Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С. Г. Михлин

(Ленинград)

Рассмотрим упругую однородную среду, которая заполняет все бесконечное пространство, разрезанное вдоль конечного числа плоских щелей, расположенных в плоскости xy. Пусть к обеим сторонам щелей приложена непрерывно распределенная нормальная нагрузка. Наконец, примем, что объемные силы отсутствуют. Найдем распределение напряжений в упругом теле при указанных условиях.

Совокупность областей плоскости xy, соответствующих щелям, обозначим через S, дополнительную к ним область через Σ, а бесконечное пространство, разрезанное вдоль S, через D.

Тензор напряжений обозначим через $\mathbf{T}$,

$$\mathbf{T} = \left\| \begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{matrix} \right\|$$

а составляющие смещений через u, v, w. Тензор $\mathbf{T}$ должен быть определен из граничных условий

$$\text{на } S \qquad \begin{gathered} \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = f(x, y) \end{gathered} \tag{1}$$

где $f(x, y)$ — заданная на S функция, которая может иметь разные значения на разных сторонах щели.

Как известно [1], упругие смещения могут быть выражены через три гармонические области в D функции φ_1, φ_2, φ_3 по формулам

$$u = \varphi_1 + z\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad v = \varphi_2 + z\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad w = \varphi_3 + z\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{2}$$

Здесь ψ — гармоническая функция, определяемая из уравнения

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right) \tag{3}$$

где λ и μ — коэффициенты Ляме. Таким образом дело сводится к определению функций φ_1, φ_2, φ_3 из условий (1).

Лемма. Если касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} равны нулю на S, то они равны нулю на всей плоскости xy.

Найдем выражения τ_{xy} и τ_{yz} через φ_1, φ_2, φ_3 и ψ:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \mu\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} + 2z\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z}\right) \\ \tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} + 2z\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Если $z = 0$, то

$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right), \qquad \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\right) \tag{5}$$

Функции в правых частях равенств (5) — гармонические в D. В силу условий (1) они равны нулю на S. Но тогда они тождественно равны нулю в D. В частности, они равны нулю при $z=0$, что и доказывает лемму.

Между функциями φ_1, φ_2, φ_3 и ψ можно установить некоторые простые соотношения, исходя из условий (1). Прежде всего из доказанной леммы следует

$$\begin{gathered}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}+\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial y}=0\end{gathered} \tag{6}$$

Далее, τ_{xz}, τ_{yz} и σ_z удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0$$

При $z=0$ первые два члена слева исчезают и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)_{z=0}=0 \tag{7}$$

Далее,

$$\sigma_z=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+(\lambda+2\mu)\frac{\partial w}{\partial z}=2\mu\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial \psi}{\partial z}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}+z\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)$$

Подставив это в (7), получим равенство

$$\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2}=0$$

верное при $z=0$. Но, так как его левая часть есть функция, гармоническая в D, то это равенство верно везде. Интегрируя его дважды по z, найдем

$$\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\psi+\varphi_3=z\alpha(x,y)+\beta(x,y)$$

Левая часть последнего равенства, очевидно, ограничена при $z\to\infty$. Отсюда следует, что $\alpha(x,y)\equiv 0$. Далее, функция $\beta(x,y)$ — гармоническая на всей плоскости xy. По теореме Лиувилля она равна постоянной. Отнеся эту постоянную за счет функции φ_3 или ψ, находим

$$\varphi_3=-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\psi \tag{8}$$

Из равенств (6) получаем еще два соотношения:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{9}$$

Соотношения (8) и (9) сводят нашу задачу к отысканию одной функции ψ. Нетрудно найти граничное условие, которому она удовлетворяет. Из выражения для σ_z имеем

$$\sigma_z=-2\mu\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{при} \quad z=0$$

что в силу условия (2) дает

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}=-\frac{1}{2\mu}f(x,y) \qquad \text{на} \quad S \tag{10}$$

Дело сводится к решению задачи Дирихле для области D. Этот путь, однако, не эффективен, так как простое решение указанной задачи неизвестно.

Будем решать нашу задачу следующим образом. Обозначим через $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ значения $f(x,y)$ соответственно на верхней и нижней стороне S. Тензор $\mathbf{T}$ представим в виде

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}^{(1)}+\mathbf{T}^{(2)} \tag{11}$$

где

$$\mathbf{T}^i = \left\| \begin{matrix} \sigma_x^{(i)} & \tau_{xy}^{(i)} & \tau_{xz}^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} & \sigma_y^{(i)} & \tau_{xy}^{(i)} \\ \tau_{xz}^{(i)} & \tau_{yz}^{(i)} & \sigma_z^{(i)} \end{matrix} \right\| \qquad (i=1,2)$$

Соответствующие напряжения и смещения будем обозначать индексами (1) и (2) вверху. Относительно $\mathbf{T}^{(1)}$ и $\mathbf{T}^{(2)}$ будем считать, что они удовлетворяют уравнениям равновесия. Далее, примем, что на S они удовлетворяют первым условиям (1) и, наконец,

$$\sigma_z^{(1)} = \begin{cases} f^{(1)}(x,y) & \text{на верхней стороне } S \\ -f^{(1)}(x,y) & \text{на нижней стороне } S \end{cases} \tag{12}$$

$$\sigma_z^{(2)} = f^{(2)}(x,y) \qquad \text{на обеих сторонах } S \tag{13}$$

Здесь

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x,y) &= \frac{1}{2}\left[f_1(x,y) - f_2(x,y)\right] \\ f^{(2)}(x,y) &= \frac{1}{2}\left[f_1(x,y) + f_2(x,y)\right] \end{aligned} \tag{14}$$

Докажем, что на Σ обращаются в нуль величины $\sigma_z^{(1)}$ и $w^{(2)}$. Построим гармоническую в верхнем полупространстве функцию $\Psi_1(x,y,z)$, удовлетворяющую граничным условиям

$$\Psi(x,y,0) = -\frac{1}{2\mu} f^{(1)}(x,y) \quad \text{на } S,$$

$$\Psi(x,y,0) = 0 \quad \text{на } \Sigma \tag{15}$$

Гармоническая функция $\Psi_1(x,y,z) = -\Psi(x,y,-z)$ является ее аналитическим продолжением в нижнее полупространство через область Σ, так как на Σ обе функции совпадают вместе со своими нормальными производными. Таким образом гармоническая функция Ψ определена везде в D. Найдем теперь функцию $\psi^{(1)}$ из уравнения

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} = \Psi \tag{16}$$

и гармонические функции $\varphi_1^{(1)}$, $\varphi_2^{(1)}$, $\varphi_3^{(1)}$ с помощью равенств (9) и (8). Все эти операции определяют тензор $\mathbf{T}^{(1)}$, удовлетворяющий условиям (1) и (12), и при этом из (15) и (16), очевидно, следует, что $\sigma_z^{(1)} = 0$ на Σ. Так как условия (1) и (12) определяют тензор $\mathbf{T}^{(1)}$ единственным образом, то наше утверждение относительно $\sigma_z^{(1)}$ доказано.

Аналогично доказывается, что $w^{(2)} = 0$ на Σ, только на этот раз определяется в верхнем полупространстве функция $\psi^{(2)}$ по условиям

$$\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} = -\frac{1}{2\mu} f^{(2)}(x,y) \quad \text{на } S, \tag{17}$$

$$\psi^{(2)} = 0 \quad \text{на } \Sigma$$

ее аналитическим продолжением в нижнее полупространство служит функция

$$-\psi^{(2)}(x,y,-z)$$

Тензор $\mathbf{T}^{(1)}$ строится очень просто: так как $\sigma_z^{(1)}$ известно на всей плоскости, то достаточно проинтегрировать известное решение Буссине задачи о сосредоточенной силе, приложенной нормально к границе полупространства[1]. Построение тензора $\mathbf{T}^{(2)}$ значительно сложнее, так как требует [см. равенства (17)] решения смешанной задачи теории потенциала. В случае, когда S есть круг или внешность круга, простое решение смешанной задачи содержится в статье акад. Н. Е. Кочина[2].

Отметим, что из условий (1) вытекает соотношение

$$\sigma_x + \sigma_y = (1+2\nu)\,\sigma_z \quad \text{при} \quad z = 0 \tag{18}$$

где ν – коэффициент Пуассона. Действительно (θ – объемное расширение),

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (3\lambda + 2\mu)\,\theta = -\frac{2\mu\,(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Полагая здесь $z=0$ и замечая, что при $z=0$

$$\sigma_z = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

мы получим формулу (18).

Мы рассматривали до сих пор случай, когда на S действуют нормальные силы. В общем случае дело сводится к трехкратному решению смешанной задачи для полупространства.

Поступила в редакцию 15 II 1945

Ленинградский государственный университет

S. G. MICHLIN. – SOLUTION OF A CERTAIN THREE-DIMENSIONAL PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY

The paper considers an infinite elastic space having a number of slots in the xy-plane. The field of stresses is sought, given normal forces distributed along both sides of the slots. The problem is simple if the load on one side is anti-symmetrical to that on the opposite side of the slot.

If the above mentioned loads are symmetrical, the problem is reduced to the mixed problem of the theory of potential. This problem is simple as well, in case of a single slot of circular shape in plane.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трефетц Е. Математическая теория упругости. Перев. с нем. ГТТИ. 1934.
2. Кочин Н. Е. Теория крыла конечного размаха круговой формы в плане. Прикладная математика и механика. 1940. Т. IV. Вып. 1.