Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика. Том X, 1946.

ЗАМЕТКИ

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н. Г. Четаев

(Москва)

Мысль Даламбера об интегрировании линейных уравнений с постоянными коэффициентами возможно развить на систему

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + \ldots + p_{in}x_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где p_{ij} — вещественные постоянные.

В самом деле, ищем частные решения вида

$$x_i = \left(A_{1,i}\frac{t^m}{m!} + A_{2,i}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + A_{m+1,i} \right) e^{\lambda t}$$

где $A_{k,j}$ и λ — постоянные; среди постоянных некоторые $A_{k,j}$ должны по смыслу быть отличными от нуля; положительную целую степень m будем находить для каждого λ возможно наибольшей. Если эти выражения поставить в уравнения (1) и учесть, что получающиеся при этом соотношения должны удовлетворяться тождественно при произвольных значениях t, то получим

$$\sum_j (p_{ij} - \delta_{ij}\lambda) A_{p,j} = A_{p-1,i} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ p = 1, \ldots, m+1) \tag{2}$$

где δ_{ij} обозначает символ Кронекера, т. е. $\delta_{ij} = 0$, если i и j различны, и $\delta_{ij} = 1$, когда i и j равны между собой; $A_{0,j} = 0$.

Первая ($p = 1$) из систем (2) будет тогда иметь нетривиальное решение для A_{ij}, когда уничтожается определитель, составленный из ее коэффициентов:

$$\Delta(\lambda) = \| p_{ij} - \delta_{ij}\lambda \| = 0$$

Корнями этого *характеристического* уравнения определяются искомые значения λ. Пусть $\lambda = \lambda_0$ — корень характеристического уравнения. Первая из систем (2) будет определять одно нетривиальное решение для $A_{1,j}$, если отличен от нуля по крайней мере один из миноров первого порядка определителя $\Delta(\lambda_0)$; она будет определять k линейно независимых решений для $A_{1,j}$, если корень λ_0 обращает в нуль все миноры до порядка -1 включительно, не обращая в нуль по крайней мере одного из миноров порядка k.

Остановимся сначала на случае, когда корень $\lambda = \lambda_0$ не обращает в нуль Δ_{11}. Нас интересуют постоянные $A_{k,j}$ с точностью до общего им всем множителя, поэтому решение первой ($p = 1$) из систем (2) возьмем в виде

$$A_{1,j} = \Delta_{1,j} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

где $\Delta_{i,j}$ обозначает минор (со знаком) определителя $\Delta(\lambda)$, отвечающий элементу i-ой строки и j-ой колонки; при этом $\lambda = \lambda_0$.

Когда λ переменно, формулы (3) определяют $A_{1,j}$ в виде некоторых полиномов от λ.

Эти полиномы A_{1j} удовлетворяют уравнениям $i=2,\ldots,n$ первой $(p=1)$ из систем (2) тождественно и независимо от значений λ. Дифференцируя тождества

$$\sum_j (p_{i,j}-\delta_{ij}\lambda)\,A_{1j}\equiv 0 \qquad (i=2,\ldots,n)$$

последовательно k раз по λ, заключаем, что полиномы

$$A_{k+1,j}=\frac{1}{k!}\,A_{1\,j}^{(k)} \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{4}$$

где A_{1j} обозначают производную от A_{1j} по λ порядка k, удовлетворяют уравнениям $i=2\ldots$ и любой из систем (2) независимо от значений λ.

Подстановка полиномов (3) в первое $(i=1)$ уравнение первой $(p=1)$ из систем (2) дает соотношение

$$\sum (p_{1j}-\delta_{1j}\lambda)\,A_{1j}\equiv\Delta(\lambda) \tag{5}$$

согласно которому первой $(p=1)$ из систем (2) будут удовлетворять значения полиномов A_{1j} при λ, равном корню характеристичного уравнения $\Delta(\lambda)=0$.

Когда $\lambda=\lambda_0$ является простым корнем, то первая производная $\Delta'(\lambda)$ от характеристичного определителя $\Delta(\lambda)$ не обращается в нуль при $\lambda=\lambda_0$. Дифференцируя тождество (5), имеем

$$\Delta'(\lambda_0)=\sum_j (p_{1j}-\delta_{ij}\lambda_0)\,A_{2,j}-A_{1,1}\neq 0$$

Другими словами, постоянные A_{kj}, определенные формулами (3) и (4), при $\lambda=\lambda_0$, не удовлетворяют первому $(i=2)$ уравнению второй $(p=2)$ из систем (2); и, следовательно, наивысшая степень m равна в этом случае нулю.

Когда $\lambda=\lambda_0$ является корнем кратности μ, то все производные определители $\Delta(\lambda)$ до порядка $\mu-1$ включительно будут уничтожаться при $\lambda=\lambda_0$, а производные порядка μ при $\lambda=\lambda_0$ будут отличны от нуля. Дифференцируя тождество (5) последовательно k раз $(k=0,1,2,\ldots)$ и используя определения (4), будем иметь

$$\frac{1}{k!}\,\Delta^{(k)}(\lambda)=\sum_j (p_{ij}-\delta_{ij}\lambda)\,A_{k+1,j}-A_{k,1}$$

откуда должны заключить, что значения полиномов A_{rj} $(r=1,\ldots,\mu)$ при $\lambda=\lambda_0$ будут удовлетворять μ первым системам (2) и не удовлетворять системе $p=\mu$. Следовательно, наибольшая степень m будет при этом на единицу меньше кратности корня $m=\mu-1$.

Если системы (2) удовлетворяют до какого-либо $p=m+1$, то этими же значениями A_{kj} будут удовлетворяться тем самым все системы (2) до любого меньшего значения p. Это заставляет заключить, что одновременно с искомым частным решением наивысшей степени m для отмеченного корня λ

$$x_i=f_i(t)\,e^{\lambda t}$$

где

$$f_i(t)=A_{1,i}\,\frac{t^m}{m!}+\ldots+A_{m+1,i}$$

существуют *производные* от него частные решения вида

$$x_i=f_i^{(s)}e^{\lambda t} \qquad (s=0,1,\ldots,m)$$

где $f_i^{(s)}(t)$ обозначает производную по t порядка s. Таким образом для рассматриваемого корня $\lambda=\lambda_0$ кратности μ мы определим группу из μ частных решений; они будут линейно независимы между собой, так как наивысшие степени их вековых членов будут все различны.

Рассмотрим теперь общий случай, когда корень $\lambda=\lambda_0$ обращает все миноры определителя $\Delta(\lambda)$ до порядка $k-1$ включительно, не обращая в нуль по крайней мере одного из миноров порядка k. В этом случае первая из систем (2) определяет k линейно независимых решений для $A_{1,j}$, какие мы определим следующим образом.

Пусть $(x-\lambda_0)^{\mu_r}$ является множителем наивысшей степени для общего наибольшего делителя миноров порядка $r\ (r=1,\ldots,k)$. Рассматривая от этих миноров производные по λ и замечая, что они выражаются линейно через миноры на единицу высшего порядка, убеждаемся в существовании неравенств

$$\mu>\mu_1>\ldots>\mu_{k-1}>\mu_k=0$$

где μ обозначает кратность корня $\lambda=\lambda_0$ для характеристического определителя $\Delta(\lambda)$.

Среди миноров порядка r выделим минор (со знаком)

$$\Delta_{i_1,\ldots,i_r;\,j_1,\ldots,j_r}$$

получающийся последовательным $(s=1,\ldots,r)$ вычеркиванием строк i_s и колонок j_s из определителя $\Delta(\lambda)$, такой, чтобы он имел $\lambda=\lambda_0$ корнем точно кратности μ_r, а минор $\Delta_{i_1,\ldots,i_{r-1},\,j_1,\ldots,j_{r-1}}$ имел $\lambda=\lambda_0$ корнем кратности μ_{r-1}; причем $r=1,\ldots,k$.

Не фиксируя значения λ, составим полиномы

$$A_{1,j_s}=\frac{\Delta_{i_1,\ldots,i_r,\,j_1,\ldots,j_{r-1},j_s}}{(\lambda-\lambda_0)^{\mu_r}}\qquad (s=r,\ldots,n) \tag{6}$$

среди которых по крайней мере один A_{1,j_r} не уничтожается при $\lambda=\lambda_0$. Не вошедшие в это определение $A_{1,j_1},\ldots,A_{1,j_{r-1}}$ положим равными нулю. Полиномы $A_{k,j}$ определим при этом согласно прежней формуле (4).

Определенные таким образом полиномы A_{1,j_s} подставим в левые части первой из систем (2)

$$\sum_j(p_{ij}-\delta_{ij}\lambda)A_{ij}=\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{\mu_r}}\sum_{j_s}(p_{ij_s}-\delta_{ij_s}\lambda)\,\Delta_{i_2,\ldots,i_r,\,j_1,\ldots,j_{r-1},j_s}$$

Выражение это будет нулем при $i=i_k$, коль скоро $k>r$, так как оно будет при этом пропорционально минору с двумя одинаковыми строчками i_k и i_r, если их нумеровать по месту в $\Delta(\lambda)$. Если $k\leqslant r$, то, оставляя без выяснения знак, имеем

$$\sum_j(p_{i_kj}-\delta_{i_kj}\lambda)A_{1,j}=\pm\frac{\Delta_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_r;\,j_1,\ldots,j_{r-1}}}{(\lambda-\lambda_0)^{\mu_r}} \tag{7}$$

Согласно выбору $\Delta_{i_1,\ldots,j_1};\ j_1,\ldots,j_r$ в правой части этого соотношения стоит полином от λ, имеющий $\lambda=\lambda_0$ корнем кратности по крайней мере не меньшей $\mu_{r-1}-\mu_r$, если $k<r$, и точно равной $\mu_{r-1}-\mu_r$ если $k=r$.

Стало быть принятыми выражениями $A_{1,j}$ в первой из систем (2) все уравнения $i=i_k$ будут удовлетворяться тождественно независимо от значений λ, если $k>r$, а уравнения при $k=1,\ldots,r$ будут удовлетворены согласно последнему соотношению, если положим $\lambda=\lambda_0$.

Дифференцируя по λ тождественно удовлетворенные полиномами A_{ij} уравнения $i=i_k$, $k>r$ первой из систем (2), замечаем, что при определенных формулами (4) $A_{k,j}$ будут удовлетворены все подобные уравнения $(i=i_k,\ k>r)$ всякой из систем (2) независимо от значений λ. Правые части соотношений (7) при $i=i_k$, $k\leqslant r$ имеют $\lambda=\lambda_0$ корнем кратности во всяком случае не ниже $\mu_{r-1}-\mu_2$, то значения всех производных от этих выражений до порядка $\mu_{r-1}-\mu_2-1$ включительно будут равны нулю при $\lambda=\lambda_0$; а это согласно (4) означает, что уравнения $i=i_k$, $k<r$ первой, второй, ..., $(\mu_{r-1}-\mu_r)$-ой системы (2) будут удовлетворяться значениями полиномов A_{kj} при $\lambda=\lambda_0$ Система же $(\mu_{r-1}-\mu_r+1)$-ая не будет удовлетворяться по меньшей мере в ее $i=i_r$-ом уравнении, так как $(\mu_{r-1}-\mu_2)$-я производная от

$$\frac{\Delta_{i_1,\ldots,i_{r-1},\,j_1,\ldots,j_{r-1}}}{(\lambda-\lambda_0)^{\mu_2}}$$

отлична от нуля при $\lambda=\lambda_0$.

Итак, полиномы $A_{k,j}$ при $\lambda=\lambda_0$ удовлетворяют $\mu_{r-1}-\mu_2$ системам (2); следовательно, наивысшая степень m будет при этом $m=\mu_{r-1}-\mu_r-1$.

Применяя этот прием к минорам порядка $r=1, \ldots, k$, получим k частных решений с наивысшими степенями вековых членов $m=\mu_{r-1}-\mu_r-1$. Каждое из этих решений, как было замечено ранее, дает $\mu_{r-1}-\mu_r$ производных решений путем дифференцирования по t полиномов, стоящих множителями при $\exp\lambda_0 t$.

Таким путем для корня $\lambda=\lambda_0$ кратности μ найдено k групп решений $(r=1, \ldots, k)$, каждое из которых состоит из $\mu_{r-1}-\mu_r$ решений[1]. Общее число найденных частных решений равно кратности корня

$$\sum_{r=1}^{k}(\mu_{r-1}-\mu_2)=\mu$$

Полученные решения линейно независимы между собой. В самом деле, мы видели, что решения какой-либо отдельной группы между собой линейно независимы, так как имеют различные наивысшие степени t в своих вековых членах. Мы предположили, что цепочка исходных миноров

$$\Delta_{i_1,\ldots,i_r j_1,\ldots,j_r}$$

определяется какими-либо одинаковыми индексами при $r=1, \ldots, k$. Переменное x_{i_1} (6), входя во все решения группы, отвечающей минору $r=1$, будет нулем по определению для всех других групп частных решений. Поэтому, если существует какая-либо линейная зависимость между какими-то найденными решениями, то в последних не может находиться переменная x_{i_1}, а тем самым и ни одного решения из группы $r=1$. Подобными соображениями можно показать, что если в линейную зависимость не входят решения из групп $r=1, \ldots, s-1$, то в нее не сможет входить также ни одно из решений группы $r=s$, так как при таких предположениях не может быть линейной зависимости в переменной x_{i_s}, ибо x_{i_s} не входит в группы $r>s$. Математическая индукция доказывает линейную независимость всех μ частных решений для корня $\lambda=\lambda_0$.

Рассматривая теперь все различные и неодинаковые корни характеристического уравнения, мы получим указанным приемом систему из n частных решений, линейная независимость которых очевидна, если после доказанного обратить внимание на различие множителей $\exp\lambda t$.

Можно заметить, что рассмотренный прием вычисления частных решений позволяет способом Ляпунова [1] определить нормальные или канонические переменные для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Поступила в редакцию
20 XII 1945

N. G. ČETAJEV. — CALCULATION OE PARTICULAR SOLUTIONS FOR SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

The work presents a procedure which, by means of the Liapounoff method, makes it possible to find normal or canonic variables for systems of linear differential equations with constant coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движений, Харьков. 1892. n° 18.

[1] Разности $\mu_{r-1}-\mu_r$, где $r=1, \ldots, k$, равны степеням элементарных делителей $\Delta(\lambda)$, отвечающим корню $\lambda=\lambda_0$.