

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛНЫ РАЗГРУЗКИ ВДОЛЬ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО ПРЕДЕЛА УПРУГОСТИ¹

(ЗАДАЧА О НАКОПЛЕНИИ ОСТАТОЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ)

Х. А. Рахматулин

(Москва)

§ 1. Постановка задачи и общие уравнения. Рассмотрим полубесконечный стержень; пусть предел упругости σ_0 каждого элемента стержня является функцией лагранжевой координаты этого элемента $\sigma_0 = \sigma_0(x)$. Деформацию элемента, соответствующую его пределу упругости, обозначим через $e_0 = e_0(x)$; следовательно,

$$\sigma_0(x) = E e_0(x) \quad (1.1)$$

где E — модуль упругости.

Относительно деформации $e_0 = e_0(x)$ которую в дальнейшем будем называть пределом упругих деформаций, сделаем предположение, что она является монотонно убывающей функцией x .

Заметим, что стержень постоянного предела упругости после продольного удара переходит в стержень переменного предела упругости.

При принятых допущениях зависимость напряжения $\bar{\sigma}$ от деформации $\bar{\varepsilon}$ имеет вид, представленный на фиг. 1. Эта зависимость аналитически представится следующими уравнениями:

$$\bar{\sigma} - \sigma_0 = \sigma(\bar{\varepsilon} - e_0) \quad \text{для} \quad \bar{\varepsilon} > e_0(x). \quad (1.2)$$

$$\bar{\sigma} = E \bar{\varepsilon} \quad \text{для} \quad \bar{\varepsilon} < e_0(x) \quad (1.3)$$

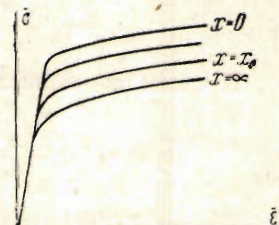
Если продольное смещение обозначим через $u(x, t)$, то уравнение движения будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \quad (\bar{\varepsilon} < e_0(x)) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = a^2 (\bar{\varepsilon} - e_0) \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{d e_0}{d x} \right] + a_0^2 \frac{d e_0}{d x} \quad (\bar{\varepsilon} > e_0(x)) \quad (1.5)$$

где, обозначая через ρ массовую плотность, a_0 скорость звука в упругой зоне:

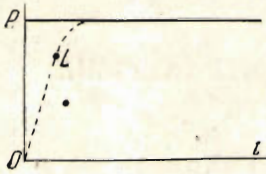
$$a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma(\bar{\varepsilon} - e_0)}{\partial (\bar{\varepsilon} - e_0)}, \quad a_0^2 = \frac{E}{\rho}$$



Фиг. 1.

¹ Доложено на 2-м совещании по теории упругости, строительной механике и теории пластичности 25 — 28 марта 1946 в Институте механики Акад. Наук СССР.

Пусть на конце стержня мгновенно возникает давление, монотонно убывающее во времени и несколько превосходящее предел упругости стержня. Поставим себе задачу определить закон передачи этого давления вдоль стержня. Предварительно рассмотрим случай, когда возникшее давление остается постоянным.



Фиг. 2.

Аппроксимируем «мгновенно возникающее» давление монотонной кривой $p = p(t)$, показанной на фиг. 2. Найдя решение для этого закона давления, интересующее нас решение получим предельным переходом, когда кривая OL неограниченно приближается к оси OP . При сделанных предположениях плоскость xt разделится на область A и на область B (фиг. 3). В области A движение описывается уравнением (1.4), а в области B — уравнение (1.5). Область A в свою очередь делится на область, лежащую ниже прямой $x = a_0 t$, и область выше прямой. Очевидно, в части плоскости, лежащей ниже прямой $x = a_0 t$, имеем

$$\bar{u}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \equiv 0, \quad \bar{u}_t = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \equiv 0. \quad (1.6)$$

В части же области A , лежащей выше прямой $x = a_0 t$, имеем

$$\bar{u}_x = \varepsilon_1 \left(t - \frac{x}{a_0} \right), \quad \bar{u}_t = -a_0 \varepsilon_1 \left(t - \frac{x}{a_0} \right) \quad \left(\varepsilon_1(t) = \frac{p(t)}{E} \right) \quad (1.7)$$

Линия LL' разделяет области упругих и пластических деформаций; поэтому на ней имеем

$$\varepsilon_1 \left(t - \frac{x}{a_0} \right) = e_0(x) \quad (1.8)$$

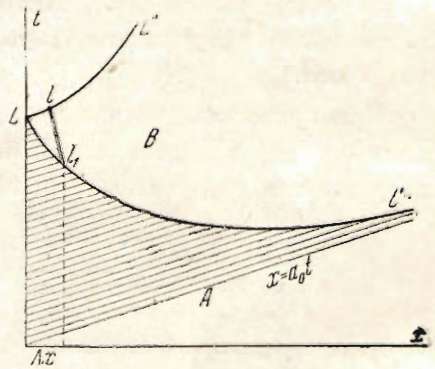
Соотношение (1.8) является уравнением линии LL' .

Докажем, что в пределе, когда кривая $OL \rightarrow OP$ на фиг. 2, то линия LL' на фиг. 3 стремится к прямой $x = a_0 t$. Для этого аппроксимируем прямой линией участок кривой OL на фиг. 2, т. е. положим

$$\varepsilon_1(t) = kt \quad (1.9)$$

Тогда, пользуясь (1.8), получим

$$t - \frac{x}{a_0} = \frac{e_0(x)}{k} \quad (1.10)$$



Фиг. 3.

Мгновенно возникающее давление, очевидно, равносильно давлению, возрастающему с бесконечно большой скоростью. Поэтому, полагая $k \rightarrow \infty$ в (1.10), получим, что в пределе кривая LL' совпадает с прямой $x = a_0 t$.

Докажем теперь, что характеристики положительного направления, исходящие из точек кривой LL' , при указанном предельном переходе будут иметь касания любого высшего порядка с прямой $x = a_0 t$. Введем новую функцию

$$u = \bar{u} - u_0 \quad \left(\frac{du_0}{dx} = e_0(x) \right) \quad (1.11)$$

тогда уравнение (1.5) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(u_x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_0^2 \frac{de_0}{dx} \quad (1.12)$$

На кривой LL'

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = e_0(x), \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -a_0 e_0(x)$$

Следовательно, для функции u имеем на кривой LL'

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -a_0 e_0(x)$$

По этим данным можно найти решения во всей области между LL' и характеристикой положительного направления, исходящей из точки L .

Характеристики в плоскости xt имеют вид

$$dx = \pm a(u_x) dt, \quad du_t = \pm a(u_x) du_x + a_0^2 \frac{de_0}{dx} dt \quad (1.13)$$

Следовательно, вдоль характеристик имеем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a'(u_x) \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right] = a'(u_x) \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} a(u_x) \right]$$

С другой стороны, вдоль кривой LL' имеем

$$\frac{du_x}{ds} = \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{dt}{ds} \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right] = 0$$

Так как при предельном переходе $dx/dt = a_0$, то вторая производная $d^2 x/dt^2$ исчезает; исчезновение производных высшего порядка можно показать аналогичным путем. Таким образом наше утверждение доказано.

Потребуем, чтобы начало координат было точкой разветвления первых производных функций u , т. е. предельные значения u_t и u_x при стремлении x и t к нулю по различным направлениям были бы различными. Докажем, что эти предельные значения u_x и u_t связаны некоторым соотношением.

Пусть u_{x1} , u_{t1} и u_{x2} , u_{t2} соответственно значения u_x , u_t в двух точках, лежащих на одной характеристике отрицательного направления. Тогда, интегрируя второе уравнение из (1.13), получаем

$$u_{t2} - u_{t1} = -[\psi(u_{x2}) - \psi(u_{x1})] + O(x_2 - x_1) \quad \left(\psi(u_x) = \int_0^{u_x} a(u_x) du_x \right)$$

Если упомянутые точки стремиться к началу координат, то в пределе получим

$$u_{t2} - u_{t1} = -[\psi(u_{x2}) - \psi(u_{x1})], \quad u_{t2} + \psi(u_{x2}) = u_{t1} + \psi(u_{x1}) = \text{const}$$

Произвольная постоянная в этом уравнении определится из условия, что при подходе к началу вдоль прямой $x = a_0 t$ мы имеем $u_x = 0$ и $u_t = -a_0 e_0(0)$.

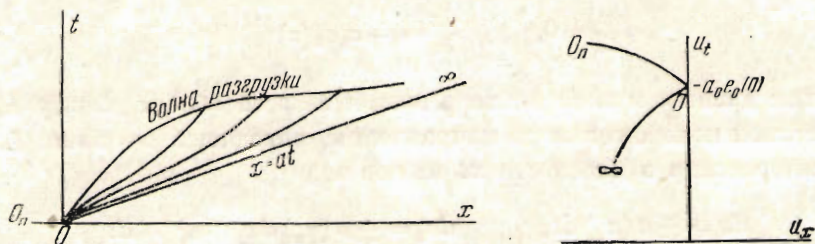
Следовательно, предельные значения u_x , u_t в начале координат удовлетворяют уравнению

$$u_t = -\psi(u_x) - a_0 e_0(0) \quad (1.14)$$

Заметим, что в последнем уравнении $e_0(0)$ есть предел упругих деформаций конца стержня, который может быть в два раза больше предела упругих деформаций ε_s стержня, не подверженного удару.

Дадим геометрическую интерпретацию нашей задачи путем рассмотрения плоскостей переменных xt и $u_x u_t$ (фиг. 4).

Всем точкам характеристики OO_n плоскости $u_x u_t$ соответствует начало координат плоскости xt . Характеристика $O\infty$ в плоскости $u_x u_t$ соответствует предельному положению характеристики LL' (фиг. 3), когда точка L стремится к точке O .



Фиг. 4.

Геометрически очевидно, что указанное соответствие позволяет построить решение задачи в некотором углу с вершиной в начале координат. Последнее же является точкой разветвления характеристик уравнения (1.12).

Зная решение в указанной области, можно определить его и в области, прилегающей к оси t и ограниченной волной разгрузки, как это имело место для стержня постоянного предела упругости (см. нашу работу [1]).

Напомним, что волной разгрузки мы называем кривую в плоскости xt , являющуюся границей областей возрастания и убывания деформаций. Пусть уравнение волны разгрузки имеет вид $t = f(x)$. Обозначим через $e_x(x)$ деформацию и через $e_t(x)$ скорость элемента стержня на волне разгрузки.

В плоскости $u_x u_t$ для области, соответствующей точкам плоскости xt , лежащим выше волны разгрузки, имеем

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sigma_0(x) + E' [e_x(x) - e_0(x)] - E [e_x(x) - (u_x + e_0)] \\ \sigma &= Ee_0 - (E - E') [e_x(x) - e_0(x)] + Eu_x \end{aligned} \tag{1.15}$$

Следовательно, для $t > f(x)$ дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_0^2 \frac{de_0}{dx} - (a_0^2 - a_1^2) \left(\frac{de_x}{dx} - \frac{de_0}{dx} \right) \tag{1.16}$$

В этом уравнении $a_1^2 = E' / \rho$ есть скорость звука в пластической зоне, а $e_x(x)$ является неизвестной функцией. Можно показать, что волна разгрузки $t = f(x)$ является линией разрыва вторых производных от смещений $u(x, t)$.

§ 2. Продольный удар по стержню постоянного предела упругости. Распределение предела упругости по длине стержня после продольного удара зависит от вида его первоначальной диаграммы сжатия, от массы и скорости ударяющего тела. Для сравнения с опытами представляет интерес распределение остаточных деформаций после многократных ударов.

Пусть диаграмма сжатия задана в виде схемы Прандтля. Для решения задачи об ударе нам нужно определить деформации и скорости элемента стержня в точке $x=0$. Пользуясь формулами (1.19) и (1.25) нашей работы о продольном ударе [1], получим

$$v_t = a_0 \frac{v_{x1} - v_{x2}}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_0(x_1) - \sigma_0(x_2)}{a_0 \rho} + a_0 [\varepsilon_0(x_2) - \varepsilon_0(x_1)] \right\}$$

Имея в виду $\sigma = \sigma_s + E'(\varepsilon - \varepsilon_s)$, найдем

$$v_t = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_1^2}{a_0} [\varepsilon_0(x_1) - \varepsilon_0(x_2)] + a_0 [\varepsilon_0(x_2) - \varepsilon_0(x_1)] \right\} \quad (2.1)$$

Аналогичным же образом получим

$$u_t = \frac{a_0}{2} [\varepsilon_0(x_1) - \varepsilon_0(x_2)] - (a_0 - a_1) \varepsilon_s - \frac{a_1}{2} [\varepsilon_0(x_1) + \varepsilon_0(x_2)] \quad (2.2)$$

Заметим, что скорость частицы стержня получается как сумма u_t и v_t . Следовательно, для начального момента удара имеем

$$v_0 = a_0 \varepsilon_s + a_1 (\varepsilon_m - \varepsilon_s) \quad (2.3)$$

Здесь и в дальнейшем под ε_s и ε_m понимаются их абсолютные значения.

При $\varepsilon_s = \varepsilon_m$ из (2.3) получаем $v_0 = a_0 \varepsilon_s$. Как видно, этот результат согласуется с теорией удара при упругих деформациях. Составляя сумму $u_t + v_t = \bar{u}_t$ согласно (2.1) и (2.2), получим

$$\frac{d\bar{u}(0, t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{a_0} [\varepsilon_0(x_1) - \varepsilon_0(x_2)] - \frac{a_1}{2} [\varepsilon_0(x_2) + \varepsilon_0(x_1)] - (a_0 - a_1) \varepsilon_s \quad (2.4)$$

где

$$x_2 = \frac{a_0 a_1 t}{a_0 - a_1} = \alpha t, \quad x_1 = \frac{a_0 a_1 t}{a_0 + a_1} = \beta t \quad (2.5)$$

Если иметь в виду, что для нашего случая

$$\psi(\varepsilon) = a_0 \varepsilon_s + a_1 (\varepsilon - \varepsilon_s), \quad \sigma_0(\varepsilon_0) = \sigma_s + E'(\varepsilon_0 - \varepsilon_s)$$

то формула (1.26) нашей работы [1] дает

$$\bar{u}_x = \varepsilon_0(x) - \left\{ \frac{\sigma_s + a_1^2}{E + a_0^2} [\varepsilon_0(x) - \varepsilon_s] \right\} + \frac{\sigma_s}{E} - \frac{a_1^2}{a_0^2} \varepsilon_s + \frac{a_1^2 \varepsilon_0(x_1) + \varepsilon_0(x_2)}{a_0^2} + \frac{a_1 \varepsilon_0(x_2) - \varepsilon_0(x_1)}{a_0} \quad (2.6)$$

Или в точке $x=0$, имея в виду (2.5), для давления p получим выражение

$$p = (E - E') \varepsilon_s + A \varepsilon_0(\alpha t) - B \varepsilon_0(\beta t) \quad (2.6)$$

где

$$A = \frac{E}{2} \left[\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_1^2}{a_0^2} \right], \quad B = \frac{E}{2} \left[\frac{a_1}{a_0} - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right] \quad (2.7)$$

Напишем уравнение движения ударяющего тела

$$m \frac{d^2 u(0, t)}{dt^2} = FP \quad (2.8)$$

Здесь m — масса тела, F — площадь поперечного сечения стержня.

Подставляя из (2.4) и (2.6) в (2.8), получим

$$C \varepsilon_0'(\beta t) + D \varepsilon_0'(\alpha t) = -F(E - E') \varepsilon_s - FA \varepsilon_0(\alpha t) + BF \varepsilon_0(\beta t) \quad (2.9)$$

где

$$C = \frac{m\beta}{2} \left[a_1 - \frac{a_1^2}{a_0} \right], \quad D = \frac{m\alpha}{2} \left[a_1 + \frac{a_1^2}{a_0} \right] \quad (2.10)$$

Решение дифференциально-функционального уравнения (2.9) ищем в виде

$$\varepsilon_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Подставляя в (2.9), получим

$$\begin{aligned} C \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \beta^{n-1} t^{n-1} + D \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \alpha^{n-1} t^{n-1} = \\ = -F(E - E') \varepsilon_s - FA \sum_{n=0}^{\infty} b_n \alpha^n t^n + BF \sum_{n=0}^{\infty} b_n \beta^n t^n \end{aligned}$$

Откуда

$$(C + D) b_1 = -F(E - E') \varepsilon_s - F b_0 (A - B)$$

Значение ε_0 при $x=0$ известно и равно ε_m . Следовательно,

$$b_0 = \varepsilon_m, \quad b_1 = -\frac{p_m}{C + D} = -\frac{F p_m (a_0^2 - a_1^2)}{a_1^2 m (a_0^2 + a_1^2)} \quad (2.11)$$

В последней формуле $p_m < 0$, если $\varepsilon_0 < 0$, и $p_m > 0$ если $\varepsilon_0 > 0$. Для $n \geq 2$ находим

$$b_n = \frac{F(B\beta^{n-1} - A\alpha^{n-1})}{n(C\beta^{n-1} + D\alpha^{n-1})} b_{n-1} \quad (2.12)$$

Пусть $r = r(x)$ — закон изменения радиусов сечений стержня после удара.

Предполагая материал несжимаемым, для радиуса $r(0)$ конца стержня и угла наклона касательной к кривой $r = r(x)$ в точке $x=0$ после одного удара имеем

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \varepsilon^*(x)}}, \quad \operatorname{tg} \chi = \left(\frac{dr}{dx} \right)_{x=0} = + \frac{r_0 b_1 (1 - a_1^2 / a_0^2)}{2(1 - \varepsilon^*)^{3/2}} \quad (2.13)$$

где r_0 — начальный радиус, $\varepsilon^*(x)$ — остаточная деформация. Или, подставляя вместо b_1 его значение согласно (2.11), получим

$$\operatorname{tg} \chi = -\frac{r_0 F p_m (a_0^2 - a_1^2)^{3/2}}{2(1 - \varepsilon^*)^{3/2} a_1^2 m (a_0^2 + a_1^2)} \quad (2.14)$$

Из формулы (2.3) следует, что деформация конечного сечения стержня ε_m не зависит от массы ударяющего тела, а зависит только от скорости удара. Из формулы же (2.14) следует, что тангенс угла наклона кривой $r = r(x)$ в начале координат мало меняется с изменением скорости ударяющего тела, а зависит главным образом от его массы.

Выразим остаточную деформацию ε^* через $\varepsilon_0(x)$. Непосредственно из определения остаточной деформации имеем

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0(x) - \frac{\sigma_s + E'(\varepsilon_0 - \varepsilon_s)}{E} \quad \text{или} \quad \varepsilon^* = \left(1 - \frac{E'}{E} \right) [\varepsilon_0(x) - \varepsilon_s]$$

Подставляя разложение $\varepsilon_0(x)$, получаем

$$\varepsilon^* = (1 - \lambda^2) \left[\varepsilon_m - \varepsilon_s + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \right] \quad (2.15)$$

Из этой формулы имеем, что при $\varepsilon_m = \varepsilon_s$ остаточная деформация ε^* не равна тождественно нулю. Это происходит потому, что существует зона распространения остаточных деформаций, которая стремится к нулю вместе с разностью $\varepsilon_m - \varepsilon_s$.

В самом деле, так как $b_1 < 0$, то при $\varepsilon_m - \varepsilon_s$ достаточно малом уравнение

$$\varepsilon_m - \varepsilon_s + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = 0$$

обязательно имеет положительный корень.

Если обозначить через l^* длину зоны распространения остаточных деформаций, то следует к (2.15) присоединить уравнение

$$\varepsilon^* \equiv 0 \quad \text{при } x > l^*$$

§ 3. Продольный удар по стержню переменного предела упругости. Как и в предыдущем случае, деформация конца стержня ε_m зависит только от скорости удара, причем скорость и деформация конца стержня в начале координат будут связаны уравнением (1.14). Так как в нашем случае

$$u_t = v_1, \quad \psi = a_1 u_x = a_1 [\varepsilon(x) - e_0(x)]$$

то уравнение, связывающее скорость удара с максимальной деформацией конца стержня, будет иметь вид

$$v_1 = +a_1 [\varepsilon_{m1} - e_0(0)] + a_0 e_0(0) \quad (3.1)$$

Эта формула имеет такую же структуру, как и формула (2.3). В ней $e_0(0)$ является пределом упругих деформаций концевое сечения стержня.

Допустим, что мы рассматриваем второй удар по стержню, тогда

$$e_0(0) = \frac{\sigma_s + E'(\varepsilon_m + \varepsilon_s)}{E} \quad (3.2)$$

Значение скорости v_{s1} , необходимое для достижения предела упругости концевое сечение стержня, получим из формулы (3.1), полагая в ней $\varepsilon_{m1} = e_0(0)$ и одновременно заменяя $e_0(0)$ согласно (3.2). Имеем

$$v_{1s} = a_0 e_0(0) = a_0 \left[\varepsilon_s + \frac{E'}{E} (\varepsilon_m - \varepsilon_s) \right] = a_0 \varepsilon_s + \frac{a_1^2}{a_0} (\varepsilon_m - \varepsilon_s) \quad (3.3)$$

Сравнивая формулу (2.3) с формулой (3.3) и учитывая, что множитель a_1/a_0 при втором слагаемом правой части последней формулы значительно меньше единицы, приходим к заключению: скорость v_0 , необходимая для достижения деформации ε_m , при первом ударе значительно больше, чем скорость v_{s1} , необходимая для достижения предела упругих деформаций при втором ударе.

Заметим, что при первом ударе со скоростью v_0 и при втором ударе со скоростью v_{s1} на конце стержня возникает одинаковое напряжение.

Если принять схему Прандтля, то повышение предела упругости при повторных ударах можно изображать точками A, B, C, D и т. д. (фиг. 5).

Представляет некоторый интерес вопрос о том, будет ли иметь предел указанное повышение предела упругости при многократных ударах с одной и той же скоростью. Для решения этого вопроса достаточно рассмотреть урав-

нение, получающееся сравнением правых частей (2.3) и (3.1):

$$a_0 e_0(0) + a_1 [\varepsilon_{m1} - e_0(0)] = a_0 \varepsilon_s + a_1 (\varepsilon_m - \varepsilon_s) = v_0 \quad (3.4)$$

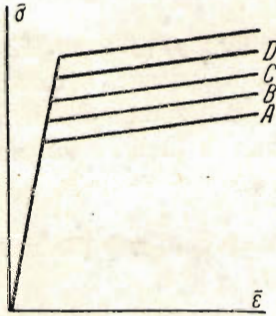
Это уравнение связывает деформации конца при двух последовательных ударах, причем $e_0(0)$ и ε_s согласно (3.2) должны удовлетворять зависимости

$$e_0(0) = \frac{E\varepsilon_s + E'(\varepsilon_m - \varepsilon_s)}{E} \quad (3.5)$$

Так как соотношения (3.4) и (3.5) имеют место для любых двух последовательных ударов, мы имеем право заменить в них ε_m , ε_{m1} , ε_s , $e_0(0)$ соответственно на $\varepsilon_{m, n-1}$, ε_{mn} , $\varepsilon_{s, n-1}$, ε_{sn} , где n указывает номер удара.

Подставляя ε_m из (3.4) в (3.5) и производя указанную замену, получим для двух последовательных ударов

$$\varepsilon_{sn} = \lambda \bar{v}_0 + \beta \varepsilon_{s, n-1} \quad (3.6)$$



где

$$\beta = 1 - \lambda, \quad \lambda = \frac{a_1}{a_0}, \quad \bar{v}_0 = \frac{v_0}{a_0} \quad (3.7)$$

Пользуясь рекуррентностью этого уравнения, из него легко получить

$$\varepsilon_{sn} = \bar{v}_0 (1 - \beta^n) + \beta^n \varepsilon_s \quad (3.8)$$

Откуда, имея в виду, что $\beta < 1$ при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\varepsilon_{s\infty} = \bar{v}_0$$

Фиг. 5.

Подставляя $\beta = 1 - \lambda$, уравнение (3.6) можно представить в виде

$$\varepsilon_{sn} = \varepsilon_{s, n-1} + \lambda (\bar{v}_0 - \varepsilon_{s, n-1})$$

Отсюда заключаем, что пределы упругости при двух последовательных ударах $n-1$ -м и n -м могут быть одинаковы, если $\bar{v}_0 = \varepsilon_{s, n-1}$. Это равенство возможно при $n = \infty$. Следовательно, предел для последовательности пределов упругости при повторных ударах может быть достигнут только при бесконечном числе ударов.

Найдем выражение для остаточной деформации ε_n^* после n -го удара. Пользуясь (3.4) и указанной выше заменой, имеем

$$a_0 \varepsilon_{sn} + a_1 (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{sn}) = v_0 \quad (3.9)$$

Но по определению

$$\varepsilon_n^* = \varepsilon_{mn} - \varepsilon_{s, n-1}$$

Следовательно, заменяя ε_{mn} по (3.9) и ε_{sn} по (3.8), получим

$$\varepsilon_n^* = \frac{v_0 - \varepsilon_{sn}}{\lambda} = \frac{v_0 + \beta^{n-1} v_0 - \beta^{n-1} \varepsilon_s}{\lambda} = \frac{v_0 - \varepsilon_s}{\lambda} \beta^{n-1} = k \beta^{n-1}$$

где λ , β , \bar{v}_0 согласно (3.7) и $k = (\bar{v}_0 - \varepsilon_s) / \lambda$.

Суммарная остаточная деформация после бесконечного числа ударов будет

$$\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^* = k \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} = k \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n = \frac{k}{1 - \beta} = \frac{\varepsilon_s^*}{\lambda}$$

Для определения радиуса конечного сечения стержня после n ударов имеем

$$r_n = \frac{r_{n-1}}{\sqrt{1 - \varepsilon_n^*}} = \frac{r_0}{\sqrt{(1 - \varepsilon_1^*)(1 - \varepsilon_2^*) \dots (1 - \varepsilon_n^*)}}$$

Откуда

$$2 \log \frac{r_\infty}{r_0} = - \sum_{n=1}^{\infty} \log (1 - \varepsilon_n^*)$$

Пользуясь разложением, $\log (1 - \varepsilon_n^*)$, получим

$$2 \log \frac{r_\infty}{r_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^* + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{*2} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{*3} + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{*m}$$

Для оценки внутренней суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{*m} = k^m \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{m(n-1)} = k^m [1 + \beta^m + \beta^{2m} + \dots + \beta^{nm}]$$

воспользуемся соотношением (справедливым при $\beta < 1$, m — целом положительном) $1 + \beta^m + \beta^{2m} + \beta^{3m} + \dots < 1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \dots < 1/(1 - \beta)$.

$$2 \log \frac{r_\infty}{r_0} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^m}{m(1-\beta)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^m}{m} < \frac{1}{\lambda(1-k)}$$

Отсюда следует, что при $k < 1$ предельное значение r_∞ радиуса концевго сечения является конечной величиной.

Пользуясь формулой для ε_n^* в первом приближении, можно принять

$$2 \log \frac{r_\infty}{r_0} = \frac{\varepsilon_1^*}{\lambda}, \quad \text{или} \quad r_\infty = r_0 \exp \frac{\varepsilon_1^*}{2\lambda} \approx r_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_1^*}{2\lambda} \right) \quad (3.11)$$

Определим теперь $d\varepsilon_m/dx$ при $x=0$. Через эту величину выражается угол наклона касательной к кривой $r=r(x)$ в точке $x=0$. Для этого найдем решение уравнения (1.16) при упомянутых условиях на волне разгрузки.

Положим

$$u = v(x, t) + w(x) \quad (3.12)$$

Функцию $w(x)$ определяем следующим образом:

$$\frac{dw}{dx} = w_x = \frac{a_0^2 - a_1^2}{a_0^2} [e_x(x) - e_0(x)] - e_0(x) \quad (3.13)$$

Тогда функция $v(x, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.14)$$

На волне разгрузки функция $v(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$v_x = e_x(x) - w_x(x) - e_0(x), \quad v_t = e_t(x) \quad (3.15)$$

Интегрируя уравнение (3.14) при условии (3.15), получим

$$\begin{aligned} v_t - e_t(x_2) &= +a_0 [v_x - e_x(x_2) + w_x(x_2) + e_0(x_2)] \\ v_t - e_t(x_1) &= -a_0 [v_x - e_x(x_1) + w_x(x_1) + e_0(x_1)] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Откуда

$$v_t = \frac{e_t(x_1) + e_t(x_2)}{2} - a_0 \lambda^2 \frac{e_x(x_2) - e_x(x_1)}{2} - (1 - \lambda^2) a_0 \frac{e_0(x_2) - e_0(x_1)}{2} \quad (3.17)$$

Так как $u_t = v_t$, из (3.17) получим

$$u_{tt} = \frac{1}{2} \left[\frac{de_t}{dx_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{de_t}{dx_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} \right] - \frac{a_0 \lambda^2}{2} \left[\frac{de_x}{dx_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} - \frac{de_x}{dx_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} \right] - \frac{(1-\lambda^2)a_0}{2} \left[\left(\frac{de_0}{dx} \right)_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} - \left(\frac{de_0}{dx} \right)_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} \right] \quad (3.18)$$

Замечая, что при $x=t=0$ имеет место

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = -\frac{a_0}{1-a_0 f'(0)}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{a_0}{1+a_0 f'(0)}$$

Из (3.18) получим

$$u_{tt} = \frac{a^2}{1-\lambda^{-2}} \left(\frac{de_x}{dx} \right)_0 - \frac{1}{a_1} \frac{a_0^2}{1-\lambda^{-2}} \left(\frac{de_t}{dx} \right)_0 + \frac{(1-\lambda^2)a_0^2}{1-\lambda^{-2}} \left(\frac{de_0}{dx} \right)_0 \quad (3.19)$$

Примем за новые переменные тангенс угла наклона характеристик φ в начале координат к оси t и абсциссу x_0 точки, лежащей на прямой $x=a_0 t$. Тогда в плоскости характеристик φx_0 имеем (фиг. 6).

$$\begin{aligned} x &= x(t), & u_x &= u_x(x_0), & u_t &= u_t(x_0) & \text{при } \varphi &= a_0 \\ x &= t=0, & u_x &= u_{x_0}(\varphi), & u_t &= u_t(\varphi) & \text{при } x_0 &= 0 \end{aligned}$$

Граничные данные для u_x, u_t на отрезке оси φ удовлетворяют уравнению (1.14) и на прямой $\varphi = a_0$ удовлетворяют уравнению кривой $O\infty$, показанной на фиг. 4. Найдем производную $\partial u_x / \partial x_0$ в точке $\varphi = a_0, x_0 = 0$.

Характеристика $\varphi = a_0$ плоскости φx_0 есть отображение характеристики LL'' плоскости xt (фиг. 3). Напомним, что уравнение LL' имеет вид (1.8).

Обозначим через Δx абсциссу точки l_1 , бесконечно близкой к точке L (фиг. 3). Заметим, что в точках l_1 и L мы имеем соответственно $u_x = 0, u_t = -a_0 e_0(\Delta x)$ и $u_x = 0, u_t = -a_0 e_0(0)$.

Напишем уравнения характеристики плоскости $u_x u_t$ в конечных разностях

$$u_{xt} + a_0 e_0(0) = +a_0 u_{xl} + a_0 [e_0(x_l) - e_0(0)]$$

$$u_{tl} + a_0 e_0(\Delta x) = -a_0 u_{xl} + a_0 [e_0(x_l) - e_0(\Delta x)]$$

Откуда, складывая, имеем $u_{xl} = e_0(0) - e_0(\Delta x)$. Для абсциссы точки l получим

$$x_l = \Delta x + \frac{1}{2\lambda_1} \frac{de_0}{dx} \Delta x$$

Следовательно, в пределе для точки $x_0 = 0, \varphi = a_0$ имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_{xl}}{x_l} = \frac{\partial u_x}{\partial x_0} = -\frac{de_0}{dx} \quad (3.20)$$

По определению функций $e_x(x)$ и $e_t(x)$ вдоль волны разгрузки имеем

$$\frac{de_x}{dx} - \frac{de_0}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial \tau} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial u_x}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dx}, \quad \frac{de_t}{dx} = \frac{\partial u_t}{\partial \tau} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial u_t}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dx} \quad (3.21)$$

В переменных x_0, φ уравнения характеристик (1.13) имеют вид

$$\frac{\partial u_t}{\partial x_0} = a \frac{\partial u_x}{\partial x_0} + a_0^2 \frac{de_0}{dx} \frac{\partial t}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial u_t}{\partial \varphi} = -a \frac{\partial u_x}{\partial \varphi} + a_0^2 \frac{de_0}{dx} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \quad (3.22)$$

Подставляя $\partial u_t / \partial \varphi$ и $\partial u_t / \partial x_0$ из этого уравнения в (3.21), получим

$$\frac{de_t}{dx} = a \left[\frac{du_x}{dx_0} \frac{dx_0}{dx} - \frac{\partial u_x}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dx} \right] + a_0^2 \frac{de_0}{dx} \left[\frac{dx_0}{dx} \frac{\partial t}{\partial x_0} + \frac{d\varphi}{dx} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \quad (3.23)$$

$$\frac{de_t}{dx} + a \frac{de_x}{dx} = 2a \frac{\partial u_x}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dx} + a_0^2 \frac{de_0}{dx} \left[\frac{dx_0}{dx} \frac{\partial t}{\partial x_0} + \frac{d\varphi}{dx} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] + a \frac{de_0}{dx}$$

Найдем значения $\partial u_x / \partial x_0$ в точке $(x_0 = 0, \varphi = a_1)$.

Исключая u_t из (3.22), получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[a \frac{\partial u_x}{\partial x_0} \right] + \frac{\partial}{\partial x_0} \left[a \frac{\partial u_x}{\partial \varphi} \right] + a_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{de_0}{dx} \frac{\partial t}{\partial x_0} \right) - \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{de_0}{dx} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) \right] = 0$$

Напишем уравнения характеристик в новых независимых переменных

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = a \frac{\partial t}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -a \frac{\partial t}{\partial \varphi}$$

Исключая x из этих уравнений, получим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[a \frac{\partial t}{\partial x_0} \right] + \frac{\partial}{\partial x_0} \left[a \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi \partial x_0} = \left[-\frac{\partial t}{\partial x_0} \frac{\partial a}{\partial \varphi} + \frac{\partial a}{\partial x_0} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] \frac{1}{2a}$$

Так как при $x_0 = 0$ для любого φ имеет место $t = t(\varphi) \equiv 0$, $a = \varphi$, получим

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi \partial x_0} = -\frac{1}{2\varphi} \frac{\partial t}{\partial x_0}$$

Интегрируя это уравнение и определяя постоянную из условия, найдем $\partial t / \partial x_0 = 1/a_0$, при $\varphi = a_0$ имеем

$$\frac{\partial t}{\partial x_0} = \frac{1}{\sqrt{a_0 \varphi}} \quad (3.24)$$

Угол наклона волны разгрузки в начале координат к оси t равен a_1 , поэтому $f'(0) = 1/a_1$. Следовательно,

$$\frac{dx_0}{dx} = \frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial x_0}{\partial t} f'(x) \quad (3.25)$$

Так же непосредственно можно вывести соотношения

$$\frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{1}{2a} \frac{\partial t}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{2a} \frac{\partial t}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial x_0}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial t}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \quad (3.26)$$

На основании (3.24) и (3.26) уравнение (3.25) дает

$$\frac{dx_0}{dx} = \frac{1}{a_1 \partial t / \partial x_0} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad \left(\lambda = \frac{a_1}{a_0} \right) \quad (3.27)$$

Вдоль характеристики $x_0 = 0$ имеем

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x_0 \partial \varphi} = -\frac{1}{2\sqrt{a_0 \varphi^3}}, \quad 2a \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi \partial x_0} + \frac{\partial a}{\partial \varphi} \frac{\partial u_x}{\partial x_0} + \frac{\partial a}{\partial x_0} \frac{\partial u_x}{\partial \varphi} + a_0^2 \frac{d^2 e_0}{dx^2} \left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial t}{\partial x_0} - \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] = 0.$$

Так как $x = t \equiv 0$, $a = \varphi$, то вдоль $x_0 = 0$ получим

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi \partial x_0} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial u_x}{\partial x_0} = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x_0} = \frac{C_1}{\varphi} = -\frac{a_0}{\varphi} \frac{dl_0}{dt}$$

При $x_0 = 0$, $\varphi = a_1$ имеем

$$\frac{\partial u_x}{\partial x_0} = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{de_0}{dx} \right)$$

Вычислим теперь следующее выражение в точке ($x_0 = 0$, $\varphi = a_1$);

$$\frac{dx_0}{dx} \frac{\partial t}{\partial x_0} + \frac{d\varphi}{dx} \frac{\partial t}{\partial \varphi} = \left[\frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial x_0}{\partial t} f' \right] \frac{\partial t}{\partial x_0} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} f' \right] \frac{\partial t}{\partial \varphi} = \frac{1}{a_1}$$

Имея в виду (3.2), из (3.23) получим

$$\frac{de_t}{dx} + a_1 \frac{de_x}{dx} = -\frac{2a_1}{\sqrt{\lambda^2}} \left(\frac{de_0}{dx} \right)_0 + \frac{a_0^2}{a_1} \left(\frac{de_0}{dx} \right)_0 + a_1 \frac{de_0}{dx} = a_1 \left[1 + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^{3/2}} \right] \frac{de_0}{dx}$$

Следовательно, выражение (3.19) можно привести к виду

$$u_{II} = -\frac{a_1^2(1+\lambda^2)}{1-\lambda^2} \left(\frac{de_x}{dx} \right)_0 + \frac{a_1^2}{1-\lambda^2} \left[\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^{3/2}} \right] \left(\frac{de_0}{dx} \right)_0 \quad (3.28)$$

Воспользуемся теперь уравнением движения ударяющего тела $mu_{II} = Fp$. В момент удара это уравнение согласно (3.28) имеет вид

$$-m \frac{a_1^2(1+\lambda^2)}{1-\lambda^2} \left(\frac{de_x}{dx} \right)_0 + \frac{a_1^2 m}{1-\lambda^2} \left[\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^{3/2}} \right] \left(\frac{de_0}{dx} \right)_0 = Fp_m \quad (3.29)$$

Разрешая (3.29) относительно de_x/dx , получим

$$\left(\frac{de_x}{dx} \right)_0 = -\frac{1-\lambda^2}{ma_1^2(1+\lambda^2)} \left[p_m F - \frac{ma^2}{(1-\lambda^2)} \frac{\lambda^4 + 1 - 2\sqrt{\lambda}}{\lambda^2} \left(\frac{de_0}{dx} \right) \right] \quad (3.30)$$

Так как $p_m < 0$, то оба члена, стоящие в квадратной скобке, имеют одинаковые знаки, следовательно, максимальные деформации в случае стержня переменного предела упругости падают быстрее, чем для стержня постоянного предела упругости.

Заметим, что при $e_0 = \text{const}$ из формулы (3.30) как частный случай получается формула (2.14) для стержня постоянного предела упругости.

По определению остаточной деформации

$$\varepsilon^*(x) = (1-\lambda^2) [e_x(x) - \varepsilon_s(x)]$$

где $\varepsilon_s(x)$ предел упругости данного сечения перед совершением удара.

Следовательно,

$$\frac{d\varepsilon^*}{dx} = (1-\lambda^2) \left[\frac{de_x}{dx} - \frac{d\varepsilon_s}{dx} \right] \quad (3.31)$$

Из (3.30) легко усмотреть, что даже при p_m , близком к σ_s , производная de/dx остается конечной. Следовательно, при p_m , достаточно близком к σ_s , всегда найдется такое значение $x = x^*$, достаточно близкое к нулю, для которого $\varepsilon^* = 0$. Ввиду того, что $\varepsilon_s(x)$ по абсолютной величине убывает, то для $x > x^*$ частицы стержня обязательно выходят за предел упругости.

Поэтому $\varepsilon^*(x)$ для $x > x^*$ должна быть по абсолютной величине возрастающей функцией, а не убывающей, как это следует из (3.31). Таким образом формула (3.31) пригодна для $x < x^*$. Определение закона распределения $\varepsilon^*(x)$ для $x > x^*$ представляет более трудную задачу, и в настоящей работе не рассматривается. Перейдем к рассмотрению многократных ударов.

Имеем следующие формулы, пригодные для любого сечения

$$p_n = E\varepsilon_{sn} + E' [\varepsilon_{nn} - \varepsilon_{s,n-1}] = E\varepsilon_{sn}, \quad \varepsilon_{sn} = (1 - \lambda^2) \varepsilon_{s,n-1} + \lambda^2 \varepsilon_{mn} \quad (3.32)$$

$$\varepsilon_n^* (x) = (1 - \lambda^2) [\varepsilon_{mn}(x) - \varepsilon_{s,n-1}(x)] = \varepsilon_{mn} - \varepsilon_{sn}$$

где ε_n^* , ε_{sn} , ε_{mn} — соответственно остаточная деформация, предел упругости и максимальная деформация некоторого сечения стержня после n -го удара.

Выражение (3.30) в рассматриваемом случае примет вид

$$\frac{d\varepsilon_{mn}}{dx} = -a\varepsilon_{sn} + b \frac{d\varepsilon_{s,n-1}}{dx} \quad (3.33)$$

где

$$a = \frac{EF(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)ma_1^2}, \quad b = \frac{\lambda^4 + 1 - 2\sqrt{\lambda}}{\lambda^2(1+\lambda^2)} \quad (3.34)$$

Дифференцируя второе из (3.32), легко найти

$$\frac{d\varepsilon_{mn}}{dx} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\varepsilon_{sn}}{dx} - \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \frac{d\varepsilon_{s,n-1}}{dx}$$

Подставляя это в (3.33), получим

$$\frac{d\varepsilon_{sn}}{dx} = -a\lambda^2\varepsilon_{sn} + [b\lambda^2 + (1-\lambda^2)] \frac{d\varepsilon_{s,n-1}}{dx} \quad (3.25)$$

Введем обозначение

$$k_1 = b\lambda^2 + 1 - \lambda^2 = \frac{\lambda^4 + 1 - 2\sqrt{\lambda} + 1 - \lambda^4}{1 + \lambda^2} = 2 \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \lambda^2}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_{sn}}{dx} &= -a\lambda^2\varepsilon_{sn} + k_1 \frac{d\varepsilon_{s,n-1}}{dx} = -a\lambda^2\varepsilon_{sn} + k_1 \left[-a\lambda^2\varepsilon_{s,n-1} + k_1 \frac{d\varepsilon_{s,n-2}}{dx} \right] = \\ &= -a\lambda^2 [\varepsilon_{sn} + k_1\varepsilon_{s,n-1} + \dots + k_1^{n-1}\varepsilon_{s1}] \end{aligned}$$

Заметим, что это уравнение не меняет вида, если вместо ε_{sn} подставить абсолютное значение ε_{sn} согласно (3.8); имеем

$$\begin{aligned} \frac{d|\varepsilon_{sn}|}{dx} &= -a\lambda^2 \bar{v}_0 \sum_0^{n-1} k_1^r + a\lambda^2 (\bar{v}_0 - \varepsilon_s) \beta \sum_0^{n-1} \beta^{n-r-1} k_1^r = \\ &= -a\lambda^2 \left[\frac{k_1^n - 1}{v_0 k_1 - 1} - \beta (\bar{v}_0 - \varepsilon_s) \frac{k_1^n - \beta^n}{k_1 - \beta} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Для $k_1 > 1$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d|\varepsilon_{sn}|}{dx} = -\infty \quad (3.27)$$

Из второй и третьей формул (3.32) легко получить

$$\varepsilon_n^* = \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} [\varepsilon_{sn} - \varepsilon_{s,n-1}], \quad \text{откуда} \quad \frac{d\varepsilon_n^*}{dx} = \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \left[\frac{d\varepsilon_{sn}}{dx} - \frac{d\varepsilon_{s,n-1}}{dx} \right]$$

На основании (3.25) имеем

$$\frac{d\varepsilon_{sn}}{dx} - \frac{d\varepsilon_{s,n-1}}{dx} = -a\lambda^2 \varepsilon_{sn} + (k_1 - 1) \frac{d\varepsilon_{s,n-1}}{dx}$$

Следовательно,

$$\frac{d\varepsilon_n^*}{dx} = \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \left[-a\lambda^2 \varepsilon_{sn} + (k_1 - 1) \frac{d\varepsilon_{s,n-1}}{dx} \right] \quad (3.28)$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d|\varepsilon_n^*|}{dx} = -\infty$$

Согласно формулам (3.23) и (3.8), пользуясь формулой (3.28) для градиента остаточных деформаций, получим

$$\frac{d|\varepsilon_n^*|}{dx} = (1 - \lambda^2)a \left[\bar{v}_0(1 - \beta^n) + \beta^n \varepsilon_s + (k_1 - 1) \left(v_0 \frac{k_1^{n-1} - 1}{k_1 - 1} - \beta(\bar{v}_0 - \varepsilon_s) \frac{k_1^{n-1} - \beta^{n-1}}{k_1 - \beta} \right) \right]$$

Найдем теперь угол наклона касательной в точке удара к меридиональному сечению стержня после n -го удара.

Уравнение указанного меридионального сечения стержня имеет следующий вид:

$$r_n(x) = \frac{r_0}{\sqrt{(1 - \varepsilon_1^*)(1 - \varepsilon_2^*) \dots (1 - \varepsilon_n^*)}} \quad (3.30)$$

Дифференцируя (3.30), получим

$$\operatorname{tg} \chi_n = \frac{dr_n}{dx} = \frac{r_n}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \varepsilon_i^*} \frac{d\varepsilon_i^*}{dx} \quad (3.31)$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и имея в виду (3.27), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \chi_n = -\infty \quad (3.32)$$

Этот результат указывает на то, что после достаточно большого числа ударов стержень, имеющий первоначально цилиндрическую форму, будет иметь форму, указанную на фиг. 7.

Поступила в редакцию
9 III 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

К. А. РАХМАТУЛИН. PROPAGATION OF UNLOADING WAVES ALONG A BAR WITH VARIABLE ELASTIC LIMITS (ACCUMULATION OF RESIDUAL DEFORMATION)

The paper deals with the problem of repeated longitudinal blows struck by a rigid body on the butt ends of a bar, in cases of plastic deformations. An important assumption in the work is that each succeeding blow on the bar is struck after the damping of the preceding deformation. Following the blow, the elastic limits of the particles of the bar change; hence, the problem is equivalent to the investigation of the propagation of the unloading waves along a bar with variable elastic limits.

The paper shows that:

1. The butt end of the semi-infinite bar reaches its maximal elastic limit only after an infinite number of blows (formula (3.8)). The radius of the butt end following an infinite number of blows remains finite and is determined approximately by formula (3.14).

2. The slope of the butt end to the x -axis after an infinite number of blows tends to the right angle (formula (3.32)). This angle depends mainly on the mass of the striking body and varies to an insignificant degree depending on the velocity of the blow (formula (2.11)).