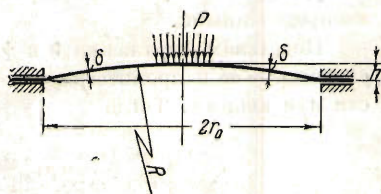


К РАСЧЕТУ ХЛОПАЮЩЕЙ МЕМБРАНЫ<sup>1</sup>

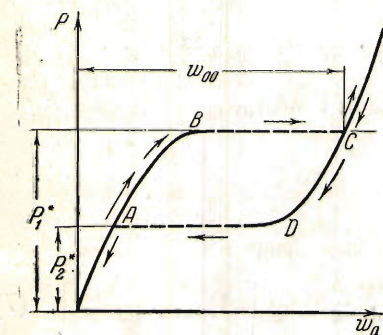
В. И. Феодосьев

(Москва)

Сферический тонкостенный купол малого подъема известен в приборостроении под названием хлопающей мембраны. Эта деталь, изображенная на фиг. 1, под действием некоторых усилий, в частности распределенного по выпуклой стороне давления, способна при определенных условиях потерять устойчивость (выщелкнуться). Достаточная тонкостенность мембраны и высокий предел пропорциональности материала, из которого она изготавливается, обеспечивают ей сохранение упругих свойств и за пределами критических усилий. Если изобразить графически зависимость между усилием  $P$  и величиной вызываемого им прогиба  $w_0$  в центре мембраны (фиг. 2), при некотором критическом усилии  $P_1^*$  происходит скачкообразный переход на некоторую новую ветвь кривой  $P = P(w_0)$ , причем дальнейший рост усилия сопровождается ростом деформаций, происходящих по некоторому новому закону, отличному от начального. При разгрузке мембраны возвращение на начальную ветвь происходит снова скачкообразно, но при некотором новом усилии  $P_2^*$  — критическом усилии разгрузки, меньшем, чем первое.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Ниже дается приближенный расчет хлопающей мембраны для случая симметричной нагрузки. К решению этой задачи применяются уравнения (6) больших перемещений тонкостенной оболочки из работы автора [1].

Эти уравнения в случае сферической оболочки малого угла подъема  $\theta$  при нагружении ее давлением  $p$ , равномерно распределенным по выпуклой стороне, принимают вид

$$p \frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{d\psi}{d\rho} - \frac{\psi}{\rho} = \vartheta \left( \theta_0 \rho + \frac{\vartheta}{2} \right), \quad \rho \frac{d^2\vartheta}{d\rho^2} + \frac{d\vartheta}{d\rho} - \frac{\vartheta}{\rho} = -\lambda \psi (\theta_0 \rho + \vartheta) + \nu \rho^2 \quad (1)$$

где

$$\rho = \frac{r}{r_0}, \quad \psi = -\frac{T_1 \rho}{E \delta}, \quad \lambda = 12(1 - \nu^2) \frac{r_0^2}{\delta^2}, \quad \nu = \lambda \frac{Pr_0}{2E\delta} \quad (2)$$

Здесь  $\rho$  — безразмерный радиус, принятый в качестве независимой переменной.  $r$  — текущий радиус,  $r_0$  — радиус внешнего контура мембраны (фиг. 1),  $T_1$  — радиальное растягивающее усилие,  $\delta$  — толщина стенки,  $\vartheta$  — угол поворота дуги меридиана,  $\theta_0$  — угол наклона дуги меридиана на контуре до деформации.

<sup>1</sup> Доложено на семинаре по общей механике в Институте механики Академии Наук СССР 23 марта 1944 г.

При  $\theta_0 = 0$  уравнения (1) переходят в известные уравнения круглой пластинки в больших перемещениях [2].

Применяя метод Галеркина и ограничиваясь первым приближением, положим, что угол поворота  $\vartheta$  для хлопающей мембраны подчиняется тому же закону, что и для плоской в области начальной малости перемещений. Тогда

$$\vartheta = C(\rho^3 - \alpha\rho + \beta/\rho) \quad \text{или} \quad \vartheta = C(\rho^3 - \alpha\rho) \quad (3)$$

(так как из условий ограниченности  $\vartheta$  в центре  $\beta = 0$ ). Величина  $\alpha$  определяется из условий на контуре.

Из первого уравнения (1) получаем

$$\psi = \frac{C^2}{96} \left[ \rho^7 - 4z\rho^5 + 6z^2\rho^3 - \alpha_1\rho - \frac{\beta_1}{\rho} \right] + \frac{C\theta_0}{24} \left[ \rho^5 - 3z\rho^3 - \alpha_2\rho - \frac{\beta_2}{\rho} \right] \quad (4)$$

где  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  из условия ограниченности  $\psi$  в центре, а величины  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  остаются пока неопределенными.

Подставим выражения  $\vartheta$  и  $\psi$  согласно (3) и (4) во второе уравнение (1), умножим его на  $\rho^3 - \alpha\rho$  и проинтегрируем его в пределах от нуля до единицы, т. е. по всей области изменения  $\rho$ . Тогда

$$a_1 C^3 + a_2 C^2 \theta_0 + C \left[ a_3 \theta_0^2 + \frac{a_4}{\lambda} \right] = \frac{\nu}{\lambda} \frac{a_4}{8} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{96} \left[ \left( \frac{1}{14} - \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2} \alpha^2 - 2z^3 + z^4 \right) - \alpha_1 \left( \frac{1}{8} - \frac{\alpha}{3} + \frac{z^2}{8} \right) \right] \\ a_2 &= \frac{1}{96} \left[ \left( \frac{5}{12} - \frac{5}{2} \alpha + \frac{19}{4} \alpha^2 - 3z^3 \right) - \alpha_1 \left( \frac{1}{6} - \frac{\alpha}{4} \right) - \alpha_2 \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \alpha + z^2 \right) \right] \\ a_3 &= \frac{1}{24} \left[ \left( \frac{1}{10} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2} \right) - \alpha_2 \left( \frac{1}{6} - \frac{\alpha}{4} \right) \right], \quad a_4 = -2z + \frac{4}{3} \end{aligned} \quad (6)$$

Так как прогиб мембраны в центре

$$w_0 = -r_0 \int_0^1 \vartheta d\rho, \quad \text{то} \quad C = \frac{w_0}{r_0} \frac{2}{\alpha - 1/2}$$

Подставляя последнее выражение в (5), получаем

$$\frac{pr_0^4}{E\delta^4} = A_3 \frac{w_0^3}{\delta^3} - A_2 \frac{w_0^2}{\delta^2} \frac{h}{\delta} + \frac{w_0}{\delta} \left[ A_1 \frac{h^2}{\delta^2} + \frac{A_0}{1 - \nu^2} \right] \quad (7)$$

где  $h$  — высота купола (фиг. 1) и постоянные

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{8}{3} \frac{1}{\alpha - 1/2}, & A_2 &= -128 \frac{a_2}{a_4 (\alpha - 1/2)^2} \\ A_1 &= 128 \frac{a_3}{a_4 (\alpha - 1/2)}, & A_3 &= 128 \frac{a_1}{a_4 (\alpha - 1/2)^3} \end{aligned} \quad (8)$$

зависят от способа закрепления мембраны.

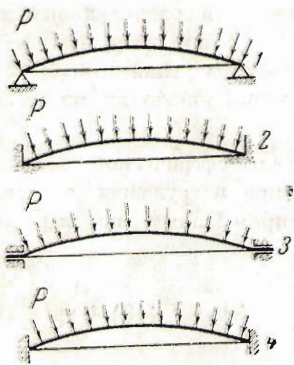
Рассмотрим четыре способа закрепления (1, 2, 3, 4), представленные на фиг. 3.

1. Изгибающий момент и растягивающая сила  $T_1$  на контуре равны нулю (свободная опора). При  $\rho = 1$

$$\frac{d\vartheta}{d\rho} + \nu \frac{\vartheta}{\rho} = 0, \quad \psi = 0$$

Откуда

$$\alpha = \frac{3 + \nu}{1 + \nu}, \quad \alpha_1 = 1 - 4z + 6z^2, \quad \alpha_2 = 1 - 3z$$



Фиг. 3.

Выражения для коэффициентов  $A$  имеют довольно сложный вид, поэтому здесь приводятся численные значения для различных значений  $\mu$ :

$\mu$	0.25	0.30	0.35
$A_0$	1.2699	1.3083	1.3459
$A_1$	0.72689	0.72896	0.73105
$A_2$	1.1067	1.1108	1.1149
$A_3$	0.37583	0.37766	0.37951

2. Изгибающий момент и радиальное перемещение на контуре равно нулю. При  $\rho = 1$

$$\frac{d\vartheta}{d\rho} + \mu \frac{\vartheta}{\rho} = 0, \quad \varepsilon_2 = 0$$

Тогда

$$\alpha = \frac{3 + \mu}{1 + \mu}, \quad \alpha_1 = \frac{(7 - 20\alpha + 18\alpha^2) - \mu(1 - 4\alpha + 6\alpha^2)}{1 - \mu}, \quad \alpha_2 = \frac{(5 - 9\alpha) - \mu(1 - 3\alpha)}{1 - \mu}$$

Для коэффициентов  $A$  получим значения

$\mu$	0.25	0.30	0.35
$A_0$	1.2698	1.3082	1.3458
$A_1$	5.6370	5.9764	6.3668
$A_2$	7.9882	8.4528	8.9884
$A_3$	2.5189	2.6603	2.8238

3. Угол поворота и растягивающее усилие на контуре равны нулю. При  $\rho = 1$

$$\vartheta = 0, \quad \psi = 0$$

Откуда

$$\alpha = 1, \quad \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = -2; \quad A_0 = \frac{16}{3}, \quad A_1 = \frac{16}{15}, \quad A_2 = 2, \quad A_3 = \frac{6}{7}$$

4. Угол поворота и радиальное перемещение на контуре равны нулю (жесткое закрепление). При  $\rho = 1$

$$\vartheta = 0, \quad \varepsilon_2 = 0$$

Тогда

$$\alpha = 1, \quad \alpha_1 = \frac{5 - 3\mu}{1 - \mu}, \quad \alpha_2 = -\frac{4 - 2\mu}{1 - \mu}$$

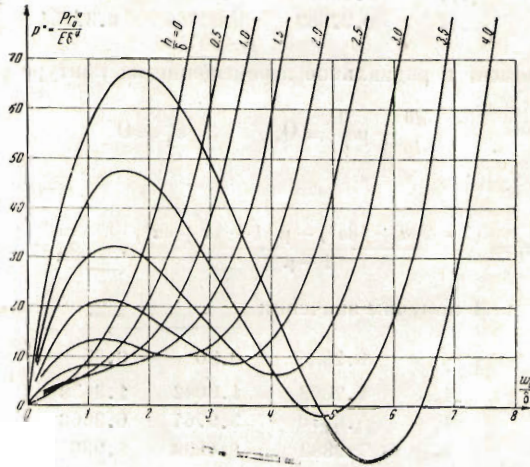
$$A_0 = \frac{16}{3}, \quad A_1 = \frac{8}{15} \frac{7 - 2\mu}{1 - \mu}, \quad A_2 = 2 \frac{3 - \mu}{1 - \mu}, \quad A_3 = \frac{2}{21} \frac{23 - 9\mu}{1 - \mu}$$

Подставляя в выражении (7)  $h = 0$ , приходим к классическому решению круглой пластинки в больших перемещениях<sup>[2]</sup>.

Проследим, как меняется вид характеристики мембраны  $P = P(w_0)$  в зависимости от параметра  $h/\delta$ . На фиг. 4 представлена зависимость величины  $Pr_0^4/(E\delta^4)$  от относительного прогиба  $w_0/\delta$  при нескольких значениях относительной начальной выпуклости мембраны  $h/\delta$  для жестко закрепленной мембраны.

Кривая, соответствующая  $h/\delta = 0$ , представляет собой известную характеристику плоской мембраны. Возрастание высоты  $h$  вызывает прежде всего повышение начальной жесткости, а затем — нарушение монотонности хода кривой. При некотором значении  $h/\delta$  (в рассматриваемом случае  $h/\delta \approx 1.5$ ) на характеристике мембраны появляется участок с отрицательной производной, расположенный между двумя экстремальными точками. Этот участок можно назвать участком отрицательной жесткости, поскольку возрастание прогиба в данном случае происходит при уменьшении нагрузки. Такой режим работы мембраны является, очевидно, неустойчивым, а давления, соответствующие экстре-

малыми точками, будут критическими для данной мембраны. После достижения давлением первого экстремума мембрана, минуя неустойчивый участок, скачком изменит свой прогиб. Дальнейшая работа будет происходить на правой устойчивой, возрастающей ветви характеристики. Разгрузка мембраны вызывает скачкообразное обратное изменение прогиба, соответствующее второму критическому давлению. Таким образом получается полное соответствие с описанной выше картиной работы хлопающей мембраны.



Фиг. 4.

Дальнейшее повышение высоты мембраны  $h$  дает, как видно из фиг. 4, еще большее искривление характеристики, и при некотором значении  $h$  последняя начинает пересекать ось абсцисс. Мембрана при давлении  $p=0$  имеет, следовательно, три формы равновесия, из которых две устойчивы, а третья, промежуточная, неустойчива. Такая мембрана после защелкивания и разгрузки в начальное положение не возвращается и сохраняет упругий остаточный прогиб, соответствующий точке пересечения кривой с осью абсцисс.

Если провести исследования выражения (7), то легко получить значения критических давлений

$$p^* = \left( \frac{pr_0^4}{E\delta^4} \right)_{\text{кр}} = k_1 \frac{h}{\delta} \left( k_2 \frac{h^2}{\delta^2} + \frac{1}{1-\mu^2} \right) \pm k_3 \left( k_4 \frac{h^2}{\delta^2} - \frac{1}{1-\mu^2} \right)^{3/2} \quad (9)$$

где знак плюс соответствует первому критическому давлению, а минус — второму, величины  $k$  определяются формулами

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{3} \frac{A_0 A_2}{A_3}, & k_2 &= 2A_3 \left( \frac{1}{3} \frac{A_0}{A_3} \right)^{3/2} \\ k_3 &= \frac{1}{A_0 A_3} \left( A_1 A_2 - \frac{2}{9} A_2^2 \right), & k_4 &= \frac{1}{A_0 A_3} \left( \frac{1}{3} A_2^2 - A_1 A_3 \right) \end{aligned} \quad (10)$$

При  $h/\delta < [k_1(1-\mu^2)]^{-1/3}$  величина  $p^*$  теряет вещественные значения и мембрана всегда будет устойчива. Зависимость  $p^* = p^*(h/\delta)$  представлена графически на фиг. 5. Верхняя часть каждой кривой отражает первое критическое давление, нижняя, начиная с точки возврата, — второе критическое давление.

Из выражения (7) легко установить условие, при котором мембрана защелкивается, т. е. после снятия нагрузки не возвращается в начальное положение.

$$\frac{h}{\delta} > \sqrt{\frac{A_0 A_3}{(1-\mu^2)(A_2^2 - 4A_1 A_3)}}$$

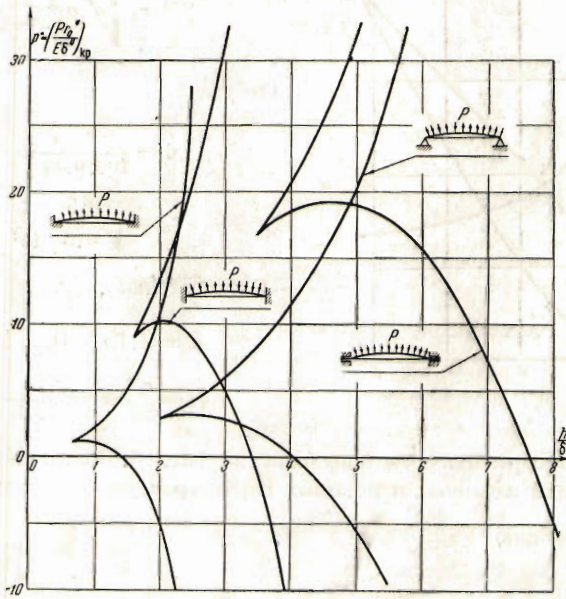
В частности, при свободной заделке контура это будет при

$$\frac{h}{\delta} > \sqrt{\frac{160}{3(1-\mu^2)}}$$

Глубина выщелкивания мембраны  $w_{00}$  (фиг. 2)

$$\frac{w_{00}}{\delta} = \frac{1}{3A_3} \left[ 2 \sqrt{\frac{h^2}{\delta^2} (A_2^2 - 3A_1A_3) - \frac{3A_0A_3}{1-\mu^2} + A_2 \frac{h}{\delta}} \right]$$

Обратная задача выбора размеров мембраны, удовлетворяющей заданным условиям, не содержит в себе принципиальных трудностей.



Фиг. 5.

Введем понятие показателя выщелкивания  $\alpha$ , определяя его отношением

$$\alpha = \frac{p_1^* - p_2^*}{p_1^*} \geq 0$$

При  $\alpha = 0$  имеем  $p_1^* = p_2^*$ . Этот случай соответствует, очевидно,  $h/\delta = [h_4(1-\mu^2)]^{-1/2}$ . Характеристика в этом случае отражается кривой  $h/\delta \approx 1.5$  (фиг. 4).

При  $\alpha = 1$  имеем  $p_2^* = 0$ , и характеристика касается в своей минимальной точке оси абсцисс. При  $\alpha > 1$  мембрана защелкивает и в начальное положение после разгрузки не возвращается.

Будем считать показатель выщелкивания  $\alpha$ , глубину выщелкивания  $w_{00}$ , критическое давление  $p_1^*$  и упругие постоянные материала  $E$  и  $\mu$  величинами заданными.

Так как

$$\frac{p_1^* r_0^4}{E \delta^4} = f\left(\frac{h}{\delta}\right), \quad \frac{w_{00}}{\delta} = \varphi\left(\frac{h}{\delta}\right)$$

то

$$\frac{r_0}{w_{00}} \sqrt{\frac{p_1^*}{E}} = \frac{[f(h/\delta)]^{1/4}}{\varphi(h/\delta)} = \Phi\left(\frac{h}{\delta}\right)$$

На фиг. 6 для жесткого закрепления контура построены кривые  $\alpha(h/\delta)$ ,  $\varphi(h/\delta)$ ,

$\Phi(h/\delta)$ , пользуясь которыми можно определить размеры мембраны  $r_0$ ,  $h$  и  $\delta$ . Пусть, например,

$$p_1^* = 0.5 \text{ кг/см}^2, \quad \alpha = 0.4,$$

$$w_{00} = 2 \text{ мм}, \quad E = 10^4 \text{ кг/мм}^2$$

Откладываем на оси ординат  $0.2 \alpha = 0.08$  и на пересечении горизонтальной прямой, показанной на фиг 6, с кривой  $0.2 \alpha$  находим  $h/\delta = 2.15$ .

Далее

$$\frac{w_{00}}{10\delta} = 0.35$$

$$\frac{r_0}{\gamma} \sqrt[4]{\frac{p_1^*}{E}} = 0.56$$

Откуда

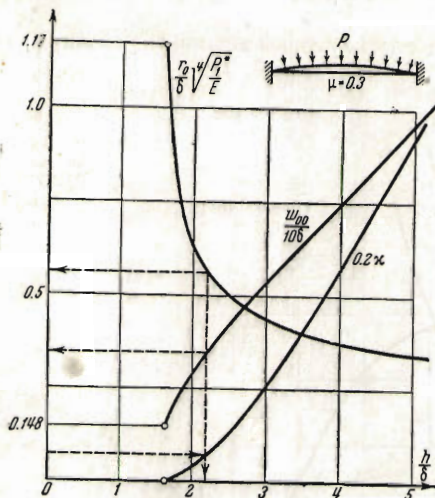
$$\delta = \frac{2}{10 \times 0.35} = 0.571 \text{ мм}$$

$$r_0 = \frac{0.56 \times 2}{\sqrt[4]{0.5/10^4}} = 42 \text{ мм}$$

Следовательно,

$$h = 2.15 \times 0.571 = 1.23 \text{ мм}$$

$$R = \frac{r_0^2}{2h} = \frac{42}{2 \times 1.23} = 719 \text{ мм}$$



Фиг. 6.

Заметим, что номограмма, представленная на фиг. 6, позволяет вести вычисления при любой комбинации заданных и искомых параметров.

Поступила в редакцию  
7 VII 1945

#### V. I. FEODOSIEV. — CALCULATION OF THIN CLICKING MEMBRANES

The author employs the Galerkin method in the solution of non-linear equations of a gently sloping circular shell (cupola) uniformly loaded on its convex surface.

The solution enables the author to determine the relationship between the deflection of the shell and the acting load and the critical pressures. The author finds the maximum height of the cupola at which the shell loses its stability and when the load is removed, re-establishes its form or maintains its elastic deflection.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофрировкой. Прикладная математика и механика. 1945. Т. IX. Стр. 389.
2. Панов Д. Ю. Применение метода акад. Б. Г. Галеркина для решения некоторых нелинейных задач теории упругости. Прикладная математика и механика. 1939. Т. III. Вып. 2. Стр. 139.