

УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПО МИЗЕСУ И ИХ ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В. В. Соколовский

(Москва)

Настоящая работа содержит исследование уравнений пластического плоского напряженного состояния по теории Мизеса и по теории, занимающей «промежуточное» положение между теориями Мизеса и Сен-Венана¹. Эта «промежуточная» теория достаточно близка к теории Мизеса, но значительно удобнее ее для вычислений.

§ 1. Рассматривается тонкая пластинка, находящаяся под действием сил, приложенных к контуру, параллельных средней плоскости xy пластинки и равномерно распределенных по ее толщине вдоль оси z . При этом компоненты напряжения

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.1)$$

а остальные компоненты σ_x , σ_y , и τ_{xy} не зависят от координаты z и должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

Условимся через $\sigma_3 = 0$ обозначать главное нормальное напряжение $\sigma_z = 0$, а через σ_1 и σ_2 — другие два главных нормальных напряжения, причем так, чтобы

$$\sigma_1 \geq \sigma_2$$

Условие пластичности Губера-Мизеса, выражающее постоянство интенсивности максимального касательного напряжения в главных нормальных напряжениях, имеет вид

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_s^2 \quad (1.3)$$

а в компонентах напряжения будет

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 \quad (1.4)$$

σ_s — предел текучести при простом растяжении.

Условие пластичности Сен-Венана, устанавливающее постоянство максимального касательного напряжения в главных нормальных напряжениях, имеет вид

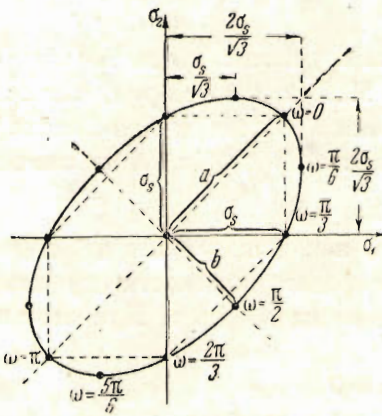
$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \sigma_s, & 0 &\leq |\sigma_1 + \sigma_2| \leq \sigma_s \\ \sigma_1 - \sigma_2 &= 2\sigma_s - |\sigma_1 + \sigma_2|, & \sigma_s &\leq |\sigma_1 + \sigma_2| \leq 2\sigma_s \end{aligned} \quad (1.5)$$

¹ Исследования уравнений пластического плоского напряженного состояния по теориям пластичности Мизеса и Сен-Венана опубликовано [1, 2] в Докладах Академии Наук СССР.

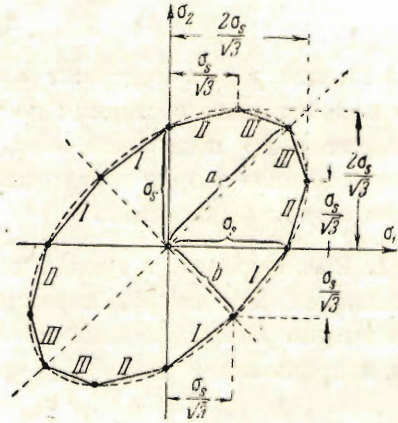
а в компонентах напряжения будет

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 &= \sigma_s^2, & 0 \leq |\sigma_x + \sigma_y| &\leq \sigma_s \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 &= (2\sigma_s - |\sigma_x + \sigma_y|)^2, & \sigma_s \leq |\sigma_x + \sigma_y| &\leq 2\sigma_s \end{aligned} \quad (1.6)$$

Легко дать геометрическую интерпретацию условиям пластичности. С этой целью рассмотрим плоскость изменения переменных σ_1, σ_2 , не принимая условия $\sigma_1 \geq \sigma_2$ в обозначениях σ_1 и σ_2 . Условие пластичности Губера-Мизеса изображается в виде эллипса (фиг. 1), оси которого совпадают с биссектрисами координатных углов, а длины полуосей соответственно равны $a = \sqrt{2}\sigma_s$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

и $b = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$. Условие пластичности Сен-Венана изображается шестиугольником, вписанным в эллипс Мизеса так, как это показано пунктиром.

«Промежуточным» между условиями пластичности Мизеса и Сен-Венана является условие пластичности, соответствующее двенадцатиугольнику, вписанному в эллипс Мизеса указанным на фиг. 2 образом.

«Промежуточное» условие пластичности в главных нормальных напряжениях имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \lambda (\mu \sigma_s - |\sigma_1 + \sigma_2|) \quad (1.7)$$

а в компонентах напряжения будет

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \lambda^2 (\mu \sigma_s - |\sigma_x + \sigma_y|)^2 \quad (1.8)$$

Значения параметров λ и μ , отвечающие сторонам I, II, III двенадцатиугольника (фиг. 2), вписанного в эллипс Мизеса, приведены ниже:

- | | | | |
|------|--|-----|--|
| I. | $0 \leq \sigma_1 + \sigma_2 \leq \sigma_s$ | или | $0 \leq \sigma_x + \sigma_y \leq \sigma_s$ |
| | $\lambda = 2/\sqrt{3} - 1 \approx 0.16,$ | | $\mu = 2(2 + \sqrt{3}) \approx 7.46$ |
| II. | $\sigma_s \leq \sigma_1 + \sigma_2 \leq \sqrt{3}\sigma_s$ | или | $\sigma_s \leq \sigma_x + \sigma_y \leq \sqrt{3}\sigma_s$ |
| | $\lambda = 1/\sqrt{3} \approx 0.58,$ | | $\mu = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$ |
| III. | $\sqrt{3}\sigma_s \leq \sigma_1 + \sigma_2 \leq 2\sigma_s$ | или | $\sqrt{3}\sigma_s \leq \sigma_x + \sigma_y \leq 2\sigma_s$ |
| | $\lambda = 2/\sqrt{3} + 1 \approx 2.14,$ | | $\mu = 2$ |

Теорию пластического плоского напряженного состояния, основанную на условии пластичности (1.4), условимся называть *точной*, а теорию, базирующуюся на условии пластичности (1.6), — *приближенной*.

§ 2. Займемся исследованием системы уравнений¹ (1.2) и (1.4). Введем новое переменное ω на основании условия пластичности (1.4) следующим образом:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \cos \left(\omega \mp \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{или} \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \sin \omega, \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_s \cos \omega \quad (*)$$

Формулы преобразования

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\varphi$$

где φ — угол между главным нормальным напряжением σ_1 и осью x , дают возможность представить компоненты напряжения в виде

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} \cos \omega \pm \sin \omega \cos 2\varphi), \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \sin \omega \sin 2\varphi \quad (2.1)$$

Таким образом три компоненты напряжения выражены через две новых переменных ω и φ , причем φ есть угол между главным нормальным напряжением σ_1 и осью x ; так как $\sigma_1 \geq \sigma_2$, то из формул (*) ясно, что $0 \leq \omega \leq \pi$ с точностью до числа, кратного 2π .

Выражения (2.1) удовлетворяют условию (1.4) тождественно. Подстановка выражений (2.1) в уравнения (1.2) дает

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\varphi - \cos \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\varphi \frac{\partial \omega}{\partial y} - 2 \sin \omega \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \\ \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\varphi \frac{\partial \omega}{\partial x} - (\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\varphi + \cos \omega) \frac{\partial \omega}{\partial y} + 2 \sin \omega \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\varphi \pm R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\varphi - \cos \omega}, \quad \Omega(\omega) \pm \varphi = \text{const} \quad (2.3)$$

где обозначено

$$R(\omega) = \sqrt{3 - 4 \cos^2 \omega}, \quad \Omega(\omega) = -\frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\omega} \frac{R(\omega)}{\sin \omega} d\omega$$

Из этих уравнений ясно, что система (2.2) будет *гиперболической* при $\pi/6 < \omega < 5\pi/6$ или *эллиптической* при $0 \leq \omega < \pi/6$ и $5\pi/6 < \omega \leq \pi$.

Ниже приведено исследование уравнений (2.2) в предположении, что $\pi/6 < \omega < 5\pi/6$ и, следовательно, что эти уравнения (2.2) принадлежат к гиперболическому типу.

Функция $\Omega(\omega)$ может быть представлена в виде

$$-\Omega(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\omega} \frac{R(\omega)}{\sin \omega} d\omega = \frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{2 \cos \omega}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{4 \cos \omega + 3}{R(\omega)} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{4 \cos \omega - 3}{R(\omega)}$$

¹ Исследованию уравнений пластического плоского напряженного состояния по Мизесу посвящена наша работа в 1 вып. IX тома (1945) этого журнала. Нижеуказанные уравнения представлены в иной форме.

Под \arcsin и arctg подразумеваются их главные значения, лежащие между $-\pi/2$ и $+\pi/2$.

Наряду с функцией ω введем новую функцию

$$2\psi = \pi - \operatorname{arccos} \frac{\operatorname{ctg} \omega}{\sqrt{3}} \quad (2.4)$$

где под arccos подразумевается его главное значение, лежащее между 0 и π .

Уравнения характеристик (2.3) после замены (2.4) принимают вид

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi \pm \psi), \quad \Omega(\omega) \pm \varphi = \operatorname{const} \quad (2.5)$$

Семейство характеристик, определяемое уравнениями (2.5) с верхними знаками, будем называть первым семейством, а определяемое уравнениями (2.5) с нижними знаками — вторым семейством.

Формулы (2.5) показывают, что характеристики наклонены к оси x под углами $\varphi \pm \psi$ и, следовательно, образуют между собой углы 2ψ . Таким образом углы между характеристиками в плоскости xy будут, вообще говоря, в разных точках различны; при этом ясно что угол 2ψ отличен от 0 и π , пока $\pi/6 < \omega < 5\pi/6$. При $\omega = \pi/6$ и $\omega = 5\pi/6$ угол 2ψ принимает значения $2\psi = \pi$ и $2\psi = 0$.

Пусть $\alpha = \alpha(x, y) = \operatorname{const}$ и $\beta = \beta(x, y) = \operatorname{const}$ суть уравнения первого и второго семейств характеристик. Сетку характеристик можно принять за систему криволинейных координат в плоскости xy и рассматривать x, y, ω, φ как функции от α и β .

В дальнейшем удобно пользоваться новыми переменными

$$\xi = \Omega(\omega) + \varphi, \quad \eta = \Omega(\omega) - \varphi \quad (2.6)$$

Уравнения характеристик (2.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \beta} &= \operatorname{tg}(\varphi + \psi) \frac{\partial x}{\partial \beta}, & \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= \operatorname{tg}(\varphi - \psi) \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \Omega(\omega) + \varphi &= \xi = \xi(\alpha), & \Omega(\omega) - \varphi &= \eta = \eta(\beta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\xi(\alpha)$ и $\eta(\beta)$ — произвольные функции, допускающие непрерывные и ограниченные производные.

Заметим, что в выборе α и β существует известная свобода. Если принять за новые переменные $\alpha^* = f_1(\alpha)$, $\beta^* = f_2(\beta)$, где f_1 и f_2 — произвольные функции, то уравнения (2.7) не изменятся.

Функциональный определитель преобразования при переходе от переменных x, y к переменным α, β имеет вид

$$D = \frac{\sin 2\psi}{\cos(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} = \frac{\sin 2\psi}{\sin(\varphi + \psi) \sin(\varphi - \psi)} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} \quad (2.8)$$

При исследовании канонической системы уравнений (2.7) величины ξ и η предполагаются, вообще говоря, изменяемыми. Однако существуют частные решения, отвечающие постоянным ξ и η .

Эти решения должны быть рассмотрены отдельно.

1. $\xi \neq \text{const}$, $\eta \neq \text{const}$

За параметры α и β могут быть приняты величины ξ и η . Тогда уравнения (2.7) будут иметь вид

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \text{tg}(\varphi + \psi) \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \text{tg}(\varphi - \psi) \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (2.9)$$

Характеристиками являются линии $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$.

Определитель преобразования (2.8) может быть переписан в виде

$$\Delta = \frac{\sin 2\psi}{\cos(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\sin 2\psi}{\sin(\varphi + \psi) \sin(\varphi - \psi)} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (2.10)$$

2. $\xi \neq \text{const}$, $\eta \equiv \eta_0 = \text{const}$

Величины φ и ψ в силу формул (2.6) суть функции только одного переменного ξ . За параметр α удобно принять величину φ . Тогда уравнения (2.7) будут иметь вид

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} = \text{tg}(\varphi + \psi) \frac{\partial x}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \text{tg}(\varphi - \psi) \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \Omega(\omega) - \varphi \equiv \eta_0 = \text{const}$$

Так как φ и ψ не зависят от β , то первое из этих уравнений может быть проинтегрировано

$$y = x \text{tg}(\varphi + \psi) + \Phi(\varphi)$$

Таким образом имеет место система уравнений

$$\Omega(\omega) - \varphi \equiv \eta_0, \quad y = x \text{tg}(\varphi + \psi) + \Phi(\varphi), \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \text{tg}(\varphi - \psi) \frac{\partial x}{\partial \varphi} \quad (2.11)$$

Первое семейство характеристик состоит из прямых $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$, а второе семейство находится путем интегрирования уравнений (2.11).

3. $\xi \equiv \xi_0 = \text{const}$, $\eta \neq \text{const}$

Величины ω и φ в силу формул (2.6) суть функции только одного переменного η . Аналогично предыдущему (здесь имеет место система уравнений

$$\Omega(\omega) + \varphi \equiv \xi_0, \quad y = x \text{tg}(\varphi - \psi) + \Psi(\varphi), \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \text{tg}(\varphi + \psi) \frac{\partial x}{\partial \varphi} \quad (2.12)$$

Первое семейство характеристик находится путем интегрирования уравнений (2.12), а второе семейство состоит из прямых $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$.

4. $\xi \equiv \xi_0 = \text{const}$, $\eta \equiv \eta_0 = \text{const}$

Величины ω и φ в силу формул (2.6) суть тождественные постоянные $\omega \equiv \omega_0$ и $\varphi \equiv \varphi_0$, причем

$$\Omega(\omega_0) = \frac{1}{2}(\xi_0 + \eta_0), \quad \varphi_0 = \frac{1}{2}(\xi_0 - \eta_0) \quad (2.13)$$

а уравнения (2.7) могут быть проинтегрированы

$$y = x \text{tg}(\varphi_0 + \psi_0) + \Phi(\alpha), \quad y = x \text{tg}(\varphi_0 - \psi_0) + \Psi(\beta) \quad (2.14)$$

Сетка характеристик состоит из параллельных прямых $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$.

§ 3. Займемся исследованием уравнений (1.2) и (1.8). Введем новое переменное ω на основании условий пластичности (1.7) следующим образом:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_s \lambda \omega, \quad |\sigma_1 + \sigma_2| = \sigma_s (\mu - \omega) \quad (*)$$

Формулы преобразования

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\varphi$$

где φ — угол между главным нормальным напряжением σ_1 и осью x , дают возможность представить компоненты напряжения следующим образом:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_s}{2} [z (\mu - \omega) \pm \lambda \omega \cos 2\varphi], \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_s}{2} \lambda \omega \sin 2\varphi \quad (3.1)$$

причем z имеет следующие значения;

$$z = +1 \quad \text{при } \sigma_x + \sigma_y > 0, \quad z = -1 \quad \text{при } \sigma_x + \sigma_y < 0$$

Таким образом три компоненты напряжения выражены через две новых переменных ω и φ , причем φ есть угол между главным нормальным напряжением σ_1 и осью x ; из формул (*) ясно, что пределы изменения ω , соответствующие сторонам I, II, III двенадцатиугольника, вписанного в эллипс Мизеса, будет

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & 0 \leq |\sigma_1 + \sigma_2| \leq \sigma_s \quad \text{или} \quad \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) \leq \omega \leq 2(2 + \sqrt{3}) \\ \text{II.} \quad & \sigma_s \leq |\sigma_1 + \sigma_2| \leq \sqrt{3}\sigma_s \quad \text{или} \quad 1 \leq \omega \leq \sqrt{3} \\ \text{III.} \quad & \sqrt{3}\sigma_s \leq |\sigma_1 + \sigma_2| \leq 2\sigma_s \quad \text{или} \quad 0 \leq \omega \leq 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Выражения (3.1) удовлетворяют условию (1.8) тождественно. Подстановка выражений (3.1) в уравнения (1.2) дает

$$\begin{aligned} -\left(\frac{z}{\lambda} - \cos 2\varphi\right) \frac{\partial \ln \omega}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \ln \omega}{\partial y} - 2 \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2 \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \\ \sin 2\varphi \frac{\partial \ln \omega}{\partial x} - \left(\frac{z}{\lambda} + \cos 2\varphi\right) \frac{\partial \ln \omega}{\partial y} + 2 \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2 \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2\varphi \pm \sqrt{1 - \lambda^2}}{\cos 2\varphi - z\lambda}, \quad -z \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{2\lambda} \ln \omega \pm \varphi = \text{const} \quad (3.3)$$

Из этих уравнений ясно, что система уравнений (3.2) будет гиперболической для $\lambda = 2/\sqrt{3} - 1 < 1$, $\lambda = 1/\sqrt{3} < 1$, соответствующих сторонам I, II, и эллиптической для $\lambda = 2/\sqrt{3} + 1 > 1$, отвечающего сторонам III двенадцатиугольника, вписанного в эллипс Мизеса (фиг. 2).

Ниже приведено исследование уравнений (3.2) для $\lambda = 2/\sqrt{3} - 1$ и $\lambda = 1/\sqrt{3}$, когда уравнения (3.2) принадлежат к гиперболическому типу.

Введем обозначение

$$\lambda = \sin \gamma \quad (3.4)$$

которое возможно, так как величина $\lambda < 1$.

Уравнения характеристик после замены (3.4) принимают вид

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg} \left[\varphi \pm \left(\frac{\pi}{4} + z \frac{\gamma}{2} \right) \right], \quad -z \frac{\text{ctg } \gamma}{2} \ln \omega \pm \varphi = \text{const} \quad (3.5)$$

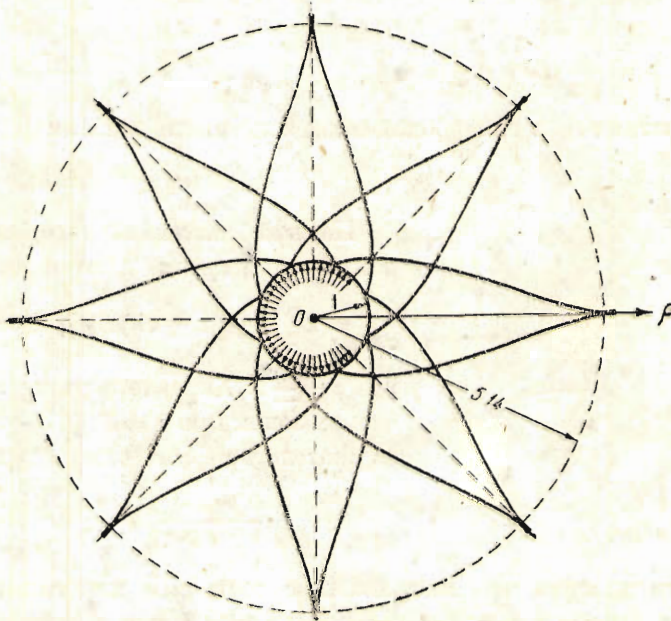
Формулы (3.5) показывают, что характеристики наклонены к оси x под углами $\varphi \pm (\pi/4 + z\gamma/2)$ и, следовательно, образуют между собой углы

$\pi/2 + \chi\gamma$. Таким образом углы между характеристиками в плоскости xu будут постоянной величины, но отличными от $\pi/2$.

В дальнейшем удобно пользоваться новыми переменными

$$\xi = -x \frac{\text{ctg } \gamma}{2} \ln \omega + \varphi, \quad \eta = -x \frac{\text{ctg } \gamma}{2} \ln \omega - \varphi \quad (3.6)$$

Дальнейшее исследование уравнений тождественно исследованию, прове-



Фиг. 3.

денному в § 2. Уравнения (2.5) — (2.14) сохраняют свою силу при замене

$$\psi \text{ на } \frac{\pi}{4} + x \frac{\gamma}{2}, \quad \Omega(\omega) \text{ на } -x \frac{\text{ctg } \gamma}{2} \ln \omega$$

Заметим, что уравнения

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \text{tg} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} + x \frac{\gamma}{2} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \text{tg} \left(\varphi - \frac{\pi}{4} - x \frac{\gamma}{2} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

соответствующие уравнениям (2.9), могут быть сведены к уравнениям с постоянными коэффициентами.

Применяя замену переменных

$$x \} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left[+ U \cos \left(\varphi \pm \frac{\pi}{4} + x \frac{\gamma}{2} \right) - V \sin \left(\varphi \pm \frac{\pi}{4} - x \frac{\gamma}{2} \right) \right]$$

или

$$\left. \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right\} = \frac{\sqrt{\omega}}{\cos \gamma} \left[-x \sin \left(\varphi \mp \frac{\pi}{4} \mp x \frac{\gamma}{2} \right) + y \cos \left(\varphi \mp \frac{\pi}{4} \mp x \frac{\gamma}{2} \right) \right]$$

получим

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{V}{2 \cos \gamma} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{U}{2 \cos \gamma} = 0$$

§ 4. Сравнение *точной и приближенной* теорий удобно провести на полярно-симметричном напряженном состоянии. Для решения этой задачи следует в уравнениях (2.2) и (3.2) перейти от координат x, y к полярным координатам r, θ , причем вместо r удобно пользоваться безразмерной переменной $\rho = r/a$, где a какая-нибудь характерная длина. Полученные уравнения при $\tau_{r\theta} \equiv 0$ интегрируются в замкнутом виде.

По *точной теории* компоненты напряжения σ_r и σ_θ определяются формулами

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \cos \left(\omega \pm \alpha \frac{\pi}{6} \right), \quad \rho^2 = B^2 \frac{\exp(-\alpha \sqrt{3} \omega)}{\sin \omega} \quad (4.1)$$

Характеристиками в гиперболической зоне являются линии

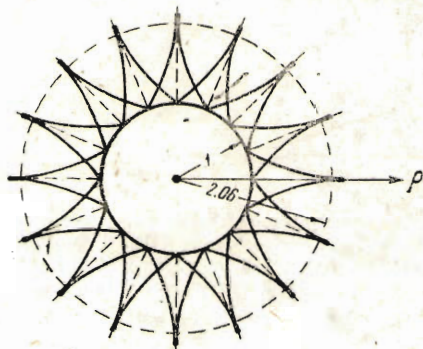
$$\Omega(\omega) \pm \theta = \text{const} \quad (4.2)$$

По *приближенной теории* компоненты напряжения σ_r и σ_θ даются формулами

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \alpha \frac{\sigma_s}{2} [u - (1 \pm \varepsilon \lambda) C \rho^s], \quad s = -\frac{2\lambda}{\varepsilon + \lambda} \quad (4.3)$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Характеристиками в гиперболических зонах при $\lambda = 2/\sqrt{3} - 1$ и $\lambda = 1/\sqrt{3}$, служат логарифмические спирали

$$\frac{\cos \gamma}{1 + \varepsilon \sin \gamma} \ln \rho \pm \theta = \text{const} \quad (4.4)$$



Фиг. 4.

Рассмотрим пластическое напряженное состояние пластинки с круговым вырезом $r = a$, вызванное полярно-симметричным растяжением.

По контуру выреза приложено равномерное внутреннее давление $\sigma_r = -\sigma_s q$, где q — безразмерный параметр, характеризующий величину давления, причем $0 \leq q \leq 2/\sqrt{3}$.

При решении этой задачи по *точной теории* следует вне выреза рассматривать две кольцевые зоны, разделенные окружностью $r = d$.

Компоненты напряжения на основании формул (4.1) при введении безразмерных величин $\rho = r/a$, $\delta = d/a$, $Q = q\sqrt{3}/2$ принимают вид

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \cos \left(\omega \pm \frac{\pi}{6} \right), \quad \rho^2 = \frac{Q + \sqrt{3} \sqrt{1 - Q^2}}{2 \sin \omega} \exp \left[\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{3} - \omega + \arcsin Q \right) \right] \quad (4.5)$$

Под \arcsin подразумевается его значение, лежащее между $-\pi/2$ и $+\pi/2$.

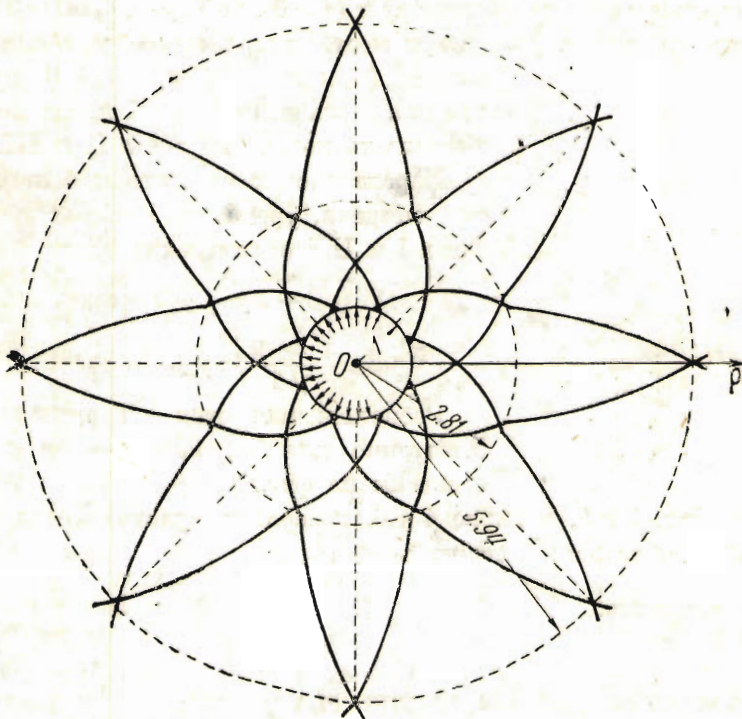
В кольцевой зоне $1 \leq \rho \leq \delta$, соответствующей $\pi/6 < \omega \leq \pi/3 + \arcsin Q$, уравнения (2.2) принадлежат к гиперболическому типу, а в кольцевой зоне $\delta < \rho \leq \infty$, отвечающей $0 \leq \omega < \pi/6$, уравнения (2.2) принадлежат к эллиптическому типу. Величина δ находится из формул (4.5) при $\omega = \pi/6$ в виде

$$\delta^2 = (Q + \sqrt{3} \sqrt{1 - Q^2}) \exp \left[\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} + \arcsin Q \right) \right] \quad (4.6)$$

Для того чтобы вся плоскость вне выреза находилась в пластическом состоянии, на бесконечности должно действовать гидростатическое напряжение $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_s$, что следует из формул (4.5) при $\omega = 0$.

Характеристиками во внутреннем кольце являются семейства кривых $\Omega(\omega) \pm \theta = \text{const}$. Расположение этих характеристик соответственно для случаев $q = 1$ и $q = 0$ изображено на фиг. 3 и 4.

Величины углов между характеристиками различных семейств в точках их пересечения изменяются с изменением ρ ; характеристики обоих семейств нормальны к окружностям $\rho = \delta$ и, следовательно, касаются друг друга в точках этих окружностей.



Фиг. 5.

При решении той же задачи по *приближенной теории* следует вне выреза рассматривать три кольцевые зоны, разделенные некоторыми окружностями $r = d_1$ и $r = d_2$. Компоненты напряжения согласно формулам (4.3) при пользовании безразмерными величинами $\rho = r/a$, $\delta_1 = d_1/a$, $\delta_2 = d_2/a$ имеют вид:

в кольцевой зоне $1 < \rho < \delta_1$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_s}{2} \left\{ 2(2 + \sqrt{3}) - [q(2 - \sqrt{3}) + 1] [\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) \pm 1] \left(\frac{1}{\rho}\right)^{2 - \sqrt{3}} \right\} \quad (4.7)$$

в кольцевой зоне $\delta_1 < \rho < \delta_2$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_s}{2} \left\{ (1 + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} \pm 1) \left(\frac{\delta_1}{\rho}\right)^{\sqrt{3} - 1} \right\} \quad (4.8)$$

в кольцевой зоне $\delta_2 < \rho < \infty$

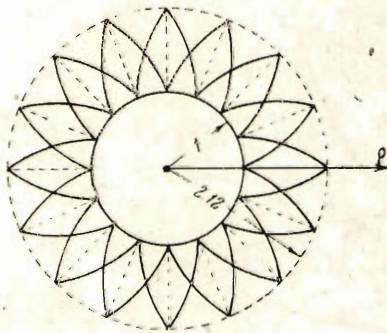
$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_s}{2} \left\{ 2 - \left[(2 - \sqrt{3}) \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \left(\frac{\delta_2}{\rho}\right)^{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}} \right\} \quad (4.9)$$

Величины δ_1 и δ_2 имеют вид

$$\delta_1 = [q(2 - \sqrt{3}) + 1]^{2 + \sqrt{3}}, \quad \delta_2 = \delta_1 (\sqrt{3})^t \left(t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \quad (4.10)$$

Компоненты напряжения, данные формулами (4.7), (4.8) и (4.9), удовлетворяют условию на контуре выреза $\rho = 1$, кроме того, все компоненты напряжения остаются непрерывными на окружностях $\rho = \delta_1$ и $\rho = \delta_2$.

Если внутреннее давление отсутствует ($q = 0$), то $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = (\sqrt{3})^t \approx 2.12$, и во всей плоскости вне выреза имеет место напряженное состояние, описываемое формулами (4.8) и (4.9) при $\delta_1 = 1$, так как кольцевая зона I пропадает и остаются лишь кольцевые зоны II и III.



Фиг. 6.

Характеристиками являются логарифмические спирали, уравнения которых в кольцевых зонах I и II соответственно будут

$$\sqrt{\sqrt{3}-1} \ln \rho \pm \theta = \text{const}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \ln \rho \pm \theta = \text{const}$$

Расположение этих характеристик соответственно для случаев $q=1$ и $q=0$ представлены на фиг. 5 и 6.

Сравнение фиг. 3 и 5, а также 4 и 6, позволяет судить о степени точности, даваемой приближенной теорией.

Поступила в редакцию
20 III 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

W. W. SOKOLOVSKY. EQUATIONS OF THE PLANE PLASTIC STRESSED STATE ACCORDING TO THE MISES THEORY AND THEIR APPROXIMATE REPRESENTATION

The paper deals with the plane plastic stressed state according to the Mises theory and according to a theory midway between theories of Mises and St. Venant. This "midway" theory is more or less near to the theory of Mises, but is more convenient for purposes of computation.

A detailed study is made of the equations of plastic equilibrium according to the Mises theory and the "midway" theory¹.

Taking as an example a polar-symmetrical extension of a plate with circular aperture, due to stresses $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z$ at infinity, a comparison is made between the results yielded by the Mises and the «midway» theories.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Пластическое плоское напряженное состояние по Мизесу. Доклады Академии Наук СССР. 1946. Т. LI. № 3.
2. Соколовский В. В. Пластическое плоское напряженное состояние по Сен-Венану. Доклады Академии Наук СССР. 1946. Т. LI. № 6.

¹ The investigation by the author of this work of plastic equilibrium according to the Mises theory has been published in «Comptes Rendus URSS», vol. LI, No. 3.