$

В дальнейшем исследование будет произведено для этого последнего случая. Нетрудно рассмотреть также задачу, когда функция напряжений определяется выражением (2.3). Применительно к этому последнему случаю будут приведены только окончательные результаты.

Итак, пусть на бесконечности действует напряжение (2.4).

Тогда согласно (1.16) и (1.17) будем иметь при $z \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} &= B + A + Fx + Dy \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} &= B - A + Fx - Dy \end{aligned} \quad (2.6)$$

С другой стороны, согласно (1.19) и (1.22) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} &= 2k + 2p + 4k \lg \frac{r}{R} \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} &= 2ke^{-2i\theta} \quad (\theta = \arg z) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Образуюм функцию

$$\varphi_3 = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (2.8)$$

Будем иметь для нее согласно (2.6) и (2.7)

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = B + A + Fx + Dy - 2k - 2p - 4k \lg \frac{r}{R} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = B - A + Fx - Dy - 2ke^{-2i\theta} \quad (2.10)$$

Так как на контуре L — границе между упругой и пластической областями — напряжения непрерывны, то по аналогии с (1.24) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

На основании (2.9) и (2.11) находим следующие условия:

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = \begin{cases} 0 & \text{на } L \\ B + A - 2k - 2p + 4k \lg R + Fx - Dy - 4k \lg |z| & \text{для } z \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.12)$$

По аналогии с тем, как это было сделано в первом разделе, положим

$$\varphi_3 = \operatorname{Re} [z\varphi_3^*(z) + \chi_3^*(z)]$$

Если

$$\varphi_3^{*'}(z) = \Phi_3^*(z), \quad \chi_3^{*''}(z) = \Psi_3^*(z)$$

то

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = 4 \operatorname{Re} [\Phi_3^*(z)],$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = 2 [z\Phi_3^{*'}(z) + \Psi_3^*(z)]$$

Если ввести функцию $\omega(\zeta)$, отображающую внешность контура L на внешность единичного круга γ , причем

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + g(\zeta) \quad (2.13)$$

($g(\zeta)$ регулярна вне единичного круга и равна нулю на бесконечности), то полагая

$$\Phi_3(\zeta) = \Phi_3^*(\omega(\zeta)), \quad \Psi_3(\zeta) = \Psi_3^*(\omega(\zeta))$$

найдем

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = 4 \operatorname{Re} [\Phi_3(\zeta)], \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi_3'(\zeta) + \Psi_3(\zeta) \quad (2.15)$$

Положим $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда согласно (2.13) при $\zeta \rightarrow \infty$ будем иметь

$$z = c\zeta, \quad x = c\xi, \quad y = c\eta$$

На основании (2.12) и (2.14) получим

$$4 \operatorname{Re} [\Phi_3(\zeta)] = \begin{cases} 0 & \text{на } \gamma \\ B + A - 2k - 2p + 4k \lg R + Fc\xi + Dc\eta - 4k \lg c - 4k \lg |\zeta| & \text{для } \zeta \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.16)$$

Рассуждая так же, как это было сделано в первом разделе, можно показать, что

$$\Phi_3(\zeta) = \frac{c(F-iD)}{4} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - k \lg \zeta \quad (2.17)$$

При этом необходимо, чтобы

$$c = R \exp \left(\frac{B}{4k} + \frac{A}{4k} - \frac{1}{2} - \frac{p}{2k} \right) \quad (2.18)$$

В более общем случае [см. формулу (2.3)] будем иметь

$$\Phi_3(\zeta) = c \frac{a_1}{8} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - k \lg \zeta$$

С другой стороны из (2.10) и (2.15) следует, что

$$2 \left[\frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi_3'(\zeta) + \Psi_3(\zeta) \right] = \begin{cases} 0 & \text{на } \gamma \\ B - A + Fx - Dy - 2ke^{-2i\eta_1} & \text{для } \zeta \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.19)$$

Или, подставляя в (2.19) значение $\Phi_3(\zeta)$ из (2.17), получим

$$2 \left[\frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \left(\frac{c(F-iD)}{4} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) - k \frac{1}{\zeta} \right) + \Psi_3(\zeta) \right] = \begin{cases} 0 & \text{на } \gamma \\ B - A + Fc\zeta - Dc\eta - 2ke^{-2i\eta_1} & \text{для } \zeta \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.20)$$

Рассмотрим поведение (2.20) на бесконечности. При $\zeta \rightarrow \infty$ вследствие того, что $\omega(\zeta) = c\zeta$

$$2 \left[\frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \left(\frac{c(F-iD)}{4} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) - k \frac{1}{\zeta} \right) \right] = \frac{c(F-iD)}{2} \zeta - 2ke^{-2i\eta_1} \quad (2.21)$$

Сравнивая (2.21) с (2.20), найдем, что при $\zeta \rightarrow \infty$

$$\Psi_3(\zeta) = \frac{1}{2} \left[B - A + \frac{cF\zeta - cD\eta + icD\zeta + icF\eta}{2} \right] = \frac{B-A}{2} + \frac{c(F+iD)}{4} \zeta \quad (2.22)$$

В более общем случае (см. (2.3)) будем иметь при $\zeta \rightarrow \infty$

$$\Psi_3(\zeta) = \frac{B-A}{2} + c \frac{a_3}{12} \zeta$$

Обозначим для краткости

$$\mu = \frac{c(F+iD)}{4} \quad (2.23)$$

Пусть

$$\omega(\zeta) = c\zeta + a_1 \frac{1}{\zeta} + a_2 \frac{1}{\zeta^2} + a_3 \frac{1}{\zeta^3} + \dots \quad (2.24)$$

На контуре единичного круга на основании (2.20)

$$\left[\frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \left(\mu - \mu \frac{1}{\zeta^2} - k \frac{1}{\zeta} \right) \right] = \left[\gamma - \Psi_3(\zeta) \right]_{\gamma} \quad (2.25)$$

Из (2.22) имеем

$$\Psi_3(\zeta) = \frac{B-A}{2} + \mu\zeta + \Xi(\zeta) \quad (2.26)$$

где $\Xi(\zeta)$ регулярна во внешности единичного круга

Подставляя (2.24) и (2.25) в (2.25), получим следующее равенство:

$$\left[\left(c \frac{1}{\zeta} + \bar{a}_1 \zeta + \bar{a}_2 \zeta^2 + \bar{a}_3 \zeta^3 + \dots \right) \left(\mu - k \frac{1}{\zeta} - \mu \frac{1}{\zeta} \right) \right]_r = \left[\left(c - a_1 \frac{1}{\zeta^2} - a_2 \frac{2}{\zeta^3} - a_3 \frac{3}{\zeta^4} - \dots \right) \left(\frac{B-A}{2} + \mu \zeta + \Xi(\zeta) \right) \right]_r \quad (2.27)$$

Перемножим выражения, заключенные в скобках, и приравняем в правой и левой частях коэффициенты при положительных степенях ζ . При этом выражения в правой и левой частях равенства (2.27) будут отличаться на функцию, регулярную вне единичного круга, что, очевидно, допустимо. Эта регулярная во внешности круга функция войдет в состав $\Psi_3(\zeta)$, которая согласно условию также обладает тем же свойством. (Этот прием аналогичен приему, употребленному для такой же цели на стр. 373 первого раздела.) В результате получаем систему уравнений для коэффициентов:

$$\begin{aligned} -ka_1 - \mu a_2 &= -\frac{B-A}{2}c \\ \mu a_1 - k\bar{a}_2 - \mu a_3 &= -\mu c \\ \mu a_2 - k\bar{a}_3 - \mu a_4 &= 0 \\ \dots & \\ \mu a_n - k\bar{a}_{n+1} - \mu a_{n+2} &= 0 \\ \dots & \end{aligned} \quad (2.28)$$

Из первых двух уравнений определим \bar{a}_2 и \bar{a}_3 на основании \bar{a}_1 :

$$a_2 = \frac{B-A}{2\mu}c - \frac{k}{\mu}\bar{a}_1 \quad (2.29)$$

$$\bar{a}_3 = c \left[1 - \frac{(B-A)k}{2\mu^2} \right] + \left(1 + \frac{k^2}{\mu^2} \right) \bar{a}_1 \quad (2.30)$$

Последующие коэффициенты связаны рекуррентной зависимостью, как это видно из (2.28). Уравнение

$$\mu \bar{a}_n - k\bar{a}_{n+1} - \mu \bar{a}_{n+2} = 0 \quad (2.31)$$

можно рассматривать как уравнение в конечных разностях. Если мы имеем однородное уравнение в конечных разностях второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\bar{a}_{n+2} + r\bar{a}_{n+1} + s\bar{a}_n = 0$$

то, как известно (см. например [31]), его решение может быть выражено следующим образом:

$$\bar{a}_n = C_1 \nu_1^n + C_2 \nu_2^n \quad (2.32)$$

Здесь ν_1 и ν_2 — корни характеристического уравнения

$$\nu^2 + r\nu + s = 0$$

Для уравнения (2.31) $r = \frac{k}{\mu}$, $s = -1$ и поэтому

$$\nu_1 = -\frac{k}{2\mu} + \sqrt{\frac{k^2}{4\mu^2} + 1}, \quad \nu_2 = -\frac{k}{2\mu} - \sqrt{\frac{k^2}{4\mu^2} + 1} \quad (2.33)$$

При этом $|v_1| < 1$, $|v_2| > 1$, так как произведение корней для данного характеристического уравнения равно единице. На основании (2.32) имеем

$$\bar{a}_2 = C_1 v_1^2 + C_2 v_2^2, \quad \bar{a}_3 = C_1 v_1^3 + C_2 v_2^3 \quad (2.34)$$

Необходимо, чтобы коэффициент C_2 в выражении (2.32) и, следовательно, также в (2.34) был равен нулю. В противном случае ряд (2.24) будет расходиться, так как $|v_2| > 1$ и $\omega(\zeta)$ не будет функцией, регулярной вне единичного круга, что противоречит исходному требованию.

Но в таком случае из (2.34) получаем

$$\bar{a}_2 v_1 = \bar{a}_3 \quad (2.35)$$

и вообще

$$\bar{a}_{n+1} = v_1 \bar{a}_n \quad (2.36)$$

Введем обозначения

$$\beta = \frac{B-A}{2k}, \quad \lambda = \frac{k}{2\mu} \quad (2.37)$$

Подставляя эти обозначения в (2.29), (2.30) и (2.35), получаем следующую систему уравнений:

$$\bar{a}_2 = 2\beta\lambda c - 2\lambda \bar{a}_1, \quad \bar{a}_3 = c(1 - 4\beta\lambda^2) + (1 + 4\lambda^2) \bar{a}_1, \quad v_1 \bar{a}_2 = \bar{a}_3 \quad (2.38)$$

Отсюда находим

$$\bar{a}_1 = c \frac{-1 + 2v_1\beta\lambda + 4\beta\lambda^2}{1 + 2v_1\lambda + 4\lambda^2}, \quad \bar{a}_2 = c \frac{2\lambda(\beta-1)}{1 + 2v_1\lambda + 4\lambda^2} \quad (2.39)$$

Кроме того, на основании (2.36)

$$\bar{a}_3 = v_1 \bar{a}_2, \quad \bar{a}_4 = v_1 \bar{a}_3, \quad \dots, \quad \bar{a}_{n+1} = v_1 \bar{a}_n$$

Отсюда, беря сопряженные величины получаем

$$a_1 = c \frac{-1 + 2\bar{v}_1\beta\lambda + 4\beta\bar{\lambda}^2}{1 + 2\bar{v}_1\bar{\lambda} + 4\bar{\lambda}^2}, \quad a_2 = c \frac{2\bar{\lambda}(\beta-1)}{1 + 2\bar{v}_1\bar{\lambda} + 4\bar{\lambda}^2} \quad (2.40)$$

и также

$$a_3 = \bar{v}_1 a_2, \quad a_4 = \bar{v}_1 a_3, \quad \dots, \quad a_{n+1} = \bar{v}_1 a_n \quad (2.41)$$

При этом принято во внимание, что только v_1 и λ будут комплексными величинами.

Подставляя найденные значения коэффициентов (2.40) и (2.41) в ряд для $\omega(\zeta)$ и суммируя полученный ряд, что нетрудно выполнить, так как, начиная со второго члена, он представляет геометрическую прогрессию, найдем окончательно

$$\omega(\zeta) = c \left[\zeta + \frac{-1 + 2\bar{v}_1\beta\lambda + 4\beta\bar{\lambda}^2}{1 + 2\bar{v}_1\bar{\lambda} + 4\bar{\lambda}^2} \frac{1}{\zeta} + \frac{2\bar{\lambda}(\beta-1)}{1 + 2\bar{v}_1\bar{\lambda} + 4\bar{\lambda}^2} \frac{1}{\zeta(\zeta - v_1)} \right] \quad (2.42)$$

При этом

$$c = R \exp \left[\frac{B}{4k} + \frac{A}{4k} - \frac{1}{2} - \frac{\rho}{2k} \right]$$

$$\beta = \frac{B-A}{2k}, \quad \mu = \frac{C(P + iD)}{4}, \quad v_1 = -\frac{\lambda}{2\mu} + \sqrt{\frac{k^2}{4\mu^2} + 1}, \quad \lambda = \frac{k}{2\mu} \quad (2.43)$$

Так как функция $\omega(\zeta)$, отображающая упругую область на внешность единичного круга, рациональна, то напряжения в упругой области могут быть также выражены в конечном виде.

На основании полученных формул (2.42) и (2.43) было произведено определение формы границы между упругой и пластической областью для пластинки, изображенной на фиг. 3.

При этом компоненты напряжения на бесконечности

$$\sigma_{x\infty} = A + 3.0 k, \quad \tau_{y\infty} = B + Fx = 3.0k + 0.2kx$$

Здесь

$$F = 0.2 k \left[\frac{\text{кг}}{\text{см}} \right] \quad D = 0, \quad A = 3.0 k, \quad B = 3.0 k, \quad p = 0, \quad R = 1$$

Приводим значения координаты точек границы между упругой и пластической областями.

	1	2	3	4	5	4'	3'	2'
$x =$	+2.26	+1.92	-0.34	-1.91	-2.97	-1.91	-0.34	+1.92
$y =$	0.000	2.30	2.80	2.25	0.00	2.25	2.80	2.30

По поводу полученных результатов необходимо заметить следующее. Здесь дан метод, позволяющий находить решение, при котором напряжения будут непрерывны всюду. Есть основание полагать, что подобное решение будет единственным. Однако для того, чтобы быть убежденным в безусловной единственности решения, необходимо выполнение следующих условий: нужно, чтобы любую точку в пластической области можно было соединить с двумя точками на контуре отверстия двумя характеристиками дифференциального уравнения теории пластичности, принадлежащими к двум семействам, — так, чтобы обе характеристики целиком находились в пластической области. В данном случае характеристиками будут два ортогональных семейства логарифмических спиралей.

Для решений, рассмотренных в первом разделе, нужно, чтобы эксцентриситет эллипса, являющегося границей между упругой и пластической областями, не был слишком велик (отношение полуосей $a/b < \sqrt{2}$).

Поступила в редакцию
2 III 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

L. A. GALIN. PLANE ELASTICO-PLASTIC PROBLEM PLASTIC ZONES IN THE VICINITY OF CIRCULAR APERTURES

The article gives the determination of the forms of plastic zones in the vicinity of circular apertures in stretched plates and beams, and the determination of stresses in the plastic and elastic regions as well. The forces stretching the plate in the direction of the x and y axes are assumed to be unequal.

Paragraph 1 deals with the extension of a plate with a circular aperture. Stress functions φ_1 and φ_2 are introduced for the plastic and elastic regions, by formulae (1.7). In the plastic region, the functions must satisfy equation (1.9); in the elastic region they must satisfy a biharmonic equation. Function φ_1 satisfies the boundary conditions (1.4) and (1.11) and is determined

by the relationship (1.12). It must be noted that this function is likewise biharmonic.

The stress components in the elastic region act in accordance with (1.6). The continuity of stresses along the boundary between the elastic and plastic regions leads to conditions (1.10). Function φ_3 is set up by (1.14), determined in the elastic region.

Functions $\Phi_3^*(z)$ and $\Psi_3^*(z)$ are then introduced through the expressions (1.15) and (1.18). Function $\omega(z)$ is introduced by (1.23), mapping the elastic domain beyond the unit circle. Conditions (1.34) and (1.35) will then hold for the determination of functions $\Phi_3(\zeta) = \Phi_3^*(\omega(\zeta))$ and $\Psi_3(\zeta) = \Psi_3^*(\omega(\zeta))$.

Conditions on the contour of the unit circle (1.10) and (1.14), and conditions at infinity (1.19), (1.23), (1.32), (1.33) are employed to set up expressions (1.34) and (1.35). This yields function $\Phi_3(\zeta)$ through formula (1.33) and the constant c by means of (1.37), entering into expression (1.26) for function $\omega(\zeta)$. Substituting (1.33) into (1.35), the author arrives at the functional equation (1.41) for functions $\omega(\zeta)$ and $\Psi_3(\zeta)$.

Function $\omega(\zeta)$ is taken as a Laurent series in the region $1 < |\zeta| < \infty$. Expression (1.41) is then multiplied by $\omega'(\zeta)$ and ζ^{-m} . The Cauchy formula is applied to each of the parts, resulting in expressions (1.45) and (1.46) for functions $\omega(\zeta)$ and $\Psi_3(\zeta)$ respectively. Expressing ζ in terms of z by means of (1.45), and employing expression (1.14) reduced to the forms (1.54), and expression (1.57), functions $\Phi_2^*(z)$ and $\Psi_2^*(z)$ are found. The latter functions make it possible to construct the expressions $\sigma_x + \sigma_y$ (1.59) and $\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}$ (1.63) for stresses. Displacements u and v along the x and y axes are given by formula (1.71), which is found by means of (1.64), (1.65), (1.69), and (1.70).

Paragraph 2 deals with beams with circular apertures. The stress function in this case is determined by (2.4), and by formula (2.5) at infinity. Introduced are function $\omega(\zeta)$ through (2.13), and functions $\Phi_3^*(z)$, $\Psi_3^*(z)$ and $\Phi_3(\zeta) = \Phi_3^*[\omega(\zeta)]$, $\Psi_3(\zeta) = \Psi_3^*[\omega(\zeta)]$. Having determined function $\Phi_3(\zeta)$ (2.17) in a manner analogous to that in paragraph 1, the author proceeds to set up a functional equation for functions $\omega(\zeta)$, $\Psi_3(\zeta)$ (2.25) through the intermediate steps (2.14) and (2.29). Function $\omega(\zeta)$ is taken as a Laurent series (2.24).

The recurrent formulae (2.29), (2.30) and (2.31) are given for the determination of the coefficients of this series. The final expressions for $\omega(\zeta)$ are given by formulae (2.42) and (2.43).

ЛИТЕРАТУРА

1. Надаи А. Пластичность. 1936.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые задачи математической теории упругости. 1935.
3. Марков А. А. Исчисление конечных разностей. 1910.