

## К ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ<sup>1</sup>

А. А. Ильюшин

(Москва)

В основе большинства работ, относящихся к исследованию пластических деформаций в телах различной формы, лежит теория малых упруго-пластических деформаций. Эта теория представляется наиболее естественным продолжением теории упругости в область пластических деформаций тел, причем с нашей точки зрения она является простейшей среди теорий пластичности. Трудности решения конкретных механических вопросов с точки зрения этой теории являются минимальными, и они вполне преодолимы, как это следует из большого числа задач, решение которых дано в последние годы. Поэтому особенно важными являются вопросы о степени точности теории малых упруго-пластических деформаций, т. е. справедливости ее физических основ и о связи ее с другими теориями пластичности.

В статье «Связь между теорией Сен Венана-Леви-Мизеса и теорией малых упруго-пластических деформаций» мы доказали тождественность двух основных теорий пластичности и формулировали в общем виде условие, при котором опыт с большой степенью точности их подтверждает. Это условие формулируется так: *в процессе нарастания нагрузки на тело от нуля до ее окончательного значения тензор подобия  $\Pi$  должен оставаться постоянным во времени, т. е. не зависеть от нагрузки; иначе говоря, главные оси напряжений и отношение между собой двух главных напряжений должны оставаться постоянными в процессе нагружения тела.*

Мы не сомневались в том, что это условие, математически эквивалентное четырем дополнительным уравнениям, может поставить под сомнение практическую ценность теории малых деформаций, поскольку из него вытекало, что уравнений в теории больше, чем неизвестных, и поэтому они противоречивы. Однако мы стремились привлечь внимание исследователей к тем истинным трудностям, которые необходимо преодолеть в развитии самой теории пластичности и особенно в постановке новых экспериментов, и поэтому не привели доказательства того, что в подавляющем большинстве практических задач четыре лишних уравнения пластичности, т. е. условие постоянства тензора подобия, выполняются автоматически. Скажем точнее: во всех тех случаях, когда совокупность нагрузок, прилагаемых к телу, возрастает от нуля пропорционально одному параметру, возрастающему со временем, тензор подобия практически не зависит от этого параметра и поэтому лишнее условие отпадает.

<sup>1</sup> Доложено на 2-м Советании по теории упругости, строительной механике и теории пластичности 25—28 марта 1946 в Институте механики Акад. Наук СССР.

В связи с цитированной работой, естественно, возникает вопрос, не являются ли границы применимости теории пластичности слишком узкими и не может ли случиться так, что эксперименты не будут подтверждать результатов теории пластичности. В таком случае многочисленные теоретические работы могут оказаться только математическими упражнениями.

Несомненно, и в этом — основной результат наших работ, что теория малых упруго-пластических деформаций не отражает достаточно точно картину деформации тела, когда главные оси деформаций в каждой точке существенно меняют свою ориентацию с течением времени. Но развитие этой теории и приложение ее к современным техническим проблемам совершенно необходимы. Во-первых, потому, что многие очень важные современные технические задачи не могут быть решены без исследования пластических деформаций; во-вторых, потому, что такие решения обычно хорошо согласуются с опытом; в-третьих, потому, что, анализируя многообразие теории пластичности, мы устанавливаем их единство и приходим к выводу, что это не различные теории пластичности, а различные формулировки принципиально одной и той же теории и что принципиальный недостаток их один и тот же, благодаря чему указываем путь, по которому должны идти важнейшие экспериментальные исследования.

В настоящей работе рассматриваются два вопроса: 1) о степени точности теории малых упруго-пластических деформаций; при этом доказывается, что если нагрузки, прилагаемые к телу, изменяются пропорционально одному параметру, тензор подобия не зависит от параметра, т. е. результаты расчета должны быть согласны с опытом; 2) о некоторых вариациях теории пластичности, получаемых заменой обобщенного условия Мизеса другими условиями, в частности эллипса Мизеса — шестиугольником Сен-Венана-Кулона.

### § 1. Теория малых упруго-пластических деформаций

Решение задачи пластичности зависит от порядка (последовательности) приложения нагрузок, а также от изменения их во времени от нулевого до конечных значений. Пусть проекции поверхностных сил  $X_v$ ,  $Y_v$ ,  $Z_v$  и массовых сил  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  даны как функции параметра  $q$ , которым может быть и время. При любом  $q$  напряжения должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0 \quad (x, y, z) \quad (1.1)$$

и граничным условиям

$$X_x l + X_y m + X_z n = X_v \quad (x, y, z) \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем символ  $(x, y, z)$  означает, что остальные формулы получаются циклической перестановкой.

Тело находится в стадии активной пластической деформации, если интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(X_x - Y_y)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2 + 6(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2)} \quad (1.3)$$

не убывает по мере увеличения  $q$  от его значения, соответствующего нулевым нагрузкам и естественному состоянию тела.

При активной деформации несжимаемого пластического тела девиатор напряжений пропорционален девиатору деформаций, а интенсивность напряжений есть определенная функция интенсивности деформаций:

$$X_x - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3e_i} e_{xx}, \quad X_y = \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{xy} \quad (x, y, z) \quad (1.4)$$

причем деформации определяются через компоненты перемещения формулами Коши

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & e_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & e_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.5)$$

интенсивность деформаций  $e_i$  через деформации

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + \frac{3}{2}(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)} \quad (1.6)$$

Связь между  $\sigma_i$  и  $e_i$  определяется обычно экспериментальной кривой (фиг. 1) или некоторой схемой  $\sigma_i = \Phi(e_i)$ .

Для металлов эта зависимость с хорошей степенью точности отражается ломаной линией  $OAB$ , причем в этом случае уравнение (1.7) имеет вид

$$\sigma_i = 3Ge_i(1 - \omega), \quad \omega = \begin{cases} 0 & \text{для } e_i \leq e' \\ \lambda(1 - e'/e_i) & \text{для } e_i \geq e' \end{cases} \quad (1.7)$$

где  $G$  — упругий модуль сдвига и  $\lambda$  — параметр разупрочнения, выражающийся через угловые коэффициенты отрезков  $OA$  и  $AB$ ,

$$\lambda = \frac{3G - 3G'}{3G} \leq 1$$

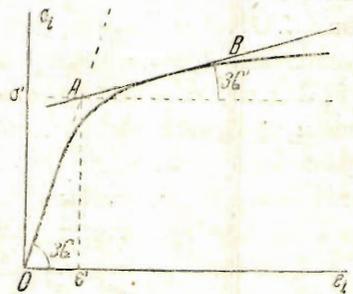
К уравнениям (1.4) следует добавить условие несжимаемости

$$e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 0 \quad (1.8)$$

Система уравнений (1.1), (1.4), (1.7) и (1.8) является замкнутой и определяет единственное решение при условии (1.2). В самом деле, согласно (1.4), (1.5), (1.7) шесть напряжений выражаются через среднее напряжение  $\sigma$  и перемещения  $u, v, w$  и поэтому уравнения (1.1), (1.8) суть четыре уравнения с четырьмя неизвестными, причем для  $d\sigma_i/de_i > 0$  эллиптического типа.

Если, начиная с некоторого значения параметра  $q = q'$ , интенсивность напряжения во всех точках тела, в которых материал вышел за пределы упругости, начинает убывать, происходит процесс разгрузки. Если, наконец, внешние силы полностью устранены, тело приходит в напряженное состояние, которое называют остаточным.

Отмечая штрихами наверху величины, определенные в стадии активной деформации при значении параметра  $q'$ , можно записать связь между теку-



Фиг. 1.

щими напряжениями и деформациями в процессе разгрузки. Вместо (1.4) получим

$$X_x - X_x' = \sigma - \sigma' + 2G(e_{xx} - e_{xx}'), \quad X_y - X_y' = G(e_{xy} - e_{xy}') \quad (x, y, z) \quad (1.9)$$

т. е. закон Гука для разностей напряжений и деформаций.

### § 2. О точности теории малых деформаций

Как уже указывалось<sup>[1]</sup>, связь между напряжениями и деформациями в виде (1.4) и (1.7) экспериментально строго подтверждается лишь в том случае, когда тензор подобия  $\Pi$  не зависит от параметра  $q$ .

Компоненты этого тензора равны

$$p_{xx} = \frac{X_x - \sigma}{\sigma_i}, \quad p_{xy} = \frac{X_y}{\sigma_i} \quad (x, y, z) \quad (2.1)$$

и поэтому для того чтобы решение поставленной в § 1 задачи имело физический смысл, необходимо выполнение «лишних уравнений»

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial q} = 0 \quad (2.2)$$

Этих уравнений четыре, так как величины  $p_{ij}$  удовлетворяют очевидным соотношениям

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(p_{xx} - p_{yy})^2 + (p_{yy} - p_{zz})^2 + (p_{zz} - p_{xx})^2 + 6(p_{xy}^2 + p_{yz}^2 + p_{zx}^2)} = 1 \quad (2.3)$$

Заметим, что в опытах Тайлора<sup>[2]</sup> приближенное совпадение главных осей напряжений и деформаций наблюдалось даже в тех случаях, когда ограничения, налагаемые на тензор  $\Pi$ , были значительно более слабые, чем принятые нами. Отчасти поэтому мы в дальнейшем будем говорить лишь о достаточных условиях, при которых решение задачи пластичности имеет физический смысл.

Задача, которую следовало бы решить в общем виде, состоит в следующем: требуется найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять внешние силы  $X_v, Y_v, Z_v$  и  $X, Y, Z$  как функции параметра  $q$  и координат, чтобы решение системы уравнений (1.1), (1.4), (1.5), (1.7) и (1.8) при граничных условиях (1.2) удовлетворяло условиям (2.2).

Для того чтобы условия (2.2) имели место, достаточна возможность представить напряжения  $X_x, \dots, Z_x$  в виде

$$X_x = \varphi(q; x, y, z) X_x^*(x, y, z), \quad X_y = \varphi(q; x, y, z) X_y^*(x, y, z) \quad (x, y, z) \quad (2.4)$$

причем предполагается, что функция  $\varphi$  не представима в форме

$$\varphi = \varphi_1(q; x, y, z) \varphi_2(x, y, z)$$

ибо в таком случае функцию  $\varphi_2$  можно было бы включить в величины  $X_x^*, \dots, Z_x^*$ . Заметим, что необходимые и достаточные условия отличались бы от (2.4) добавлением одной и той же произвольной функции  $q, x, y, z$  к нормальным напряжениям, благодаря которой аналогичное приводимому ниже рассуждение можно было бы повторить для сжимаемого материала.

Из (2.4) и (1.3) следует

$$\sigma_i = \varphi(q; x, y, z) \sigma_i^*(x, y, z) \quad (2.5)$$

вследствие чего тензор  $\Pi$  и оказывается независимым от  $q$ .

Внося значения напряжений (2.4) в уравнения равновесия (1.1), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} (\varphi X_x^*) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi X_y^*) + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi X_z^*) + \rho X = 0 \quad (x, y, z) \quad (2.6)$$

Из граничных условий (1.2) найдем

$$X_x^* l + X_y^* m + X_z^* n = \frac{X_y}{\varphi} \quad (x, y, z) \quad (2.7)$$

Для того чтобы входящие в эти уравнения величины  $X_x^*, \dots, Z_x^*$  не зависели от  $q$ , необходимо и достаточно, чтобы внешние силы  $X_y, \dots, X_x, \dots$  и функция  $\varphi$  были пропорциональны некоторой одной и той же функции переменной  $q$ . Не уменьшая общности, можно сказать, что внешние силы должны быть пропорциональны  $q$ , а функция  $\varphi$  равна  $q$ , т. е.

$$\begin{aligned} X_y &= q X_y^*(x, y, z), & X &= q X^*(x, y, z) \\ \sigma_i &= q \sigma_i(x, y, z), & \varphi(q; x, y, z) &= q \end{aligned} \quad (x, y, z). \quad (2.8)$$

Параметр  $q$ , следовательно, можно рассматривать как характерное значение поверхностной нагрузки, причем функции  $X_y, \dots, X_x, \dots$  будут безразмерными. Поскольку из соотношений (1.4) и (2.1) следуют

$$\frac{e_{xx}}{e_i} = \frac{3}{2} p_{xx}, \quad \frac{e_{xy}}{e_i} = 3 p_{xy} \quad (x, y, z)$$

то для выполнения условий (2.2) необходимо и достаточно, чтобы деформации могли быть представлены в виде

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \psi(q; x, y, z) e_{xx}^*(x, y, z), & e_{xy} &= \psi(q; x, y, z) e_{xy}^*(x, y, z) \\ e_i &= \psi(q; x, y, z) e_i^*(x, y, z) \end{aligned} \quad (x, y, z) \quad (2.9)$$

причем функция  $\psi$  не представима в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координат. Легко убедиться в том, что  $\psi$  может зависеть от координат только через функцию

$$\sigma_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(X_x^* - Y_y^*)^2 + (Y_y^* - Z_z^*)^2 + (Z_z^* - X_x^*)^2 + 6(X_y^{*2} + Y_z^{*2} + Z_x^{*2})}$$

которая в свою очередь зависит только от

$$e_i^* = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_{xx}^* - e_{yy}^*)^2 + (e_{yy}^* - e_{zz}^*)^2 + (e_{zz}^* - e_{xx}^*)^2 + \frac{3}{2}(e_{xy}^{*2} + e_{yz}^{*2} + e_{zx}^{*2})}$$

В самом деле, из (1.7), (2.8) и (2.9) имеем

$$q \sigma_i^* = \Phi(\psi, e_i^*) \quad (2.10)$$

Отсюда

$$\psi(q; x, y, z) = \frac{1}{e_i^*(x, y, z)} \Phi^{-1}(q \sigma_i^*)$$

и вследствие отмеченного свойства функции  $\psi$  имеем

$$\sigma_i^* = \sigma_i^*(e_i^*)$$

Таким образом

$$\psi = \psi(q, e_i^*) = \psi_1(q) \psi_2(e_i^*) \quad (2.11)$$

Деформации  $e_{xx}$ , ...,  $e_{zz}$ , согласно формулам Кэши (1.5), должны удовлетворять условиям совместности

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}, \quad 2 \frac{\partial^2 e_{xz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) \quad (x, y, z)$$

Внося значения (2.9) в последние уравнения, получим шесть дифференциальных уравнений типа

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [\psi(q; e_i^*) e_{xy}] = \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\psi(q; e_i^*) e_{xx}^*] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\psi(q; e_i^*) e_{yy}^*] \quad (x, y, z) \quad (2.12)$$

Решения этих уравнений, т. е. функции  $e_{xx}^*$ , ...,  $e_{zz}^*$ , не должны зависеть от параметра  $q$ . Для этого достаточно и возможно необходимо, чтобы функция  $\psi$  не зависела от координат

$$\psi = \alpha(q) \quad (2.13)$$

В формулах (2.9), которые теперь принимают вид

$$e_{xx} = \alpha(q) e_{xx}^*(x, y, z), \quad e_{xy} = \alpha(q) e_{xy}^*(x, y, z) \quad (x, y, z) \quad (2.14)$$

$$e_i^* = \alpha(q) e_i^*(x, y, z)$$

величину  $\alpha$  можно принять за характерную деформацию тела, т. е. за отношение характерного перемещения тела к какому-нибудь размеру его. Из (2.10) и (2.13) теперь имеем

$$q(x) \sigma_i^*(e_i^*) = \Phi(\alpha e_i^*) \quad (2.15)$$

Беря вторую смешанную логарифмическую производную этого равенства по  $\alpha$  и  $e_i^*$ , получим

$$e_i \frac{d}{de_i} \left[ \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{de_i} \right] + \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{de_i} = 0$$

откуда

$$\Phi = A e_i^2$$

Таким образом для того, чтобы в самом общем случае решение задачи пластичности обладало свойством  $\partial p_{ij} / \partial q = 0$ , достаточно, чтобы зависимость между интенсивностью напряжения  $\sigma_i$  и интенсивностью деформаций  $e_i$  была представима степенной функцией вида

$$\sigma_i = A e_i^2 \quad (2.16)$$

При этом из решения уравнений пластичности следует, что связь между характерной нагрузкой  $q$  и характерной деформацией  $\alpha$  имеет тот же вид

$$q = A' \alpha^2 \quad (2.17)$$

Соответствующим подбором постоянных  $A$  и  $\alpha$  можно с большой степенью точности аппроксимировать экспериментальные кривые зависимости интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от интенсивности деформаций  $e_i$  и потому можно сделать вывод, что тензор подобия  $\Pi(p_{ij})$  остается неизменным в процессе нагружения тела, т. е. направления главных осей напряжений и деформаций и отношение главных касательных напряжений между собой сохраняются

в процессе деформации, т. е. в конечном счете решение задач пластичности с помощью теории малых упруго-пластических деформаций имеет физический смысл в тех случаях, когда нагрузка, налагаемая на тело, изменяется в процессе нагружения пропорционально одному параметру  $q$ .

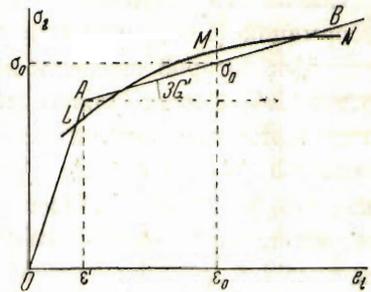
К тому же выводу мы приходим в случае, когда на поверхности тела заданы не напряжения, а перемещения, — математическое решение задачи будет соответствовать опыту, если перемещения на границе от начала деформации изменяются пропорционально одному параметру  $\alpha$ .

Экспериментальные кривые  $\sigma_i = \Phi(e_i)$  для большинства материалов в области малых деформаций являются выпуклыми, т. е. имеют монотонно убывающую производную  $d\sigma_i / de_i$ . Поэтому верхнюю оценку погрешности при замене экспериментальной кривой на степенную (2.16) мы получим, если аппроксимируем ломаную прямую (1.7) с помощью функции (2.16). На фиг. 2 изображена ломаная прямая (1.7). Пусть область деформаций, в которой мы желаем аппроксимировать ее степенной функцией, определяется величиной  $2\varepsilon_0$ . Обозначим через  $\sigma_0$  значение  $\sigma_i$  в точке  $e_i = \varepsilon_0$  и выберем постоянные  $A$  кривой (2.16) так, чтобы она проходила через точку  $(\sigma_0, \varepsilon_0)$  и имела угловой коэффициент, равный угловому коэффициенту отрезка  $AB$  ломаной линии  $OAB$ . Уравнение прямой  $AB$  согласно (1.7) таково:

$$\sigma_i = \Phi_\lambda = 3G \left( 1 - \lambda + \lambda \frac{\varepsilon'}{e_i} \right) e_i$$

Степенная функция, удовлетворяющая поставленному требованию, имеет вид

$$\sigma_i = \Phi_x = \sigma_0 \left( \frac{e_i}{\varepsilon_0} \right)^x, \quad x = \frac{1 - \lambda \varepsilon_0}{\lambda \varepsilon'} \left( 1 + \frac{1 - \lambda \varepsilon_0}{\lambda \varepsilon'} \right)^{-1}$$



Фиг. 2.

Наибольшее взаимное отклонение этих двух линий на пластическом участке будет в точке  $e_i = \varepsilon'$ , и поэтому степень точности замены одной линии другой определяется отношением

$$\left( \frac{\Phi_x}{\Phi_\lambda} \right)_{\max} = \left( 1 + \frac{(1 - \lambda) \varepsilon_0}{\lambda \varepsilon'} \right) \left( 1 + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \right)^{-1} \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'} \right)^x \quad (2.18)$$

Отношение  $(1 - \lambda) \varepsilon_0$  к  $\lambda \varepsilon'$  следует считать малым сравнительно с 1, так как пластические деформации предполагаются малыми и поэтому отношение прироста напряжения на участке от  $\varepsilon'$  до  $\varepsilon_0$  к пределу текучести  $\sigma'$  значительно меньше 1. Заменяя точное значение  $x$  приближенным

$$x = \frac{(1 - \lambda) \varepsilon_0}{\lambda \varepsilon'}$$

и разлагая выражение (2.18) в ряд по степеням  $(1 - \lambda) / \lambda$ , находим

$$\left( \frac{\Phi_x}{\Phi_\lambda} \right)_{\max} = 1 - \frac{1 - \lambda}{\lambda} \left( 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'} \log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'} \right) \quad (2.19)$$

При пластической деформации, превосходящей упругую в 6 раз ( $2\varepsilon_0 = 6\varepsilon'$ ), выбранный нами способ аппроксимации ломаной линии степенной функцией приводит к максимальной ошибке  $130(1 - \lambda) / \lambda$  %, и так как обычно  $(1 - \lambda) / \lambda$  порядка  $0.02 \sim 0.04$ , то ошибка не более 6%.

Однако, если произвести аппроксимацию по способу наименьшего квадратичного отклонения и вместо ломаной прямой взять истинную выпуклую кривую  $\Phi(e_i)$ , эта ошибка не будет превосходить 1% в значительно большем диапазоне деформаций. Отметим в заключение, что возможность аппроксимировать экспериментальную кривую  $\Phi(e_i)$  с помощью функции  $\Phi_z = Ae_i^z$  является только достаточным, но не необходимым условием правильности теории малых упруго-пластических деформаций. Необходимые и достаточные условия остаются пока неизвестными. В качестве примера укажем на задачу о плоской деформации полой трубы, в которой условие независимости тензора подобия  $\Pi(p)$  от параметра  $q$  выполняется автоматически и не налагает ограничений на вид функций  $\Phi(e)$ .

### § 3. 0 приближенном выражении условия пластичности

Обобщенное условие пластичности Мизеса устанавливает связь между интенсивностями напряжений и деформаций

$$\sigma_i = \Phi(e_i) \quad (3.1)$$

Сложность выражения величин  $\sigma_i$  через напряжения (1.3) и  $e_i$  через деформации (1.6), а также вид функции  $\Phi$  определяют сложность нелинейной задачи, к которой сводится интегрирование уравнений пластичности. В формулах (1.4) бывает важно упростить выражение коэффициента  $\sigma_i/e_i$  через компоненты напряжений или деформаций. Рассмотрим одно из упрощений, возможное в самом общем случае напряженного состояния. В сущности оно основано на работе Мизеса [3], поскольку является обобщением условия постоянства максимального касательного напряжения за пределом упругости тела на случай материала, обладающего упрочнением.

Рассмотрим дробь

$$R = \frac{1}{|a_{12}|} \sqrt{a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{31}^2} \quad (3.2)$$

в которой действительные величины  $a_{ij}$  удовлетворяют условиям

$$a_{12} + a_{23} + a_{31} = 0 \quad (|a_{12}| \geq |a_{23}| \geq |a_{31}|) \quad (3.3)$$

Нетрудно видеть, что величина  $R$  заключена в пределах

$$\sqrt{2} \geq R \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

т. е. отличается от постоянного значения

$$R = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \approx 1.32 \quad (3.4)$$

не более чем на 7.1%. С такой же степенью точности функция трех переменных  $a_{ij}$ , удовлетворяющих условию (3.3), может быть заменена функцией одной переменной

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} |a_{12}|$$

Поскольку интенсивности напряжений и деформаций выражаются через главные касательные напряжения

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad (3.5)$$



и главные сдвиги

$$\gamma_{12} = e_1 - e_2, \quad \gamma_{23} = e_2 - e_3, \quad \gamma_{31} = e_3 - e_1 \quad (3.6)$$

по формулам

$$\sigma_i = \sqrt{2} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}, \quad e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2} \quad (3.7)$$

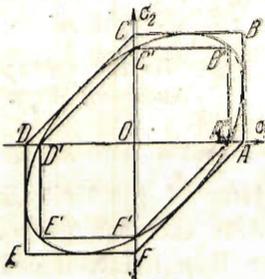
и поскольку среди величин  $\tau_{ij}$  одна является максимальным касательным напряжением  $\tau_{\max}$ , а среди  $\gamma_{ij}$  одна является максимальным сдвигом  $\gamma_{\max}$ , то с точностью  $7,1\%$  каждая из них может быть записана в виде

$$\sigma_i = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \tau_{\max}, \quad e_i = \frac{2 + \sqrt{3}}{6} \gamma_{\max} \quad (3.8)$$

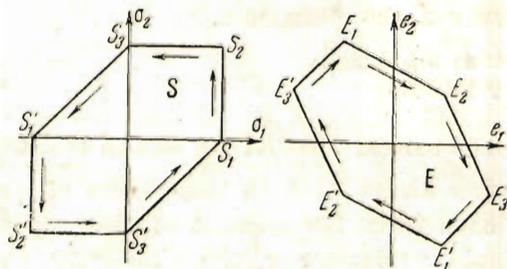
Эти формулы означают, что в тех случаях, когда главные оси напряжений или деформаций известны, величины  $\sigma_i, e_i$  могут быть выражены линейно через напряжения и деформации соответственно и потому обобщенное условие Мизеса (3.1) можно приближенно записать в виде

$$\sigma_i = \Phi \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{6} \gamma_{\max} \right), \quad e_i = \Phi^{-1} \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \tau_{\max} \right) \quad (3.9)$$

Первая из формул (3.8) отражает уже известную истину: условие пластичности Мизеса и Сен-Венана мало отличаются между собой. Такой заменой



Фиг. 3:



Фиг. 4.

недавно воспользовался Коברי [4]. При решении задачи пластичности  $\frac{3}{2}$  для материала без упрочнения в общем случае плоского напряженного состояния эллипс Мизеса  $\sigma_i = \text{const}$  им был заменен шестиугольником Сен Венана-Кулона (фиг. 3)  $\tau_{\max} = \text{const}$ .

В общем случае плоского напряженного состояния пластинки из материала, обладающего упрочнением, главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2 (\sigma_3 = 0)$  связаны с главными удлинениями  $e_1, e_2 (e_3 = -e_1 - e_2)$  зависимостями, вытекающими из (1.4):

$$\sigma_1 - \frac{1}{2} \sigma_2 = \frac{\sigma_i}{e_i} e_1, \quad \sigma_2 - \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{\sigma_i}{e_i} e_2 \quad (3.10)$$

Коэффициент  $\sigma_i / e_i$  согласно (3.9) может быть выражен либо через  $\tau_{\max}$ , либо через  $\gamma_{\max}$ . В плоскостях  $\sigma_1 \sigma_2$  и  $e_1 e_2$  (фиг. 4) изображены шестиугольники напряжений и деформаций. Буквами  $S$  и  $E$  с одинаковыми индексами изображены соответствующие друг другу напряженные и деформированные состояния. Чтобы выразить явно коэффициент  $\sigma_i / e_i$  через деформации  $e_1, e_2$ , следует уяснить, на каком участке шестиугольника деформаций определяется напряженное состояние, причем следует различать 6 участков.

Соответствующие точки шестиугольников находятся из соотношения, вытекающего из (3.10):

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_2 - \sigma_1}$$

Участку  $S_1 S_2$  шестиугольника  $S$  соответствует участок  $E_1 E_2$  шестиугольников  $E$ , т. е. значению  $\tau_{\max} = \sigma_1/2$  соответствует  $\gamma_{\max} = 2e_2 + e_1$ , причем движению по шестиугольнику  $S$  против часовой стрелки соответствует движение  $E$  по часовой стрелке. Приводим соответствие значений  $\tau_{\max}$  и  $\gamma_{\max}$  по участкам, указанным на рис. 4

S	$S_1 S_2$	$S_2 S_3$	$S_3 S_1$	$S_1' S_2'$	$S_2' S_3'$	$S_3' S_1'$
$\tau_{\max}$	$\frac{1}{2} \sigma_1$	$\frac{1}{2} \sigma_2$	$\frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1)$	$-\frac{1}{2} \sigma_1$	$-\frac{1}{2} \sigma_2$	$\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$
$\gamma_{\max}$	$2e_2 + e_1$	$2e_1 + e_2$	$e_1 - e_2$	$-(2e_2 + e_1)$	$-(2e_1 + e_2)$	$e_2 - e_1$
E	$E_1 E_2$	$E_2 E_3$	$E_3 E_1'$	$E_1' E_2'$	$E_2' E_3'$	$E_3' E_1$

Величины  $\tau_{\max}$  и  $\gamma_{\max}$ , поименованные в этой таблице, являются существенно положительными.

В тех случаях задач о плоском напряженном состоянии, когда главные оси напряжений известны, а характеристика материала пластинки  $\sigma_i = \Phi(e_i)$  представима в виде ломаной линии, приведенные выше соображения и таблица показывают, что дифференциальные уравнения пластичности будут линейными и легко решаются.

Поступила в редакцию  
9 III 1946

Институт механики  
Академии Наук СССР

#### A. A. ILYUSHIN. THEORY OF SMALL ELASTICO-PLASTIC DEFORMATIONS

The paper shows that in those cases of problems of plasticity in which external loads from the moment of their application increase proportionally to the single parameter  $q$ , the similarity tensor  $\Pi(p_{ij})$  introduced by the author in a previous work [1] is independent of the parameter  $q$ ,

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial q} = 0 \quad (2.2)$$

and hence the solution of the mathematical problem according to the theory of small elasto-plastic deformations will have physical meaning, that is, conforms to experimental results.

Pointed out in addition is an approximate means of linearising the equations of the theory of plasticity in cases where the main axis of stress is known beforehand.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Связь между теорией Сен-Ванана-Леви-Мизеса и теорией малых упруго-пластических деформаций. Журнал Прикладная математика и механика. 1945. Т. IX.
2. Taylor G. J. and Quinney. The Plastic Distortion of Metals. Philos. Trans. of the Royal Soc. of London. Series A. 1931. Vol. 230.
3. Mises R. Mech. d. festen Körpers in plastischem deformiertem Zustand. Gott. Nachricht., m-ph. Kl. 1913.
4. Coburn N. A Boundary Value Problem in Plane Plasticity for the Coulomb Yield Condition. J. Math. Phys. Mass. Inst. Techn. 1944. Vol. 23.