Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РЕГУЛИРОВАНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Б. В. Булгаков

(Москва)

I. Укороченные уравнения ван дер Поля для систем со многими степенями свободы

Мы будем пользоваться укороченными уравнениями ван дер Поля в форме, несколько более общей, чем та, которая была нами дана ранее [1], и это обобщение составляет содержание настоящей вступительной главы. Читатель, интересующийся прежде всего приложениями, может непосредственно обратиться к следующей главе, пользуясь по мере надобности формулами настоящей.

§ 1. Приведение уравнений нелинейной колебательной системы к нормальной форме. Пусть некоторый колебательный процесс в системе с n степенями свободы определяется уравнениями

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(D)\,x_k = \psi_j(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (j=1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где символ

$$D = \frac{d}{dt} \tag{1.2}$$

есть дифференциальный оператор, а $x_1, \ldots, x_n$ обозначают неизвестные обобщенные координаты, зависящие от времени t; $f_{jk}(D)$ и $\psi_j(x_1, \ldots, x_n\, t)$ суть заданные функции своих аргументов, причем $f_{jk}(D)$ являются просто полиномами любых конечных степеней с постоянными коэффициентами. Пусть m_k есть самая старшая степень D в полиномах $f_{jk}(D)$ с данным фиксированным k; мы допустим, что функции ψ_j могут содержать производные от каждого x_k до $(k-1)$-го порядка включительно; они не указаны явно лишь во избежание усложнения обозначений. Пусть, далее, $\Delta(D)$ есть определитель матрицы $\| f_{jk}(D) \|$, а $F_{jk}(D)$ алгебраическое дополнение элемента $f_{jk}(D)$ в $\Delta(D)$. Предположим: (а) что определитель коэффициентов при старших производных $D^{m_k} x_k$, представляющий коэффициент старшего члена степени $M = \Sigma m_j$ в разложении $\Delta(D)$ отличен от нуля; (б) что все дроби $F_{kj}(D) / \Delta(D)$ с такими индексами j, k, для которых соответствующее m_j есть нуль, а ψ_k не равно тождественно нулю, являются правильными; (в) что среди действительных корней $\varkappa_g$ $(g = 1, \ldots, N')$ характеристического уравнения $\Delta(D) = 0$, а также и среди комплексных корней $\varepsilon_h \pm i\omega_h$ $(h = N'+1, \ldots, N'+N'')$ нет кратных, как это чаще всего бывает в приложениях.

Воспользуемся результатами нашей работы о нормальных координатах[1], которую будем кратко обозначать НК. При этом основные полученные там соотношения специализируем, делая кратности q_g, q_h всех корней равными единице; все индексы, изменяющиеся от 1 до q_g или q_h, будем систематически отбрасывать.

Первая группа основных соотношений — это преобразование НК (4.2), с помощью которого вводятся нормальные координаты. В данном случае таковыми будут амплитуды $\xi_1, \ldots, \xi_{N'}, a_{N'+1}, \ldots, a_{N'+N''}$ и угловые переменные $u_{N'+1}, \ldots, u_{N'+N''}$, а преобразование принимает вид

$$\overset{v}{x}_j = \sum_g X_{jv}^{(g)} \xi_g + \sum_h N_{jv}^{(h)} a_h \cos(u_h + \gamma_j^{(h)} + v\zeta_h) \qquad \begin{pmatrix} j=1,2,\ldots,n \\ v=0,1,\ldots,m_j' \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

При этом $\overset{v}{x}_j$ обозначает производную $D^v x_j$ и, в частности, само x_j при $v=0$; m_j' равно наибольшему из чисел 0 и $m_j - 1$. Действительные числа $X_{jv}^{(g)}$, $N_{jv}^{(h)}$, ζ_h согласно НК (2.27), НК (2.30) определяются вместе с действительными числами c_h из соотношений

$$X_{jv}^{(g)} = X_j^{(g)} \varkappa_g^v, \qquad N_{jv}^{(h)} = N_j^{(h)} c_h^v, \qquad c_h \exp i\zeta_h = \varepsilon_h + i\omega_h \tag{1.4}$$

Что касается действительных постоянных $X_j^{(g)}, N_j^{(h)}, \gamma_j^{(h)}$, то для их определения заметим, что в силу предположения (в) по меньшей мере одна из величин $F_{jk}(\varkappa_g)$ при данном g и одна из величин $F_{jk}(\varepsilon_h + i\omega_h)$ при данном h должны быть отличны от нуля; пусть

$$F_{l(g),\,m(g)}(\varkappa_g) \neq 0, \qquad F_{l(h),\,m(h)}(\varepsilon_h + i\omega_h) \neq 0 \tag{1.5}$$

Пользуясь известным соотношением

$$F_{l(g),m(g)}(\varkappa_g) F_{kj}(\varkappa_g) - F_{l(g),j}(\varkappa_g) F_{k,m(g)}(\varkappa_g) = 0$$

мы можем написать

$$F_{kj}(\varkappa_g) = X_j^{(g)} B_k^{(g)} \tag{1.6}$$

где

$$X_j^{(g)} = s_g \frac{F_{l(g),j}(\varkappa_g)}{F_{l(g),m(g)}(\varkappa_g)}, \qquad B_k^{(g)} = \frac{1}{s_g} F_{k,m(g)}(\varkappa_g) \tag{1.7}$$

а s_g есть какой-либо определенный коэффициент пропорциональности. Сравнивая НК (2.8) с (1.6), мы видим, что только что полученная величина $X_j^{(g)}$ есть та самая, которая входит в преобразование к нормальным координатам. Аналогичным образом

$$F_{kj}(\varepsilon_h + i\omega_h) = N_j^{(h)} \exp i\gamma_j^{(h)} B_k^{(h)} \tag{1.8}$$

$$N_j^{(h)} \exp i\gamma_j^{(h)} = s_h \frac{F_{l(h),j}(\varepsilon_h + i\omega_h)}{F_{l(h),m(h)}(\varepsilon_h + i\omega_h)}, \qquad B_k^{(h)} = \frac{1}{s_h} F_{k,m(h)}(\varepsilon_h + i\omega_h) \tag{1.9}$$

Вторая группа основных соотношений — это дифференциальные уравнения системы НК (4.3), преобразованные к нормальным координатам. Они принимают в данном случае вид

$$\frac{d\xi_g}{dt} = \varkappa_g \xi_g + \frac{1}{\Delta'(\varkappa_g)} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(g)} \psi_k(x_1, \ldots, x_n, t) \tag{1.10}$$

$$\frac{da_h}{dt} = \varepsilon_h a_h + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\exp(-iu_h)}{\Delta'(\varepsilon_h + i\omega_h)} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(h)} \psi_k(x_1, \ldots, x_n, t)\right] \tag{1.11}$$

$$\frac{du_h}{dt} = \omega_h + \frac{2}{a_h}\,\mathrm{Im}\left[\frac{\exp(-iu_h)}{\Delta'(\varepsilon_h + i\omega_h)} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(h)} \psi_k(x_1, \ldots, x_n, t)\right] \tag{1.12}$$

$$(g = 1, \ldots, N', \; h = N' + 1, \ldots, N' + N'')$$

Входящие сюда величины $B_k^{(g)}$, $B_k^{(h)}$ определяются из (1.7), (1.9). Переменные x_j и их производные в правых частях нужно представлять себе замененными их выражениями (1.3).

При $\psi_1 \equiv \ldots \equiv \psi_n \equiv 0$ соотношения (1.1) будут линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Уравнения (1.10), (1.11), (1.12) становятся независимыми друг от друга, что и показывает, что новые переменные ξ_g, a_h, u_h имеют характер нормальных координат. Интегрируя, получим

$$\xi_g = A_g \exp \varkappa_g t, \qquad a_h = A_h \exp \varepsilon_h t, \qquad u_h = \omega_h t + \theta_h \tag{1.13}$$

где A_g, A_h, θ_h суть произвольные постоянные. Подставляя найденные выражения в формулы (1.3), соответствующие $v = 0$, получим общее решение исходных уравнений для этого случая.

§ 2. Укороченные уравнения. Мы произвели пока лишь замену переменных, и (1.10), (1.11), (1.12) суть точные уравнения. Чтобы получить более простые приближенные уравнения, мы к условиям (а), (б), (в), принятым в § 1, добавим новые. А именно предположим: (г) что частоты ω_h линейно независимы, так что не существует никакого соотношения вида

$$\sum_h g_h \omega_h = 0$$

где g_h суть целые числа, не равные нулю одновременно; (д) что линейные члены $\varkappa_g \xi_g$, $\varepsilon_h a_h$ в уравнениях (1.10), (1.11) малы в сравнении с $\omega_h a_h$; (е) что нелинейные поправки $\psi_l(x_1, \ldots, x_n, t)$ также малы для рассматриваемых значений аргументов (псевдолинейные системы) и (ж) что при изменении t, если оно действительно входит явно в $\psi_j(x_1, \ldots, x_n, t)$, эти функции меняются медленно в сравнении с их изменением, происходящим от аргументов u_h. При этих условиях амплитуды ξ_g, a_h будут расти или убывать медленно в сравнении с самими колебаниями, и мы можем применить осреднение по угловым переменным

$$\frac{d\xi_g}{dt} = \varkappa_g \xi_g + \frac{1}{(2\pi)^{N''} \Delta'(\varkappa_g)} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(g)} \int_{-\pi}^{+\pi} \ldots \int_{-\pi}^{+\pi} \psi_k \, du_{N'+1} \ldots du_{N'+N''}$$

$$\frac{da_h}{dt} = \varepsilon_h a_h + \frac{1}{2^{N''-1}\pi^{N''}} \mathrm{Re} \frac{1}{\Delta'(\varepsilon_h + i\omega_h)} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(h)} \int_{-\pi}^{+\pi} \ldots \int_{-\pi}^{+\pi} \psi_k e^{-iu_h} \, du_{N'+1} \ldots du_{N'+N''}$$

$$\frac{du_h}{dt} = \omega_h + \frac{1}{2^{N''-1}\pi^{N''} a_h} \mathrm{Im} \frac{1}{\Delta'(\varepsilon_h + i\omega_h)} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(h)} \int_{-\pi}^{+\pi} \ldots \int_{-\pi}^{+\pi} \psi_k e^{-iu_h} \, du_{N'+1} \ldots du_{N'+N''}$$

$$(g = 1, \ldots, N', \; h = N' + 1, \ldots, N' + N''). \tag{2.1}$$

Это и суть «укороченные» уравнения. Первые две группы этих уравнений не содержат неизвестных u_h; главное преимущество заключается, однако, в том, что мы получили уравнения в медленно изменяющихся переменных. Угловые неизвестные u_h найдутся путем квадратур из уравнений третьей группы после определения ξ_g, a_h из уравнений первых двух групп.

Если функции ψ_j не зависят от t, то мы найдем, в частности, квазипериодические режимы, если потребуем, чтобы амплитуды ξ_g, a_h были постоянны. То же самое предположение нужно сделать и в отношении производных du_h / dt, и если представить их в виде $\omega_h(1+b_h)$, где b_h — постоянные, подлежащие определению, то мы получим вместо (2.1)

$$\begin{gathered}
\varkappa_g \xi_g + \frac{1}{(2\pi)^{N''}\Delta'(\varkappa_g)} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(g)} \int_{-\pi}^{+\pi} \dots \int_{-\pi}^{+\pi} \psi_k \, du_{N'+1} \dots du_{N'+N''} = 0 \\
\varepsilon_h a_h + \frac{1}{2^{N''-1}\pi^{N''}} \operatorname{Re} \frac{1}{\Delta'(\varepsilon_h + i\omega_h)} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(h)} \int_{-\pi}^{+\pi} \dots \int_{-\pi}^{+\pi} \psi_k e^{-iu_h} du_{N'+1} \dots du_{N'+N''} = 0 \\
-\omega_h b_h a_h + \frac{1}{2^{N''-1}\pi^{N''}} \operatorname{Im} \frac{1}{\Delta'(\varepsilon_h + i\omega_h)} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(h)} \int_{-\pi}^{+\pi} \dots \int_{-\pi}^{+\pi} \psi_k e^{-iu_h} du_{N'+1} \dots du_{N'+N''} = 0
\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$(g = 1, \dots, N' \text{ и } h = N'+1, \dots, N'+N'')$$

Из этих $N' + 2N''$ конечных, но вообще нелинейных уравнений можно определить $N' + N''$ стационарных амплитуд ξ, a_h и N'' поправок на частоты b_h.

II. Регулирование положения системы, обладающей естественной направляющей силой

§ 3. Уравнения движения. Рассмотрим колебания системы, определяемой уравнениями

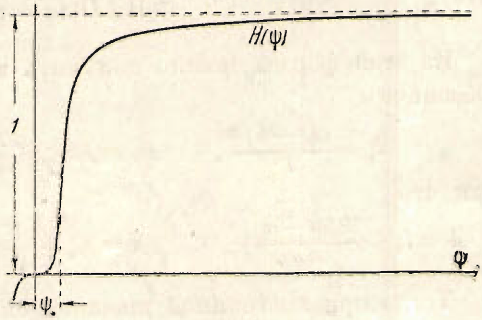
$$\begin{aligned}
T^2\ddot{\varphi} &= -U\dot{\varphi} - k\varphi - \mu + \chi && \text{(регулируемый объект)} \\
V^2\ddot{\mu} &= -W\dot{\mu} + H\left(l\varphi + X\dot{\varphi} + Y^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{m}\mu\right) && \text{(сервомотор)}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

причем φ есть отклонение от желаемого состояния, μ — координата органа управления, приводимого в действие сервомотором, χ — внешнее возмущение; φ, μ, χ предполагаются безразмерными. Заглавные буквы T, U, V, W, X, Y обозначают постоянные, имеющие размерность времени, а k, l, m — безразмерные коэффициенты; это — система обозначений М. Толле [3]. Обобщение по сравнению с нашей предыдущей работой [4], а также с работами А. Андронова и Н. Баутина [5] и А. Лурье и В. Постникова [6] состоит в том, что здесь учитывается естественная направляющая сила $-k\varphi$ и рассматривается четырехчленный аргумент управления

$$\psi = Y^2\ddot{\varphi} + X\dot{\varphi} + l\varphi - \frac{1}{m}\mu \tag{3.2}$$

вместо трехчленного; эффект силы инерции сервомотора $-V^2\ddot{\mu}$ и внешней силы χ рассмотрены лишь частично. Характеристика сервомотора — обычная, представлена на фиг. 1; параметры V^2, W выбираются так, чтобы максимум функции $H(\psi)$ был равен единице, а параметры Y^2, X, l, m — таким образом, чтобы аргумент ψ, пропорциональный открытию реле, принимал некоторое стандартное значение ψ_* (например, 0.1) в середине области быстрого возрастания $H(\psi)$.

Постоянные времени T^2, U, V^2, W и передаточное число обратной связи m предполагаются положительными; k положителен для естественно устойчивой системы, но он равен нулю для нейтральной и отрицателен для неустойчивой. Отрицательные значения постоянной искусственного демпфирования X и коэффициента l сами по себе не интересны, но нам нет нужды заранее исключать их из рассмотрения, так же как и отрицательные значения постоянной Y^2.



Фиг. 1.

Основная задача состоит в получении граничных линий, отделяющих области допустимых значений параметров, которые обеспечивают удовлетворительное течение процесса регулирования.

С помощью первого уравнения (3.1) исключаем μ из выражения (3.2) и из второго уравнения (3.1) и находим

$$
\begin{gathered}
(T^2 + mY^2)\ddot{\varphi} + (U + mX)\dot{\varphi} + (k + lm)\varphi - m\psi = \chi \\
T^2V^2 \overset{\mathrm{IV}}{\varphi} + (UV^2 + WT^2)\dddot{\varphi} + (V^2k + UW)\ddot{\varphi} + Wk\dot{\varphi} + H(\psi) = V^2\ddot{\chi} + W\dot{\chi}
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

В случае идеального управления без инерции ($V = 0$) и сопротивления ($W = 0$) второе уравнение дает $H(\psi) = 0$ и мы должны иметь все время $\psi = 0$, так как $H(\psi)$ не обращается в нуль при других аргументах. Первое уравнение принимает вид

$$
(T^2 + mY^2)\ddot{\varphi} + (U + mX)\dot{\varphi} + (k + lm)\varphi = \chi \tag{3.4}
$$

оно определяет линейные затухающие колебания, возмущаемые силой χ, причем $T^2 + mY^2$, $U + mX$, $k + lm$ измеряют полную инерцию, демпфирование и статическую устойчивость. Первые слагаемые в этих двучленах характеризуют соответствующие естественные свойства, а вторые представляют приращения, привносимые регулятором. Мы будем предполагать, что

$$
T^2 + mY^2 > 0, \qquad k + lm > 0 \tag{3.5}
$$

Для значений φ_s, ψ_s и μ_s, соответствующих положению равновесия при постоянной силе χ_s, мы имеем согласно первому уравнению (3.1) и уравнениям (3.3)

$$
k\varphi_s + \mu_s = \chi_s, \qquad (k + lm)\varphi_s - m\psi_s = \chi_s, \qquad H(\psi_s) = 0
$$

последнее из этих трех соотношений дает $\psi_s = 0$, а из первых двух получается

$$
\varphi_s = \frac{\chi_s}{k + lm}, \qquad \mu_s = \frac{lm\chi_s}{k + lm} \tag{3.6}
$$

В общем случае мы можем обозначить через χ_s некоторое постоянное среднее значение внешней силы (в частности нуль) и представить уравнения движения (3.3) в виде

$$[(T^2+mY^2)D^2+(U+mX)D+(k+lm)](\varphi-\varphi_s)-m\psi=\chi-\chi_s$$

$$[T^2V^2D^4+(UV^2+WT^2)D^3+(V^2k+UW)D^2+ \\ +WkD](\varphi-\varphi_s)+H(\psi)=(V^2D^2+WD)(\chi-\chi_s) \tag{3.7}$$

Из этой формы можно получить вывод, относящийся к роли сигнала $Y^2\ddot{\varphi}$. Обозначим

$$l_e=\frac{lT^2-kY^2}{T^2}, \qquad m_e=\frac{mT^2}{T^2+mY^2}, \qquad X_e=\frac{XT^2-UY^2}{T^2} \tag{3.8}$$

так что

$$l=l_e+\frac{k(m-m_e)}{mm_e}, \qquad X=X_e+\frac{U(m-m_e)}{mm_e}, \qquad Y^2=\frac{T^2(m-m_e)}{mm_e} \tag{3.9}$$

Тогда при постоянной внешней силе $\chi=\chi_s$ первое уравнение (3.7) может быть написано в виде

$$[T^2D^2+(U+m_eX_e)D+(k+l_em_e)](\varphi-\varphi_s)-m_e\psi=0$$

и то же самое получается из того же уравнения, если рассмотреть другую систему, у которой параметры l, m, X, Y имеют измененные значения l_e, m_e, X_e и 0. Так как и второе уравнение (3.7) будет одно и тоже для обеих систем, то динамика колебаний около положения равновесия будет та же самая. Мы видим, что в этом смысле регулирование по ускорению эквивалентно изменению параметров l, m, X в системе, не имеющей такого регулирования. Мы можем сделать даже $m\to\infty$ и все же получить любые желаемые значения l_e, m_e, X_e эквивалентных параметров, давая l, X, Y^2 конечные предельные значения

$$l=l_e+\frac{k}{m_e}, \qquad X=X_e+\frac{U}{m_e}, \qquad Y^2=\frac{T^2}{m_e} \tag{3.10}$$

получающиеся из (3.9). В этом случае регулирование по ускорению вполне заменяет отсутствующую материальную обратную связь, обеспечивая обычное «одерживание» слишком энергичного функционирования регулятора; с другой стороны, как показывает первая формула (3.6), статическое отклонение φ_s равно нулю при любом постоянном χ_s. Одновременное достижение обеих целей оказалось возможным только благодаря регулированию по ускорению.

Чтобы уменьшить число постоянных параметров в уравнениях, введем вместо неизвестных φ, ψ, заданной функции χ и независимой переменной t новые переменные, определяемые формулами

$$x=\frac{1}{p}(\varphi-\varphi_s) \qquad y=\psi, \qquad z=\frac{1}{q}(\chi-\chi_s) \qquad \tau=\frac{1}{r}t \tag{3.11}$$

в которых p, q, r суть постоянные. Обозначая

$$E=d\,/\,d\tau \tag{3.12}$$

мы приведем уравнения движения (3.7) к виду

$$[(T^2+mY^2)\frac{p}{r^2}E^2+(U+mX)\frac{p}{r}E+(k+lm)p]x-my=qz$$

$$\left[T^2V^2\frac{p}{r^4}E^4+(UV^2+WT^2)\frac{p}{r^3}E^3+(V^2k+UW)\frac{p}{r^2}E^2+\right.$$
$$\left.+Wk\frac{p}{r}E\right]x+H(y)=\left(V^2\frac{q}{r^2}E^2+W\frac{q}{r}E\right)z$$

Если же положить

$$p=\frac{m}{k+lm},\qquad r=\sqrt{\frac{T^2+mY^2}{k+lm}} \tag{3.13}$$

и ввести обозначения

$$\begin{gathered}M=\frac{U}{T^2}\sqrt{\frac{T^2+mY^2}{k+lm}},\qquad \alpha=\frac{k\,(T^2+mY^2)}{T^2\,(k+lm)},\qquad \beta=\frac{U+mX}{\sqrt{(k+lm)\,(T^2+mY^2)}}\\ \gamma=\frac{(T^2+mY^2)^{3/2}}{T^2Wm\,(k+lm)^{1/2}},\qquad \lambda=\frac{q}{m},\qquad \rho=\frac{V^2}{W}\sqrt{\frac{k+lm}{T^2+mY^2}},\qquad \sigma=\frac{qY^2}{T^2}\end{gathered} \tag{3.14}$$

то получится

$$\begin{gathered}(E^2+\beta E+1)\,x-y=\lambda z\\ [\rho E^4+(1+M\rho)\,E^3+(M+\alpha\rho)\,E^2+\alpha E]\,x+\gamma H(y)=(\lambda+\sigma)\,(\rho E^2+E)\,z\end{gathered} \tag{3.15}$$

Полагая $q=m$ или $q=T^2/Y^2$, можно обратить λ или σ в единицу. Сделанная нами замена переменных связана с тем новым условием, что при $l=0$ или $Y=0$ нельзя рассматривать предельный случай $m\to\infty$.

§ 4. Приближенная линеаризация. Сделаем первое ограничение постановки нашей задачи, предполагая внешнюю силу постоянной, $\chi=\chi_s$, откуда вытекает, что $z=0$.

Постараемся апроксимировать $H(y)$ в рассматриваемой области значений аргумента биномом $g+hy$, т. е. заменить часть характеристики надлежащим образом выбранной секущей. Это приближение должно быть приспособлено прежде всего для изучения периодических колебаний, поскольку их возможность и свойства являются определяющими для движения системы вообще; фактическое определение амплитуд и коэффициентов бинома будет сделано ниже. Рассматривая пока g, h как известные, напишем уравнения (3.15) в виде

$$\begin{gathered}(E^2+\beta E+1)\,(x-x^*)-(y-y^*)=\psi_1\\ [\rho E^4+(1+M\rho)\,E^3+(M+\alpha\rho)\,E^2+\alpha E]\,(x-x^*)+\gamma h\,(y-y^*)=\psi_2\end{gathered} \tag{4.1}$$

где

$$x^*=y^*=-\frac{g}{h} \tag{4.2}$$

$$\psi_1\equiv 0,\qquad \psi_2\equiv\gamma\,[g+hy-H(y)]=\gamma\,[h\,(y-y^*)-H(y)] \tag{4.3}$$

ψ_2 **есть** малая нелинейная поправка.

Вычеркивая ψ_1, ψ_2, мы получаем линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами относительно неизвестных $x-x^*$, $x-y^*$. Будем называть эти уравнения упрощенными; их операционный определитель есть

$$\Delta=\begin{vmatrix}E^2+\beta E+1, & -1\\ \rho E^4+(1+M\rho)\,E^3+(M+\alpha\rho)\,E^2+\alpha E, & \gamma h\end{vmatrix}=d_0E^4+d_1E^3+d_2E^2+d_3E+d_4 \tag{4.4}$$

причем

$$d_0=\rho,\quad d_1=1+M\rho,\quad d_2=\gamma h+M+\alpha\rho,\quad d_3=\beta\gamma h+\alpha,\quad d_4=\gamma h \tag{4.5}$$

Условия Рауса—Гурвитца для характеристического уравнения $\Delta=0$ могут быть написаны в виде

$$d_1=1+M\rho>0\,,\quad d_3=\beta\gamma h+\alpha>0\,,\quad d_1\,d_2\,d_3-d_0d_3^{\,2}-d_1^{\,2}d_4=e_0h^2+e_1h+e_2>0$$

$$d_4=\gamma h>0 \tag{4.6}$$

где

$$\begin{aligned} e_0&=\beta\gamma^2\,[1+(M-\beta)\,\rho] \\ e_1&=\gamma\,[\alpha+M\beta-1+(-\alpha\beta+M\alpha+M^2\beta-2M)\,\rho+M\,(\alpha\beta-M)\,\rho^2] \\ e_2&=M\alpha\,(1+M\rho+\alpha\rho^2) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Корни трехчлена $e_0h^2+e_1h+e_2$ суть

$$h_1,\ h_2=\frac{1}{2e_0}\,(-e_1\mp\gamma R) \tag{4.8}$$

причем

$$\begin{aligned} R^2=[\alpha+M\beta-1+(-\alpha\beta+M\alpha+M^2\beta-2M)\,\rho+M\,(\alpha\beta-M)\,\rho^2]^2\,- \\ -\,4M\alpha\beta\,[1+(M-\beta)\,\rho]\,(1+M\rho+\alpha\rho^2) \end{aligned} \tag{4.9}$$

а R есть положительное значение радикала $\sqrt{R^2}$.

Упрощенные уравнения допускают периодические решения в том случае, когда характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней. Для этого необходимо, чтобы предпоследнее неравенство Рауса—Гурвитца обращалось в равенство, т. е.

$$d_1d_2d_3-d_0d_3^{\,2}-d_1^{\,2}d_4=e_0h^2+e_1h+e_2=0 \tag{4.10}$$

и, следовательно, h имело одно из значений $h_i\,(i=1,\,2)$. При этом условии имеем, применяя его для исключения d_2 из выражения Δ:

$$\begin{aligned} d_1d_3\Delta=d_0d_1d_3E^4+d_1^{\,2}d_3E^3+(d_0d_3^{\,2}+d_1^{\,2}d_4)\,E^2+d_1d_3^{\,2}E+d_1d_3d_4= \\ =d_1E^2\,(d_0d_3E^2+d_1d_3E+d_1d_4)+d_3\,(d_0d_3E^2+d_1d_3E+d_1d_4) \end{aligned}$$

или же

$$d_3\Delta=(d_0d_3E^2+d_1d_3E+d_1d_4)\,(E^2+\omega^2) \tag{4.11}$$

где

$$\omega^2=\frac{d_3}{d_1}=\frac{\beta\gamma h_i+\alpha}{1+M\rho}=\frac{d_1d_4}{d_1d_2-d_0d_3} \tag{4.12}$$

Если полученное выражение для ω^2 действительно и положительно, то ω действительно и представляет угловую частоту периодического движения по отношению к безразмерному «времени» τ. В следующем разделе мы выясним, при каких условиях значения h_i пригодны для построения удовлетворительного линейного приближения для функции $H(y)$; в этом случае периодическое решение упрощенных уравнений будет приближенно представлять такое же решение точных нелинейных уравнений.

Рассмотрим предельный случай самотормозящегося сервомотора, когда его инерцией можно пренебречь ($V=0$, $\rho=0$). Тогда

$$d_0=0\,,\qquad d_1=1\,,\qquad d_2=\gamma h+M\,,\qquad d_3=\beta\gamma h+\alpha\,,\qquad d_4=\gamma h \tag{4.13}$$

$$e_0=\beta\gamma^2\qquad e_1=\gamma\,(\alpha+M\beta-1),\qquad e_2=M\alpha \tag{4.14}$$

$$h_1,\ h_2 = \frac{1}{2\rho\gamma}(-\alpha - M\beta + 1 \mp R) \tag{4.15}$$

$$R^2 = (\alpha-1)^2 - 2(\alpha+1)M\beta + (M\beta)^2 \tag{4.16}$$

$$\omega^2 = \beta\gamma h_i + \alpha = \frac{d_4}{d_2} = \frac{1}{2}(\alpha - M\beta + 1 \mp R) \tag{4.17}$$

при этом $d_4 / d_2 = \gamma h_i / (\gamma h_i + M)$ заведомо действительно и положительно при действительном положительном h_i. Первый квадратичный множитель в правой части (4.11) обращается в линейный двучлен $d_3 E + d_4$, и характеристическое уравнение имеет три корня $-\varkappa$, $\pm i\omega$, где в силу (4.10)

$$\varkappa = \frac{d_4}{d_3} = \frac{d_2}{d_1} = \gamma h_i + M = \frac{1}{2\beta}(-\alpha + M\beta + 1 \mp R) \tag{4.18}$$

Для выяснения механического смысла формулы (4.17) сделаем постоянную естественного демпфирования регулируемого объекта U, а следовательно, и M, равными нулю. Тогда для ω получаются значения 1 и $\sqrt{\alpha}$, причем второе действительно лишь при $\alpha > 0$. Для получения угловых частот по отношению к натуральному времени t нужно согласно (3.11) делить на r. Пользуясь (3.13) и (3.14), получаем частоты

$$\sqrt{\frac{k+lm}{T^2+mY^2}},\qquad \sqrt{\frac{k}{T^2}} \tag{4.19}$$

Первая из них есть частота внешнего колебательного цикла, образуемого регулируемым объектом и регулятором и характеризуемого полной инерцией $T^2 + mY^2$ и полным коэффициентом восстанавливающей силы $k + lm$ [ср. уравнение (3.4)]; вторая частота соответствует естественно устойчивой системе с выключенным регулятором. Затухание при этом не учитывается.

Другой предельный случай получается, если сделать равной нулю силу сопротивления сервомотора ($W = 0$; $\rho = \infty$, $\gamma = \infty$). Отношение ρ / γ при этом остается конечным. Из формул (4.7), (4.8) видно, что один из корней h_i обращается в нуль, а другой получает предельное значение

$$\frac{\rho}{\gamma}\,\frac{M(\alpha\beta - M)}{\beta(\beta - M)}$$

Имея в виду только это последнее, мы должны при вычислении ω^2 с помощью второго выражения (4.12) пренебречь в числителе величиной α по сравнению с $\beta\gamma h$, а в знаменателе — единицей по сравнению с $M\rho$. После деления на r получаем с помощью (3.13), (3.14) частоту периодических колебаний

$$\sqrt{\frac{\beta\gamma h}{M\rho}}\,\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{h}{mV^2}}\sqrt{1+\frac{mX}{U}} \tag{4.20}$$

Первый множитель справа представляет частоту внутреннего колебательного цикла, образованного сервомотором и реле, отключенными от регулируемого объекта. Соответствующее уравнение движения есть

$$V^2\ddot{\mu} = H\left(-\frac{1}{m}\mu\right)$$

аппроксимируя, как и выше, характеристику H линейным выражением, мы и получим линейную систему с угловой частотой $(h / mV^2)^{1/2}$.

§ 5. Установившиеся колебания и уравнения переходных процессов в их окрестности. Мы сделаем теперь для упрощения второе ограничение условий задачи, имея в виду во всем дальнейшем случай безинерционного сервомотора ($V=0$, $\rho=0$). Операционный определитель принимает вид

$$\Delta=\begin{vmatrix} E^2+\beta E+1, & -1 \\ E^3+ME^2+\alpha E, & \gamma h \end{vmatrix}=E^3+d_2E^2+d_3E+d_4 \tag{5.1}$$

причем мы имеем относящиеся к этому случаю формулы (4.13)—(4.18).

Применим с указанным ограничением общее преобразование к нормальным координатам и укороченные уравнения к псевдолинейной системе (4.1), беря для h одно из значений h_i и полагая

$$x_1=x-x^*, \qquad x_2=y-y^* \tag{5.2}$$

$$N'=N''=1, \qquad \varkappa_1=-\varkappa, \qquad \varepsilon_2=0, \qquad \omega_2=c_2=\omega, \qquad \zeta_2=\pi/2 \tag{5.3}$$

Если принять

$$s_1=s_2=1, \qquad l(1)=l(2)=1, \qquad m(1)=m(2)=2 \tag{5.4}$$

то из (1.6), (1.7) получается

$$X_1^{(1)}=\frac{1}{B_2^{(1)}}=\frac{1}{Q}, \qquad X_2^{(1)}=1 \tag{5.5}$$

где согласно (4.17), (4.18)

$$Q=\varkappa^2-\beta\varkappa+1=\varkappa^2+\omega^2\pm R \tag{5.6}$$

аналогичным образом

$$N_1^{(2)}\exp i\gamma_1^{(2)}=\frac{1}{B_2^{(2)}}=\frac{1}{-\omega^2+1+i\beta\omega}, \qquad N_2^{(2)}\exp i\gamma_2^{(2)}=1 \tag{5.7}$$

Так как условия (а), (б), (в) из § 1 выполняются, то полагая

$$\xi_1=a, \qquad a_2=b, \qquad u_2=u=\omega\tau+\theta \tag{5.8}$$

имеем согласно (1.3), (1.4) преобразование

$$\begin{aligned} &x=x^*+X_1^{(1)}a+N_1^{(2)}b\cos(u+\gamma_1^{(2)}), && \dot x=-X_1^{(1)}\varkappa a-N_1^{(2)}\omega b\sin(u+\gamma_1^{(2)}) \\ &\ddot x=X_1^{(1)}\varkappa^2a-N_1^{(2)}\omega^2b\cos(u+\gamma_1^{(2)}), && y=y^*+a+b\cos u \end{aligned} \tag{5.9}$$

к новым неизвестным a, b, u. Далее заметим, что

$$\Delta(E)=(E+\varkappa)(E-i\omega)(E+i\omega), \quad \Delta'(\varkappa)=\varkappa^2+\omega^2, \quad \Delta'(i\omega)=2\omega(-\omega+i\varkappa)$$

$$\frac{B^{(2)}{}_2}{\Delta'(i\omega)}=\frac{(-\omega^2+1+i\beta\omega)(-\omega-i\varkappa)}{2\omega(\varkappa^2+\omega^2)} \tag{5.10}$$

и вспомним, что $\psi_1=0$; тогда уравнения (1.10), (1.11), (1.12) для данной задачи примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{da}{d\tau}=-\varkappa a+\frac{Q}{\varkappa^2+\omega^2}\psi_2(y^*+a+b\cos u), \\ &\frac{db}{d\tau}=\operatorname{Re}\left\{\frac{\omega(\omega^2-1+\beta\varkappa)+i[\varkappa(\omega^2-1)-\beta\omega^2]}{\omega(\varkappa^2+\omega^2)}e^{-iu}\psi_2(y^*+a+b\cos u)\right\} \\ &\frac{du}{d\tau}=\omega+\frac{1}{b}\operatorname{Im}\left\{\frac{\omega(\omega^2-1+\beta\varkappa)+i[\varkappa(\omega^2-1)-\beta\omega^2]}{\omega(\varkappa^2+\omega^2)}e^{-iu}\psi_2(y^*+a+b\cos u)\right\} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Чтобы получить укороченные уравнения, находим с помощью формулы (4.3)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\psi_2(y^*+a+b\cos u)\,du=\gamma\left[h_i a-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H(y^*+a+b\cos u)\,du\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\psi_2(y^*+a+b\cos u)\cos u\,du=\gamma\left[h_i b-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H(y^*+a+b\cos u)\cos u\,du\right]$$

а также, полагая $\psi_2(y)=\Psi'(y)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\psi_2(y^*+a+b\cos u)\sin u\,du=$$

$$=-\frac{1}{\pi b}\int_{-\pi}^{+\pi}\Psi'(y^*+a+b\cos u)\,d(y^*+a+b\cos u)=-\frac{1}{\pi b}\Big[\Psi(y^*+a+b\cos u)\Big]_{-\pi}^{+\pi}=0$$

Пользуясь этим, замечая, что согласно (5.6)

$$\omega^2-1+\beta\varkappa=\mp R$$

и заменяя правые части уравнений (5.11) их средними значениями, получаем

$$\frac{da}{d\tau}=A(a,\,b),\qquad\qquad \frac{db}{d\tau}=B(a,\,b) \tag{5.12}$$

$$\frac{du}{d\tau}=\omega+\frac{\varkappa(\omega^2-1)-\beta\omega^2}{2b\omega(\varkappa^2+\omega^2)}\,\gamma\left[h_i b-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H(y^*+a+b\cos u)\cos u\,du\right] \tag{5.13}$$

где

$$\begin{aligned} A(a,\,b)&=-\varkappa a+\frac{Q\gamma}{\varkappa^2+\omega^2}\left[h_i a-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H(y^*+a+b\cos u)\,du\right]\\ B(a,\,b)&=\frac{\mp R\gamma}{2(\varkappa^2+\omega^2)}\left[h_i b-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H(y^*+a+b\cos u)\cos u\,du\right]\end{aligned} \tag{5.14}$$

В качестве первого приложения мы воспользуемся этими уравнениями для определения состояний установившихся колебаний, соответствующих решениям $a=a^*$, $b=b^*$, где a^*, b^* — постоянные. Для этих значений мы должны иметь $A(a^*,\,b^*)=B(a^*,\,b^*)=0$. Кроме того, чтобы обеспечить наилучшую местную аппроксимацию для искомых состояний и в их окрестности, потребуем, чтобы все средние значения в (5.14), происходящие от тех членов точных уравнений, которые содержали ψ_2, исчезали при $a=a^*$, $b=b^*$

$$h_i a^*-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H(y^*+a^*+b^*\cos u)\,du=0$$

$$h_i b^*-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H(y^*+a^*+b^*\cos u)\cos u\,du=0.$$

Отсюда следует, что $\varkappa a^* = 0$; из (4.16), (4.18) вытекает, что $\varkappa$ не может обращаться в нуль при конечном β и $M > 0$. Поэтому должно быть $a^* = 0$ и

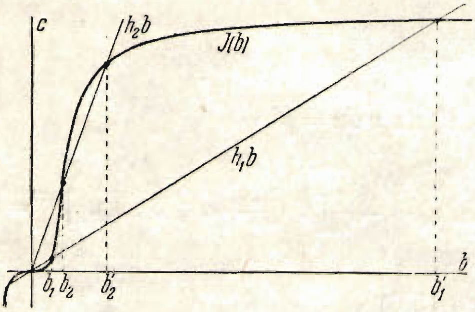
$$\int_{-\pi}^{+\pi} H(y^* + b^* \cos u)\, du = 0, \quad h_i b^* - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H(y^* + b^* \cos u) \cos u\, du = 0$$

Так как $H(y)$ есть нечетная возрастающая функция, то первое соотношение возможно лишь при $y^* = 0$, хотя в случае несимметричной характеристики дело обстояло бы иначе. Второе соотношение может быть написано в виде

$$J(b_*) = h_i b^* \tag{5.15}$$

где

$$J(b) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H(b \cos u) \cos u\, du \tag{5.16}$$



Фиг. 2.

Из конечного уравнения (5.15) определяются стационарные амплитуды b^*. Значениям $a = a^* = 0$, $b = b^*$ соответствует согласно (5.13) постоянное значение ω производной $du / d\tau$. Соотношения (5.9) показывают, что в переменных x, y при этом получается периодическое решение. Оно определяет установившиеся незатухающие колебания; если они устойчивы, то это будут автоколебания.

Мы могли бы получить периодические решения также по методу А. Пуанкаре, пользуясь теми же упрощенными уравнениями, что и выше, и полагая в них $g = x^* = y^* = 0$, $h = h_i$ (ср. [1], стр. 402 и [7]); «порождающие» амплитуды совпали бы с b^*, а первая поправка на частоту была бы равна нулю. Сравнение с точными решениями для простейшей ломаной характеристики дано ниже в § 8.

§ 6. Граничные линии. Уравнение (5.15) можно разрешить графически (фиг. 2), определяя стационарные амплитуды как абсциссы точек пересечения кривой $c = J(b)$ и секущей $c = h_i b$. Эти точки могут быть отличны от начала координат только при $0 < h_i < h_*$, где h_* есть угловой коэффициент проведенной через начало касательной к кривой $c = J(b)$. Таким образом существование и поведение периодических решений зависят от характера корней h_i трехчлена $e_0 h^2 + e_1 h + e_2$. Чтобы изучить их зависимость от параметров системы, будем интерпретировать величины

$$\xi = \alpha = \frac{k(T^2 + mY^2)}{T^2(k + lm)}, \qquad \eta = M\beta = \frac{U(U + mX)}{T^2(k + lm)} \tag{6.1}$$

как координаты точки на диаграмме (фиг. 3). Параметры γ, M считаются при этом фиксированными.

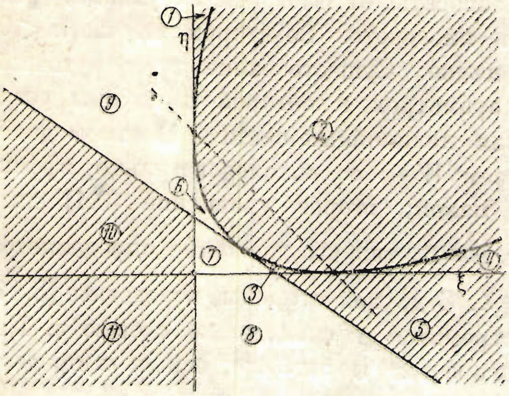
Вследствие (4.16) уравнение $R^2 = 0$ представляет коническое сечение; переписывая его в форме

$$(-\xi + \eta)^2 - 2\left(\xi + \eta - \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{6.2}$$

видим, что это — парабола, ось которой $-\xi+\eta=0$ является биссектрисой угла между координатными осями. Кривая касается этих осей в точках (1,0) и (0,1); при переходе через оси меняются знаки коэффициентов $e_0=(\gamma^2/M)\eta$ или $e_2=M\xi$. Коэффициент e_1 меняет знак на прямой

$$e_1/\gamma=\xi+\eta-1=0 \qquad (6.3)$$

проходящей через точки прикосновения (1,0) и (0,1).



Фиг. 3.

Найдем еще геометрическое место точек, в которых один из корней h_i принимает значение h_*, так что $e_0h_*^2+e_1h_*+e_2=0$ или согласно (4.14)

$$(\gamma h_* + M)(M\xi+\gamma h_*\eta)=M\gamma h_* \qquad (6.4)$$

Это уравнение представляет прямую, касающуюся параболы в точке с координатами:

$$\xi=\left(\frac{\gamma h_*}{\gamma h_*+M}\right)^2, \qquad \eta=\left(\frac{M}{\gamma h_*+M}\right)^2 \qquad (6.5)$$

При $\gamma h_*=0, \infty$ эта касательная совмещается соответственно с осями η и ξ, а точка касания совпадает соответственно с точками (0,1) и (1,0). В соответствии с этим на оси ξ один из корней h обращается в бесконечность, а на оси η — в нуль.

Парабола, две координатные оси и касательная (6.4) разделяют плоскость $\xi\eta$ на одиннадцать областей, которые показаны на фиг. 3. Приводим знаки величин e_0, e_2, e_2, R^2 и характер корней h_i в этих областях:

1.	$e_0>0,$	$e_1>0,$	$e_2>0,$	$R^2>0$	$h_1<0,$	$h_2<0$	сходящиеся колебания
2.	$e_0>0,$		$e_2>0,$	$R^2<0$	h_1, h_2 комплексные		
3.	$e_0>0,$	$e_1<0,$	$e_2>0,$	$R^2>0$	$h_*<h_1,$	$h_*<h_2$	
4.	$e_0>0,$	$e_1>0,$	$e_2>0,$	$R^2>0$	$h_1<0,$	$h_2<0$	
5.	$e_0<0,$		$e_2>0,$	$R^2>0$	$h_*<h_1,$	$h_2<0$	
6.	$e_0>0,$	$e_1<0,$	$e_2>0,$	$R^2>0$	$0<h_1<h_*,$	$0<h_2<h_*$	установившиеся колебания
7.	$e_0>0,$	$e_1<0,$	$e_2>0,$	$R^2>0$	$0<h_1<h_*,$	$h_*<h_2$	
8.	$e_0<0,$		$e_2>0,$	$R^2>0$	$0<h_1<h_*,$	$h_2<0$	
9.	$e_0>0,$		$e_2<0,$	$R^2>0$	$h_1<0,$	$0<h_2<h_*$	
10.	$e_0>0,$		$e_2<0,$	$R^2>0$	$h_1<0,$	$h_*<h_2$	расход. колеб.
11.	$e_0<0,$	$e_1<0,$	$e_2<0,$	$R^2>0$	$h_1<0,$	$h_2<0$	

Мы видим, что установившиеся незатухающие колебания возможны лишь в областях 6, 7, 8, 9; их свойства существенно связаны с их устойчивостью, которая исследуется в § 7. В частях плоскости, образованных группами областей 1, 2, 3, 4, 5 и 10, 11 (на чертеже заштрихованы), периодические колебания невозможны. В первом случае $\alpha>0$ и, следовательно, $k>0$, так что система статически устойчива; поскольку никакие установившиеся состояния, кроме равновесия, невозможны, колебания затухают при всех начальных отклонениях; регулирование может считаться вообще удовлетворительным, хотя его качество будет зависеть от быстроты затухания, различной в разных точках данной части плоскости. Во втором случае $k<0$, колебания расходятся и регулятор негоден. Существование промежуточной (незаштрихованной) части плоскости параметров, в которой возможны установившиеся колебания, характерно для нелинейных систем. В самом деле, сохраняя предположение $V=0$, сделаем $W\to\infty$ и, следовательно, эффективность регулирования бесконечно малой; второе уравнение (3.1) дает в пределе $\dot{\mu}=0$, и мы можем принять $\mu=0$, так что движение определяется линейным уравнением $T^2\ddot{\varphi}+U\dot{\varphi}+k\varphi=\chi$. С другой стороны, вследствие (3.14) имеем $\gamma\to 0$, и касательная (6.4) стремится к совпадению с осью η. Незаштрихованная часть плоскости стягивается к этой же оси и в пределе заштрихованные области покрывают всю плоскость.

В приложениях необходимо возвращаться к естественным параметрам. Мы можем, например, зафиксировать T, U, V, X, Y, k, l и давать передаточному числу m непрерывный ряд положительных значений. Точка (ξ, η) при этом опишет отрезок прямой, определяемой уравнением

$$T^2U(lU-kX)\xi+kT^2(kY^2-lT^2)\eta+kU(T^2X-UY^2)=0 \qquad (6.6)$$

которое получается путем исключения m из (6.1). Мы должны проследить за перемещением точки по отношению к областям плоскости, принимая во внимание, что положение касательной (6.4) также меняется вместе с m.

§ 7. Устойчивость установившихся колебаний. Для того чтобы решить вопрос об устойчивости установившихся колебаний, исследуем возмущенное движение $a=a^*+\delta a$, $b=b^*+\delta b$.

Укороченные уравнения (5.12) дают готовый аппарат для этого. Так как достаточно рассмотреть лишь малые возмущения δa, δb, то воспользуемся уравнениями в вариациях

$$\frac{d(\delta a)}{d\tau}=\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^*\delta a+\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)^*\delta b, \qquad \frac{d(\delta b)}{d\tau}=\left(\frac{\partial B}{\partial a}\right)^*\delta a+\left(\frac{\partial B}{\partial b}\right)^*\delta b \qquad (7.1)$$

которые получаются, как обычно, путем разложения в ряды Тейлора и отбрасывания членов высших порядков. Символ $(\ )^*$ указывает на подстановку значений $a=a^*=0$, $b=b^*$, а именно

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^*=-\varkappa+\frac{Q\gamma}{\varkappa^2+\omega^2}\left[h_i-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}H'(b^*\cos u)\,du\right]\\
&\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)^*=-\frac{Q\gamma}{\varkappa^2+\omega^2}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}H'(b^*\cos u)\cos u\,du\\
&\left(\frac{\partial B}{\partial a}\right)^*=\frac{\pm R\gamma}{\varkappa^2+\omega^2}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}H'(b^*\cos u)\cos u\,du\\
&\left(\frac{\partial B}{\partial b}\right)^*=\frac{\mp R\gamma}{2(\varkappa^2+\omega^2)}\left[h_i-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}H'(b^*\cos u)\cos^2 u\,du\right]
\end{aligned} \qquad (7.2)$$

Дифференцируя (5.16) по b, интегрируя по частям и принимая во внимание (5.15), находим

$$J'(b) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H'(b\cos u)\cos^2 u\, du$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H'(b^*\cos u)\, du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H'(b^*\cos u)(\cos^2 u + \sin^2 u)\, du =$$

$$= J'(b^*) - \frac{1}{\pi b^*}\Big[H(b^*\cos u)\sin u\Big]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{\pi b^*}\int_{-\pi}^{+\pi} H(b^*\cos u)\cos u\, du = J'(b^*) + h_i$$

так что

$$\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^* = -\varkappa + \frac{Q\gamma}{2(\varkappa^2+\omega^2)}[h_i - J'(b^*)], \quad \left(\frac{\partial B}{\partial b}\right)^* = \frac{\mp R\gamma}{2(\varkappa^2+\omega^2)}[h_i - J'(b^*)] \qquad (7.3)$$

С другой стороны, так как $H(y)$ есть нечетная функция, то $H'(y)$ будет четной, и интеграл, входящий во второе и третье выражения (7.2), исчезает:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)^* = \left(\frac{\partial B}{\partial a}\right)^* = 0 \qquad (7.4)$$

Корнями характеристического уравнения системы в вариациях будут поэтому действительные числа $(\partial A/\partial a)^*$, $(\partial B/\partial b)^*$, и если оба они отрицательны, то состояние установившихся колебаний устойчиво.

Принимая во внимание (4.18), (5.6), видим, что сумма

$$\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^* + \left(\frac{\partial B}{\partial b}\right)^* = -\varkappa + \frac{(Q\mp R)\gamma}{2(\varkappa^2+\omega^2)}[h_i - J'(b^*)] = -(\gamma h_i + M) +$$

$$+\frac{\gamma}{2}[h_i - J'(b^*)] = -M - \frac{\gamma}{2}[h_i + J'(b^*)] \qquad (7.5)$$

всегда отрицательна, так как для установившихся состояний $h_i > 0$; $J'(b^*) \geqq 0$. Поэтому условием устойчивости будет неравенство

$$\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^*\left(\frac{\partial B}{\partial b}\right)^* = \frac{\pm R\gamma}{4(\varkappa^2+\omega^2)^2}[h_i - J'(b^*)][S + Q\gamma J'(b^*)] > 0 \qquad (7.6)$$

где вследствие (4.18), (5.6)

$$S = 2\varkappa(\varkappa^2+\omega^2) - Q\gamma h_i = (2\gamma h_i + 2M)(\varkappa^2+\omega^2) - \gamma h_i(\varkappa^2+\omega^2 \pm R) =$$

$$= (\varkappa^2+\omega^2)(\gamma h_i + 2M) \mp \gamma h_i R$$

Если условие (7.6) выполняется, то по классификации А. Пуанкаре [8] особая точка (a^*, b^*) уравнений (5.12) есть устойчивый узел; в противном случае она будет седлом, но никогда не может быть фокусом.

Пользуясь формулами (4.15), (4.16), (4.17), (4.18), можем выразить S через M, α, β. В результате вычислений находим

$$2\beta^3 S = M(-\alpha + 2M^2 - 2)\beta^3 + [\alpha^2 - (5M^2+3)\alpha + 2]\beta^2 + M(\alpha-1)(4\alpha-1)\beta +$$

$$+(-\alpha+1)^3 \mp [(-\alpha+2M^2+2)\beta^2 + M(-3\alpha+2)\beta + (\alpha-1)^2]R \qquad (7.7)$$

С помощью полученных формул вопрос об устойчивости всегда может быть решен для данных численных значений; при общем рассмотрении ограничимся простейшем случаем малых положительных и отрицательных α. Определив знаки нужных нам величиин при $\alpha = 0$, будем затем пользоваться тем, что в силу непрерывности знаки должны оставаться теми же самыми и в некоторой окрестности этого значения.

Начнем со следующего случая.

I. Значение $|\alpha|$ мало, $M\beta > 1$ (граница областей *1* и *9* и ее окрестность, фиг. 3).

Применяя систематически индексы 1, 2 для значений, соответствующих корням h_1 (верхний знак перед R) и h_2 (нижний знак), имеем при $\alpha = 0$

$$R = M\beta - 1, \qquad h_1 = -\frac{M\beta - 1}{\beta\gamma} < 0, \qquad h_2 = 0$$

Поэтому на оси η не существует периодических решений, так же как и в области *1*, где h_2 становится отрицательным.

Но в области *9* этот корень удовлетворяет неравенству $0 < h_2 < h_*$ и из фиг. 2 видно, что здесь мы имеем два периодических решения с амплитудами $b^* = b_2$, b_2', для которых соответственно $J'(b_2) > h_2$, $J'(b_2') < h_2$ (чертеж относится собственно к следующему случаю II, а здесь мы должны брать только верхнюю секущую $c = h_2 b$). Полагая опять $\alpha = 0$, находим

$$\varkappa_2 = \gamma h_2 + M = M, \qquad Q_2 = M^2 - \beta M + 1, \qquad S_2 = 2M^3 > 0$$

Если $1 < M\beta < 1 + M^2$, то $Q_2 > 0$, $S_2 + Q_2\gamma J'(b_2) > 0$, $S_2 + Q_2\gamma J'(b_2') > 0$ и эти неравенства остаются в силе в части области *9*, примыкающей к оси η. Условие (7.6), в котором мы должны взять нижний знак, удовлетворяется для b_2, но не для b_2'. Первая амплитуда устойчива, вторая неустойчива. Мы имеем, таким образом, *автоколебания малой амплитуды*; существование неустойчивого режима с бóльшей амплитудой указывает, как всегда, на то, что при соответствующих отклонениях регулятор не справляется со своей задачей.

Если $1 + M^2 < M\beta$, то Q_2 становится отрицательным при $\alpha = 0$. С другой стороны, пока α отрицательно, но достаточно мало по абсолютному значению, корень h_2 и обе величины $J'(b_2)$, $J'(b_2')$ также малы. Поэтому первые положительные слагаемые в $S_2 + Q_2\gamma J'(b_2)$ и $S_2 + Q_2\gamma J'(b_2')$ оказываются преобладающими и предыдущие выводы в отношении устойчивости остаются в силе. Однако дальше от оси η амплитуды b_2, b_2' могут быть обе неустойчивы.

Предполагая теперь, что $M\beta < 1$, полагаем $\alpha = 0$, находим

$$R = 1 - M\beta, \qquad h_1 = 0, \qquad h_2 = \frac{1 - M\beta}{\beta\gamma}$$

$$\varkappa_1 = \gamma h_1 + M = M, \qquad Q_1 = M^2 - M\beta + 1, \qquad S_1 = 2M^3.$$

$$\varkappa_2 = \gamma h_2 + M = \frac{1}{\beta}, \qquad Q_2 = \frac{1}{\beta^2}, \qquad \beta^3 S_2 = 2\beta^2(1 - M\beta) + 1 + M\beta$$

и рассматриваем отдельно следующие случаи.

II. Значение $|\alpha|$ мало, $M/(M+\gamma h_*) < M\beta < 1$ (граница областей *9* и *6* и ее окрестность).

При $\alpha = 0$ получаем

$$h_1 = 0, \quad Q_1 > 0, \quad S_1 > 0, \quad 0 < h_2 < h_*, \quad Q_2 > 0, \quad S_2 > 0$$

и, следовательно, на оси η имеем стационарные амплитуды b_2, b_2', соответствующие h_2. Так же, как и выше, b_2 устойчива, b_2' неустойчива и система получает *автоколебания малой амплитуды*. То же самое имеет место в прилежащей части области *9*, где h_1 становится отрицательным.

Но по другую сторону оси η, в области *6*, корень h_1 также удовлетворяет неравенству $0 < h_1 < h_*$. Следовательно, кроме такой же пары b_2, b_2', как и выше, имеем другую пару стационарных амплитуд b_1, b_1' (фиг. 2). Для этих последних берем верхний знак в (7.6) и заключаем, что b_1 неустойчива, а b_1' устойчива. Таким образом в части области *6*, прилежащей к оси η, имеем *два возможных состояния автоколебаний*. Которое из них будет устанавливаться в действительности, зависит от начальных условий.

III. Значение $|\alpha|$ мало, $M\beta < M/(M+\gamma h_*)$ (граница областей *10*, *11* и *7*, *8* и ее окрестность).

При $\alpha = 0$ имеем

$$h_1 = 0, \quad Q_1 > 0, \quad S_1 > 0$$

$$h_* < h_2 \quad \text{при} \quad 0 < M\beta < \frac{M}{M+\gamma h_*}, \qquad h_2 < 0 \quad \text{при} \quad M\beta < 0$$

Периодических решений не существует ни на оси η, ни в областях *10*, *11*, где h_1 становится отрицательным.

Две стационарные амплитуды b_1, b_1' в областях *7*, *8*, где $0 < h_1 < h_*$. При малых положительных α амплитуда b_1 неустойчива, b_1' устойчива. Итак, в частях областей *7*, *8*, прилегающих к оси η, имеем *автоколебания большой амплитуды*. Процесс регулирования мало отличается от неустойчивого.

В заключение отметим, что чрезвычайно поучительно проследить за изменением рассмотренных величин и свойств при переходе из одной области в другую.

§ 8. Точные периодические решения. Если представить характеристику сервомотора ломаной линией, то можно найти точные симметричные периодические решения и сравнить результаты с теми, которые получены выше приближенным путем. Примем простейшую идеализацию

$$H(y) = \operatorname{sign} y \tag{8.1}$$

пригодную для хорошего сервомотора без заметной зоны застоя.

Если $\chi = \chi_s$, $z = 0$ и $\rho = 0$, то уравнения (3.15) принимают вид

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + x - y = 0 \tag{8.2}$$

$$\dddot{x} + M\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \gamma = 0 \quad \text{при} \quad y > 0, \qquad \dddot{x} + M\ddot{x} + \alpha\dot{x} - \gamma = 0 \quad \text{при} \quad y < 0 \quad (8.3)$$

точками обозначено дифференцирование по τ. Последнее уравнение может быть также представлено в форме

$$\ddot{x} + M\dot{x} + \alpha x \pm \gamma\tau + A = 0 \tag{8.4}$$

где A — постоянная. Из (8.2), (8.4) находим

$$A=(1-\alpha)\,x(0)+(\beta-M)\,\dot{x}(0)-y(0) \tag{8.5}$$

и, предполагая $\alpha<M^2/4$,

$$x=\exp\frac{-M\tau}{2}\,(P\,\mathrm{ch}\,c\tau+Q\,\mathrm{sh}\,c\tau)+R\tau+S \tag{8.6}$$

$$\dot{x}=\exp\frac{-M\tau}{2}\Big[P\Big(-\frac{M}{2}\,\mathrm{ch}\,c\tau+c\,\mathrm{sh}\,c\tau\Big)+Q\Big(c\,\mathrm{ch}\,c\tau-\frac{M}{2}\mathrm{sh}\,c\tau\Big)\Big]+R \tag{8.7}$$

$$y=\exp\frac{-M\tau}{2}\Big\{P\Big[\Big(1-\alpha-M\,\frac{\beta-M}{2}\Big)\,\mathrm{ch}\,c\tau+c\,(\beta-M)\,\mathrm{sh}\,c\tau\Big]+ \tag{8.8}$$

$$+Q\Big[c\,(\beta-M)\,\mathrm{ch}\,c\tau+\Big(1-\alpha-M\,\frac{\beta-M}{2}\Big)\,\mathrm{sh}\,c\tau\Big]\Big\}+R\,(\tau+\beta)+S$$

при этом

$$c=\sqrt{\frac{M^2}{4}-\alpha},\qquad R=\mp\frac{\gamma}{\alpha} \tag{8.9}$$

а P, Q, S суть постоянные интеграции. Постараемся определить их, а также некоторое положительное значение σ аргумента τ так, чтобы было

$$x(\sigma)=-x(0),\qquad \dot{x}(\sigma)=-\dot{x}(0),\qquad y(\sigma)=y(0)=0 \tag{8.10}$$

и чтобы внутри интервала $(0, \sigma)$ переменная y имела тот же знак, который стоит перед γ в (8.4). Условия (8.10) в развернутом виде будут

$$\begin{gathered}
\Big(1+\exp\frac{-M\sigma}{2}\mathrm{ch}\,c\sigma\Big)P+\exp\frac{-M\sigma}{2}Q\,\mathrm{sh}\,c\sigma+\sigma R+2S=0\\
\Big[-\frac{M}{2}\Big(1+\exp\frac{-M\sigma}{2}\,\mathrm{ch}\,c\sigma\Big)+c\,\exp\frac{-M\sigma}{2}\mathrm{sh}\,c\sigma\Big]P+\\
+\Big[c\Big(1+\exp\frac{-M\sigma}{2}\,\mathrm{ch}\,c\sigma\Big)-\frac{M}{2}\exp\frac{-M\sigma}{2}\,\mathrm{sh}\,c\sigma\Big]\,Q+2R=0\\
\exp\frac{-M\sigma}{2}\Big\{\Big[\Big(1-\alpha-M\,\frac{\beta-M}{2}\Big)\,\mathrm{ch}\,c\sigma+c\,(\beta-M)\,\mathrm{sh}\,c\sigma\Big]P+\\
+\Big[c\,(\beta-M)\,\mathrm{ch}\,c\sigma+\Big(1-\alpha-M\,\frac{\beta-M}{2}\Big)\,\mathrm{sh}\,c\sigma\Big]\,Q\Big\}+(\sigma+\beta)\,R+S=0\\
\Big(1-\alpha-M\,\frac{\beta-M}{2}\Big)P+c\,(\beta-M)\,Q+\beta R+S=0
\end{gathered} \tag{8.11}$$

отсюда и могут быть найдены четыре величины P, Q, S, σ, после чего нужно проверить знак y. С другой стороны, уравнения (8.11) линейны и однородны относительно P, Q, R, S. Поэтому, если им удовлетворяет некоторая система значений P, Q, S, σ при данном R, т. е. при данном знаке перед γ, то им же удовлетворят значения $-P$, $-Q$, $-S$, σ при замене этого знака на противоположный. Иными словами, меняя знаки у P, Q, R, S, получим решение, удовлетворяющее уравнениям (8.2), (8.4) и условиям (8.10) с измененным знаком перед γ; при этом, если в первом решении y положителен, то во втором он отрицателен и наоборот. Второе решение описывает непосредственное продолжение движения на второй интервал σ, причем лишь для удобства переменная τ опять считается от нуля. В конце второго интервала три переменных x, $\dot{x}$, y принимают те же значения, что и в начале первого; мы имеем, следовательно, периодическое решение с периодом 2σ, удовлетворяющее соотношениям

$$x(\tau+\sigma)=-x(\tau), \qquad \dot{x}(\tau+\sigma)=-\dot{x}(\tau), \qquad y(\tau+\sigma)=-y(\tau) \tag{8.12}$$

где τ теперь считается от одного определенного нулевого значения.

Если рассматривать (8.11) как четыре линейных уравнения относительно P, Q, S, то для их совместности нужно, чтобы их определитель $\Gamma(\sigma)$ был равен нулю. Вычисление дает

$$\frac{1}{2}\exp\frac{M\sigma}{2}\Gamma(\sigma)=\alpha c\sigma\left(\operatorname{ch}\frac{M\sigma}{2}+\operatorname{ch}c\sigma\right)-2c(M-\alpha\beta)\operatorname{sh}\frac{M\sigma}{2}-$$
$$-[2\alpha(1-\alpha)-M(M-\alpha\beta)]\operatorname{sh}c\sigma \tag{8.13}$$

и мы имеем трансцендентное уравнение для σ:

$$\alpha c\sigma=\frac{2c(M-\alpha\beta)\operatorname{sh}(M\sigma/2)+[2\alpha(1-\alpha)-M(M-\alpha\beta)]\operatorname{sh}c\sigma}{\operatorname{ch}(M\sigma/2)+\operatorname{ch}c\sigma} \tag{8.14}$$

Для существования искомых периодических решений необходимо, чтобы это уравнение имело действительные положительные корни.

Если $\alpha=0$, то мы имеем из (8.4)

$$\dot{x}+Mx\pm\frac{1}{2}\gamma\tau^2+A\tau+B=0, \quad B=-Mx(0)-\dot{x}(0) \tag{8.15}$$

и формулы (8.6), (8.7), (8.8) должны быть заменены следующими:

$$x=Pe^{-M\tau}+Q\tau^2+R\tau+S, \qquad \dot{x}=-MPe^{-M\tau}+2Q\tau+R \tag{8.16}$$

$$y=P(M^2-\beta M+1)e^{-M\tau}+Q(\tau^2+2\beta\tau+2)+R(\tau+\beta)+S \tag{8.17}$$

при этом

$$Q=\mp\frac{\gamma}{2M} \tag{8.18}$$

а P, R, S — постоянные интеграции. Условия (8.10) получают вид

$$\begin{gathered}(1+e^{-M\sigma})P+\sigma^2Q+\sigma R+2S=0, \qquad -M(1+e^{-M\sigma})P+2\sigma Q+2R=0\\ e^{-M\sigma}(M^2-\beta M+1)P+(\sigma^2+2\beta\sigma+2)Q+(\sigma+\beta)R+S=0\\ (M^2-\beta M+1)P+2Q+\beta R+S=0\end{gathered} \tag{8.19}$$

Вычисляя определитель $\Gamma(\sigma)$ этих четырех форм, линейных относительно P, Q, R, S, находим

$$-\frac{1}{8}\exp\frac{M\sigma}{2}\Gamma(\sigma)=M\sigma(1-M\beta)\operatorname{ch}\frac{M\sigma}{2}-2(M^2-\beta M+1)\operatorname{sh}\frac{M\sigma}{2} \tag{8.20}$$

так что уравнение $\Gamma(\sigma)=0$ может быть представлено в виде

$$\operatorname{th}\frac{M\sigma}{2}=\frac{M\sigma}{2}\,\frac{1-M\beta}{M^2-\beta M+1} \tag{8.21}$$

Рассматриваемый случай $\alpha=0$ при $Y=0$ исследовали А. Андронов и Н. Баутин[5], которые указали, что последнее уравнение имеет положительные корни при $M\beta<1$. Если же $M\beta>1$, то искомых периодических решений не существует. Этот вывод совпадает с тем, который получается из приближенной теории. В самом деле, $\eta=M\beta=1$ есть ордината точки касания параболы на фиг. 3 с осью η; но из сказанного в § 6, 7 следует, что для тех систем значений параметров, которые изображаются точками оси, лежащими выше точки касания, установившиеся колебания невозможны.

Заметим еще, что уравнение (8.21) может быть получено, с некоторыми предосторожностями, путем предельного перехода из (8.14). Если в последнем уравнении сделать просто $\alpha = 0$, то оно обратится в тождество; то же самое будет и в том случае, если предварительно продифференцировать обе части по α. Но если дифференцировать по α два раза и затем положить $\alpha = 0$, то, как нетрудно убедиться, получится уравнение (8.21).

Поступила в редакцию
23 II 1945

Институт механики
Академии Наук СССР

B. V. BULGAKOV. PROBLEMS OF THE CONTROL THEORY WITH NON-LINEAR CHARACTERISTICS

Chapter I of the present article contains a further generalization of the approximate equations of a pseudo-linear oscillatory system with many degrees of freedom constructed by van der Pol's method in a previous communication.

Chapter II deals with the motion of a system possessing inertia and natural restoring force when its position is additionally controlled by an automatic device. The opening of the piston valve of the servo-motor operating the regulating member is supposed to depend linearly on the departure of the system from the pre-selected state, on its velocity and acceleration and on the displacement of the regulating member itself referred back to the valve by the follow-up linkage. The effect of the inertia of the servo-motor and of the external disturbing forces is also partially considered. With the aid of the equations of motion it is shown that the acceleration control is in some respects equivalent to the follow-up linkage. The chief object of the chapter is, however, the investigation of the possible steady vibrations and the determination of values of the system's parameters for which these vibrations are precluded and the control process converges for all initial displacements. The results are summed up in the diagram, Fig. 3. The calculation is effected mainly with the aid of the van der Pol equations, but for a simple form of the characteristic curve the exact periodic solutions are also given.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Булгаков Б. В. О применении метода ван дер Поля к псевдолинейным колебательным системам со многими степенями свободы. Прикладная математика и механика. 1942. Т. VI. Вып. 6.
2. Булгаков Б. В. О нормальных координатах. Прикладная математика и механика 1946 г. т. X. вып. 2.
3. Tolle M. Die Regelung der Kraftmaschinen. 3 Aufl. Berlin. 1921.
4. Булгаков Б. В. Автоколебания регулируемых систем. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII. Вып. 2.
5. Андронов А. и Баутин Н. Движение нейтрального самолета, снабженного автопилотом, и теория точечных преобразований поверхностей. Доклады Академии Наук СССР. 1944. Т. XLIV. № 5.
6. Лурье А. И. и Постников В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем. Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII. Вып. 3.
7. Булгаков Б. В. О применении метода А. Пуанкаре к свободным псевдолинейным колебательным системам. Прикладная математика и механика. 1942. Т. VI. Вып. 4.
8. Андронов А. А. и Хайкин С. Э. Теория колебаний. 1937. Ч. 1. Гл. V. § 3, 5.