Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946.

О НОРМАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Б. В. Булгаков

(Москва)

§ 1. Постановка задачи. Мы рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(D)\, x_k = y_j(t) \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{1.1}$$

где D — дифференциальный оператор d/dt, а x_k обозначают неизвестные функции независимого переменного t; $f_{jk}(D)$ и $y_j(t)$ — заданные функции своих аргументов, причем $f_{jk}(D)$ являются просто полиномами любых конечных степеней с постоянными коэффициентами. Это есть наиболее общая форма линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, изучавшаяся, например, Раусом [1] и Айнсом [2]. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы построить и фактически произвести преобразование к нормальным координатам для этой формы (см. ниже уравнения 3.9). Это еще не сделано, хотя общие условия существования нормальных координат известны. Чтобы вычисления были возможно проще, нужно исходить непосредственно из данных уравнений, а не из эквивалентной системы первого порядка.

Полученное преобразование применяется нами также в случае, когда в правых частях вместо $y_j(t)$ стоят какие-нибудь функции, вообще нелинейные, и зависящие не только от t, но и от неизвестных x_k и их производных.

В частности, для канонической системы рассматриваемое преобразование совпадает с тем, которое изучалось Ляпуновым [3], Бромуичем и Уиттекером [4], а также Биркгоффом [5], главным образом в связи с астрономическими вопросами. Задача, поставленная здесь, имеет значение для других приложений, так же как и более частная ее форма, затронутая автором ранее [6].

§ 2. Вариация постоянных в линейной системе типа Рауса-Айнса. Предположим: а) что определитель $\Delta(D)$ операционной матрицы

$$f(D) = \| f_{jk}(D) \| \tag{2.1}$$

не равен тождественно нулю и б) что все элементарные делители линейны. Дальнейшие допущения потребуются лишь при переходе к нелинейным системам.

Вводя матрицы-столбцы

$$x = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{matrix} \right\|, \qquad y(t) = \left\| \begin{matrix} y_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(t) \end{matrix} \right\| \tag{2.2}$$

представим систему (1.1) в виде одного матричного уравнения

$$f(D)\,x = y(t) \tag{2.3}$$

причем произведение матриц определяется обычным образом [7].

Пусть будут λ_ν ($\nu = 1, \ldots, N$) различные между собой корни характеристического уравнения $\Delta(D) = 0$ и q_ν степени их кратности. Обозначая через $F_{jk}(D)$ алгебраическое дополнение элемента $f_{jk}(D)$ в $\Delta(D)$, введем присоединенную матрицу

$$F(D) = \| F_{kj}(D) \| \tag{2.4}$$

т. е. транспонированную по отношению к матрице алгебраических дополнений $F_{jk}(D)$. Вследствие линейности элементарных делителей $F(D)$ делится на $(D - \lambda_\nu)^{q_\nu - 1}$, а потому исчезает при $D = \lambda_\nu$ вместе с производными до $(q_\nu - 2)$-го порядка:

$$F(\lambda_\nu) = F^{(1)}(\lambda_\nu) = \ldots = F^{(q_\nu - 2)}(\lambda_\nu) = 0 \tag{2.5}$$

Если r_ν есть ранг матрицы $F^{(q_\nu - 1)}(\lambda_\nu)$, то она имеет r_ν линейно независимых столбцов, которые мы будем рассматривать как отдельные матрицы

$$X_{\nu\sigma} = \left\| \begin{matrix} X_1^{(\nu\sigma)} \\ \vdots \\ X_n^{(\nu\sigma)} \end{matrix} \right\| \tag{2.6}$$

причем $\sigma = 1, \ldots, r_\nu$; вводя, кроме того, r_ν линейно независимых строк

$$B_{\nu\sigma} = \| B_1^{(\nu\sigma)}, \ldots, B_n^{(\nu\sigma)} \| \tag{2.7}$$

можем написать

$$F^{(q_\nu - 1)}(\lambda_\nu) = \left\| \begin{matrix} \sum\limits_{\sigma=1}^{r_\nu} X_1^{(\nu\sigma)} B_1^{(\nu\sigma)} & \ldots & \sum\limits_{\sigma=1}^{r_\nu} X_1^{(\nu\sigma)} B_n^{(\nu\sigma)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{\sigma=1}^{r_\nu} X_n^{(\nu\sigma)} B_1^{(\nu\sigma)} & \ldots & \sum\limits_{\sigma=1}^{r_\nu} X_n^{(\nu\sigma)} B_n^{(\nu\sigma)} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{r_\nu} \left\| \begin{matrix} X_1^{(\nu\sigma)} B_1^{(\nu\sigma)} & \ldots & X_1^{(\nu\sigma)} B_n^{(\nu\sigma)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_n^{(\nu\sigma)} B_1^{(\nu\sigma)} & \ldots & X_n^{(\nu\sigma)} B_n^{(\nu\sigma)} \end{matrix} \right\| = \sum_{\sigma=1}^{r_\nu} X_{\nu\sigma} B_{\nu\sigma} \tag{2.8}$$

Известно [8], что $r_\nu = q_\nu$, но мы можем пока не пользоваться этим соотношением, так как выведем его в дальнейшем.

Переходим к построению удобной формы решения системы (2.3). Обозначая через E единичную матрицу n-го порядка, будем исходить из известного соотношения

$$f(D)\,F(D) = \Delta(D)\,E$$

которое мы продифференцируем $q_\nu - 1$ раз по D, и положим затем $D = \lambda_\nu$; принимая во внимание (2.5), получим

$$f(\lambda_\nu)\,F^{(q_\nu - 1)}(\lambda_\nu) = 0$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(\lambda_\nu) F_{lk}^{(q_\nu-1)}(\lambda_\nu) = \sum_{k=1}^{n} f_{jk}(\lambda_\nu) \sum_{\sigma=1}^{r_\nu} X_k^{(\nu\sigma)} B_l^{(\nu\sigma)} = 0$$

или же

$$\sum_{\sigma=1}^{r_\nu} B_l^{(\nu\sigma)} g_j^{(\nu\sigma)} = 0 \qquad \left(g_j^{(\nu\sigma)} = \sum_{k=1}^{n} f_{jk}(\lambda_\nu) X_k^{(\nu\sigma)}\right) \tag{2.9}$$

Если зафиксировать ν, j и положить $l = 1, \ldots, n$, то (2.9) будет системой n соотношений, линейных относительно $g_j^{(\nu\sigma)}$, в которых матрица коэффициентов $B_l^{(\nu\sigma)}$ образована строкам $B_{\nu 1}, \ldots, B_{\nu r_\nu}$, превращенными в столбцы. Так как эти последние линейно независимы, то множители $g_j^{(\nu 1)}, \ldots, g_j^{(\nu r_\nu)}$ должны исчезать и таким образом столбцы $X_{\nu\sigma}$ удовлетворяют соотношениям $f(\lambda_\nu) X_{\nu\sigma} = 0$. Отсюда следует, что столбцы $X_{\nu\sigma} \exp \lambda_\nu t$ и сумма

$$\alpha(t) = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\sigma=1}^{r_\nu} X_{\nu\sigma} G_{\nu\sigma} \exp \lambda_\nu t \tag{2.10}$$

с произвольными постоянными $G_{\nu\sigma}$ — решения однородной системы $f(D)x = 0$.

Частное решение неоднородной системы может быть сразу написано в символической форме

$$f^{-1}(D)\, y(t) = \frac{F(D)}{\Delta(D)}\, y(t) = S(D)\, y(t) + \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\rho=1}^{q_\nu} \frac{H_{\nu\rho}}{(D-\lambda_\nu)^\rho}\, y(t)$$

где

$$S(D) = \text{целая часть } \frac{F(D)}{\Delta(D)}, \qquad H_{\nu\rho} = \frac{1}{(q_\nu-\rho)!} \left[\frac{d^{q_\nu-\rho}}{dD^{q_\nu-\rho}} \frac{F(D)(D-\lambda_\nu)^{q_\nu}}{\Delta(D)}\right]_{D=\lambda_\nu}$$
$$(\rho = 1, \ldots, q_\nu) \tag{2.11}$$

Вследствие (2.5) последние формулы приводятся к следующим:

$$H_{\nu 1} = \frac{1}{(q_\nu-1)!} F^{(q_\nu-1)}(\lambda_\nu) \left[\frac{(D-\lambda_\nu)^{q_\nu}}{\Delta(D)}\right]_{D=\lambda_\nu}, \qquad H_{\nu 2} = \ldots = H_{\nu q_\nu} = 0$$

и рассматриваемое частное решение принимает вид

$$S(D)\, y(t) + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{(q_\nu-1)!} F^{(q_\nu-1)}(\lambda_\nu) \left[\frac{(D-\lambda_\nu)^{q_\nu}}{\Delta(D)}\right]_{D=\lambda_\nu} \frac{1}{D-\lambda_\nu}\, y(t) =$$
$$= S(D)\, y(t) + \int_0^t \beta(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

где

$$\beta(t) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\exp \lambda_\nu t}{(q_\nu-1)!} F^{(q_\nu-1)}(\lambda_\nu) \left[\frac{(D-\lambda_\nu)^{q_\nu}}{\Delta(D)}\right]_{D=\lambda_\nu} \tag{2.12}$$

Таким образом имеем решение

$$x = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\sigma=}^{r_\nu} X_{\nu\sigma} G_{\nu\sigma} \exp \lambda_\nu t + S\;(D)\, y(t) + \int^t \beta(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau \tag{2.13}$$

с произвольными постоянными $G_{\nu\sigma}$; однако еще предстоит показать, что оно — общее.

С этой целью воспользуемся другой формой решения, полученной в нашем предшествующем сообщении[9] с помощью «определенного» оператора Хевисайда и Карсона. Будем кратко обозначать эту работу ОР (операционные решения). Уравнения (1.1), (2.3) получаются из ОР (2), ОР (3), если входящие туда целое число r и матрицу $g(D)$ сделать равными соответственно n и E. Тогда матричный полином $Q(p)$ в ОР (10), ОР (11) исчезает и решение дается уравнением ОР (25), а именно

$$x=\alpha(t)+S(D)\,y(t)+\int_0^t \beta(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau \qquad (2.14)$$

Формула ОР (18) для $\alpha(t)$ вследствие (2.5) принимает вид

$$\alpha(t)=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\exp\lambda_\nu t}{(q_\nu-1)!}F^{(q_\nu-1)}(\lambda_\nu)\left[\frac{P(D)(D-\lambda_\nu)^{q_\nu}}{\Delta(D)}\right]_{D=\lambda_\nu} \qquad (2.15)$$

$S(D)$ и $\beta(t)$ имеют те же значения, что и выше, а матрица-столбец $P(D)$ определяется формулой ОР (7).

Обозначая через m_j порядок старшей производной от x_j, встречающейся в уравнениях, а через $\bar{f_v}_{,jk}(D)$ элементы квадратных матриц $\bar{f_v}(D)$ в правой части формулы ОР (7), получаем из нее следующие выражения для элементов матрицы $P(D)$:

$$P_j(D)=\sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{1}{D}\bar{f}_{0,jk}(D)\,x_k(0)+$$

$$+\frac{1}{D^2}\bar{f}_{1,jk}(D)\,\dot{x}_k(0)+\ldots+\frac{1}{D^{m_k}}\bar{f}_{m_k-1,jk}(D)\overset{m_k-1}{x}(0)\Big] \qquad (2.16)$$

Отсюда видно, что $\alpha(t)$ зависит через посредство $P(D)$ от начальных значений функций

$$\overset{m_1-1}{x_1},\ \ldots,\ \dot{x}_1,\ x_1,\quad \overset{m_2-1}{x_2},\ \ldots,\ \dot{x}_n,\ x_n \qquad (2.17)$$

число которых равно

$$M=\sum_{j=1}^{n}m_j \qquad (2.18)$$

мы будем для краткости именовать их M-функциями.

При сделанных нами весьма общих предположениях может случиться, что начальные значения M-функций не вполне произвольны, а связаны некоторыми условиями, природа которых будет выяснена в конце § 3. Поэтому формулы (2.14) верны только в том случае, когда действительно существует решение с принятыми нами начальными значениями. Это заведомо имеет место, если решение получено из (2.13) для какой-нибудь определенной системы постоянных G, а начальные значения вычислены из этого решения. Тогда, сравнивая (2.10) и (2.15) и пользуясь (2.8):

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\sigma=1}^{r_\nu}X_{\nu\sigma}\left\{G_{\nu\sigma}-\frac{B_{\nu\sigma}}{(q_\nu-1)!}\left[\frac{P(D)(D-\lambda_\nu)^{q_\nu}}{\Delta(D)}\right]_{D=\lambda_\nu}\right\}\exp\lambda_\nu t=0$$

так как корни λ_ν различны, то мы должны иметь также для каждого ν

$$\sum_{\sigma=1}^{r_\nu} X_{\nu\sigma}\left\{G_{\nu\sigma}-\frac{B_{\nu\sigma}}{(q_\nu-1)!}\left[\frac{P(D)(D-\lambda_\nu)^{q_\nu}}{\Delta(D)}\right]_{D=\lambda_\nu}\right\}=0$$

а из линейной независимости столбцов $X_{\nu1}, \ldots, X_{\nu r_\nu}$ вытекает, что в отдельности равны 0 выражения в фигурных скобках, или

$$G_{\nu\sigma}=\frac{B_{\nu\sigma}}{(q_\nu-1)!}\left[\frac{P(D)(D-\lambda_\nu)^{q_\nu}}{\Delta(D)}\right]_{D=\lambda_\nu} \tag{2.19}$$

С другой стороны, любая $x(t)$, удовлетворяющая заданным уравнениям, может быть выражена в форме (2.14), а следовательно, получена из (2.13), если взять постоянные G, вычисленные по формуле (2.19) с помощью начальных значений, соответствующих рассматриваемому частному решению.

Таким образом формула (2.13) действительно дает общее решение, а соотношение (2.19) верно для каждого частного решения, получаемого с помощью каких-либо определенных постоянных G, и для соответствующих начальных значений. Принимая во внимание теорему Кристэла [10] о приведении к эквивалентной треугольной системе, заключаем, что $r_\nu=q_\nu$ и тогда число постоянных G оказывается равным порядку системы, т. е. степени $Q=\sum q_\nu$ ее характеристического уравнения.

Добавим, что правая часть каждой формулы (2.19) как произведение матрицы-строки $B_{\nu\sigma}$ на матрицу-столбец представляет собой матрицу с одной строкой и одним столбцом; иными словами, это есть скаляр, как мы и должны были ожидать.

Чтобы выразить решение в действительной форме, введем вместо λ специальные обозначения $\varkappa_g$ $(g=1, \ldots, N')$ для действительных корней и $\varepsilon_h \pm i\omega_h$ $(h=N'+1, \ldots, N'+N'')$ для пар комплексных. Развертывая произведения матриц, о которых только что была речь, получаем выражения для постоянных, соответствующих корням $\varkappa_g$, $\varepsilon_h+i\omega_h$:

$$\begin{gathered}
G_{g\sigma}=\frac{1}{(q_g-1)!}\sum_{k=1}^{n} B_k^{(g\sigma)}\left[\frac{P_k(D)(D-\varkappa_g)^{q_g}}{\Delta(D)}\right]_{D=\varkappa_g}\\
G_{h\sigma}=\frac{1}{2}(G_{h\sigma}'-iG_{h\sigma}'')=\frac{1}{(q_h-1)!}\sum_{k=1}^{n} B_k^{(h\sigma)}\left[\frac{P_k(D)(D-\varepsilon_h-i\omega_h)^{q_h}}{\Delta(D)}\right]_{D=\varepsilon_h+i\omega_h}
\end{gathered} \tag{2.20}$$

Мы обозначили здесь через $G_{h\sigma}'$, $G_{h\sigma}''$ удвоенную действительную и мнимую части комплексной постоянной $\overline{G}_{h\sigma}=\frac{1}{2}(G_{h\sigma}'+iG_{h\sigma}'')$, сопряженной $G_{h\sigma}$ и соответствующей корню $\varepsilon_h-i\omega_h$.

Пусть будут $\overset{v}{\alpha}(t)$, $\overset{v}{\beta}(t)$ производные от $\alpha(t)$, $\beta(t)$ по t, а $C_{h\sigma}$ — матрицы, аналогичные $X_{g\sigma}$, но соответствующие комплексным корням. Тогда с помощью (2.10) находим

$$\overset{v}{\alpha}(t)=\sum_{g=1}^{N'}\sum_{\sigma=1}^{q_g} X_{g\sigma}\varkappa_g^{v}G_{g\sigma}\exp\varkappa_g t+$$

$$+\sum_{h=N'+1}^{N'+N''}\sum_{\sigma=1}^{q_h}\left[C_{h\sigma}(\varepsilon_h+i\omega_h)^v G_{h\sigma}\exp(\varepsilon_h+i\omega_h)t+\overline{C}_{h\sigma}(\varepsilon_h-i\omega_h)^v\overline{G}_{h\sigma}\exp(\varepsilon_h-i\omega_h)t\right]$$

причем черточки над буквами применяются опять для обозначения сопряженных комплексных величин; мы можем написать также

$$\overset{v}{\alpha}(t)=\sum_{g=1}^{N'}\sum_{\sigma=1}^{q_g} X_{g\sigma}\varkappa_g^{\,v} G_{g\sigma}\exp\varkappa_g t+$$

$$+2\sum_{h=N'+1}^{N'+N''}\sum_{\sigma=1}^{q_h}\exp\varepsilon_h t\quad\mathrm{Re}\left[C_{h\sigma}(\varepsilon_h+i\omega_h)^v G_{h\sigma}\exp i\omega_h t\right] \tag{2.21}$$

и аналогичным образом из (2.8), (2.12)

$$\int_0^t\overset{v}{\beta}(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau=\sum_{g=1}^{N'}\sum_{\sigma=1}^{q_g} X_{g\sigma}\varkappa_g^{\,v} K_{g\sigma}\exp\varkappa_g t+$$

$$+2\sum_{h=N'+1}^{N'+N''}\sum_{\sigma=1}^{q_h}\exp\varepsilon_h t\,\mathrm{Re}\left[C_{h\sigma}(\varepsilon_h+i\omega_h)^v K_{h\sigma}\exp i\omega_h t\right] \tag{2.22}$$

где

$$K_{g\sigma}=\frac{1}{(q_g-1)!}\left[\frac{(D-\varkappa_g)^{q_g}}{\Delta(D)}\right]_{D=\varkappa_g}\sum_{k=1}^{n}B_k^{(g\sigma)}\int_0^t y_k(\tau)\exp(-\varkappa_g\tau)\,d\tau$$

$$K_{h\sigma}=\frac{1}{(q_h-1)!}\left[\frac{(D-\varepsilon_h-i\omega_h)^{q_h}}{\Delta(D)}\right]_{D=\varepsilon_h+i\omega_h}\sum_{k=1}^{n}B_k^{(h\sigma)}\int_0^t y_k(\tau)\exp(-\varepsilon_h-i\omega_h)\,\tau\,d\tau \tag{2.23}$$

Формулы, подобные (2.21), (2.22), но содержащие сами матрицы $\alpha(t)$, $\beta(t)$, а не их производные, получаются, если взять $v=0$ и положить $\overset{0}{\alpha}(t)=\alpha(t)$, $\overset{0}{\beta}(t)=\beta(t)$.

Кроме неизвестной x, нам понадобятся также выражения ее производных, которые могут быть написаны в виде

$$\overset{v}{x}=\overset{v}{\alpha}(t)+S^{(v)}(D)\,y(t)+\int_0^t\overset{v}{\beta}(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau \tag{2.24}$$

причем

$$S^{(v)}(D)=D^vS(D)+\beta(0)\,D^{v-1}+\dot{\beta}(0)\,D^{v-2}+\ldots+\overset{v-1}{\beta}(0) \tag{2.25}$$

для постоянных $\overset{v}{\beta}(0)$ с помощью (2.12) получаются выражения

$$\overset{v}{\beta}(0)=\sum_{g=1}^{N'}\sum_{\sigma=1}^{q_g}\frac{1}{(q_g-1)!}X_{g\sigma}B_{g\sigma}\left[\frac{D^v(D-\varkappa_g)^{q_g}}{\Delta(D)}\right]_{D=\varkappa_g}+$$

$$+\sum_{h=N'+1}^{N'+N''}\sum_{\sigma=1}^{q_h}\frac{2}{(q_h-1)!}\mathrm{Re}C_{h\sigma}B_{h\sigma}\left[\frac{D^v(D-\varepsilon_h-i\omega_h)^{q_h}}{\Delta(D)}\right]_{D=\varepsilon_h+i\omega_h} \tag{2.26}$$

Пользуясь формулами (2.21), (2.22) и полагая

$$\varepsilon_h+i\omega_h=c_h\exp i\zeta_h \tag{2.27}$$

$$G_{g\sigma}+K_{g\sigma}=A_{g\sigma},\qquad G_{h\sigma}+K_{h\sigma}=\frac{1}{2}A_{h\sigma}\exp i\vartheta_{h\sigma} \tag{2.28}$$

находим

$$\overset{v}{x} = S^{(v)}(D)\, y(t) + \sum_{g=1}^{N'} \sum_{\sigma=1}^{q_g} X_{g\sigma} \varkappa_g{}^v A_{g\sigma} \exp \varkappa_g t +$$

$$+ \sum_{h=N'+1}^{N'+N''} \sum_{\sigma=1}^{q_h} \exp \varepsilon_h t \operatorname{Re} \left[C_{h\sigma} c_h{}^v A_{h\sigma} \exp i (\omega_h t + \theta_{h\sigma} + v\zeta_h) \right] \tag{2.29}$$

Если условиться, что $\overset{0}{x} = x$, $S^{(0)}(D) = S(D)$, то отсюда при $v = 0$ получается выражение самого неизвестного x.

Применяя, как и выше, обозначения $X_j{}^{(g\sigma)}$ и аналогичные обозначения $C_j{}^{(h\sigma)}$ для элементов столбцов $C_{h\sigma}$, положим

$$X_j{}^{(g\sigma)} \varkappa_g{}^v = X_{jv}{}^{(g\sigma)}, \qquad C_j{}^{(h\sigma)} = N_j{}^{(h\sigma)} \exp i\gamma_j{}^{(h\sigma)} = X_j{}^{(h\sigma)} + iY_j{}^{(h\sigma)}$$

$$N_j{}^{(h\sigma)} c_h{}^v = N_{jv}{}^{(h\sigma)} \tag{2.30}$$

Тогда для элементов столбцов $\overset{v}{x}$ получаются следующие выражения:

$$\overset{v}{x}_j = \sum_{k=1}^{n} S_{jk}{}^{(v)}(D)\, y_k(t) + \sum_{g=1}^{N'} \sum_{\sigma=1}^{q_g} X_{jv}{}^{(g\sigma)} A_{g\sigma} \exp \varkappa_g t +$$

$$+ \sum_{h=N'+1}^{N'+N''} \sum_{\sigma=1}^{q_h} N_{jv}{}^{(h\sigma)} A_{h\sigma} \exp \varepsilon_h t \cos (\omega_h t + \theta_{h\sigma} + \gamma_j{}^{(h\sigma)} + v\zeta_h) \tag{2.31}$$

при этом достаточно будет при данном j давать индексу v значения

$$v = 0,\ 1,\ \ldots,\ m_j' \tag{2.32}$$

где m_j' равно наибольшему из чисел 0 и $m_j - 1$ или им обоим, если $m_j = 1$.

Пусть будет e число тех m_j, которые равны нулю, если такие существуют. Так как для них мы имеем $m_j - 1 = -1 < 0$, то соответствующие «e-координаты» не принадлежат к M-функциям и будут рассматриваться как свои собственные «старшие производные». Тогда можно сказать, что $M + e$ формул (2.31) вместе с (2.32) определяют все M-функции и e-координаты в зависимости от t. Имея в виду последующее применение к нелинейным системам, продифференцируем соотношения (2.28) и подставим вместо $K_{g\sigma}$, $K_{h\sigma}$ их выражения (2.23); применяя введенные выше обозначения для действительных и комплексных корней, получим

$$\frac{dA_{g\sigma}}{dt} = \frac{1}{(q_g - 1)!} \left[\frac{(D - \varkappa_g)^{q_g}}{\Delta(D)} \right]_{D=\varkappa_g} \exp(-\varkappa_g t) \sum_{k=1}^{n} B_k{}^{(g\sigma)} y_k(t) \qquad \begin{pmatrix} g = 1, \ldots, N' \\ \sigma = 1, \ldots, q_g \end{pmatrix}$$

$$\frac{dA_{h\sigma}}{dt} + iA_{h\sigma} \frac{d\theta_{h\sigma}}{dt} = \tag{2.33}$$

$$= \frac{2}{(q_h - 1)!} \left[\frac{(D - \varepsilon_h - i\omega_h)^{q_h}}{\Delta(D)} \right]_{D=\varepsilon_h+i\omega_h} \exp[-\varepsilon_h t - i(\omega_h t + \theta_{h\sigma})] \sum_{k=1}^{n} B_k{}^{(h\sigma)} y_k(t)$$

$$(h = N' + 1, \ldots, N' + N''; \ \sigma = 1, \ldots, q_h)$$

С точностью до постоянных интеграции эти уравнения также определяют величины $A_{g\sigma}$, $A_{h\sigma}$, $\theta_{h\sigma}$, число которых есть

$$Q = \sum_{g=1}^{N'} q_g + 2 \sum_{h=N'+1}^{N'+N''} q_h \tag{2.34}$$

В случае однородной системы производные этих величин равны нулю; таким образом (2.33) суть уравнения вариации постоянных для линейной системы вида (1.1)

§ 3. Нормальные координаты. Введем вместо $A_{g\sigma}$, $A_{h\sigma}$, $\theta_{h\sigma}$ две серии новых переменных: амплитуды

$$\xi_{g\sigma} = A_{g\sigma} \exp \varkappa_g t, \qquad a_{h\sigma} = A_{h\sigma} \exp \varepsilon_h t \tag{3.1}$$

и угловые переменные

$$u_{h\sigma} = \omega_h t + \theta_{h\sigma} \tag{3.2}$$

Подставляя в (2.31), получаем формулы

$$\overset{v}{x}_j = \sum_{k=1}^{n} S_{jk}^{(v)}(D)\, y_k(t) + \sum_{g=1}^{N'} \sum_{\sigma=1}^{q_g} X_{jv}^{(g\sigma)} \xi_{g\sigma} +$$

$$+ \sum_{h=N'+1}^{N'+N''} \sum_{\sigma=1}^{q_h} N_{jv}^{(h\sigma)} a_{h\sigma} \cos\left(u_{h\sigma} + \gamma_j^{(h\sigma)} + v\zeta_h\right) \qquad (v = 0,\ 1,\ \ldots,\ m_j') \tag{3.3}$$

определяющие преобразование к новым неизвестным; при этом

$$\frac{d\xi_{g\sigma}}{dt} = \left(\frac{dA_{g\sigma}}{dt} + \varkappa_g A_{g\sigma}\right) \exp \varkappa_g t = \varkappa_g \xi_{g\sigma} + \frac{dA_{g\sigma}}{dt} \exp \varkappa_g t$$

или с помощью первого уравнения (2.33)

$$\frac{d\xi_{g\sigma}}{dt} = \varkappa_g \xi_{g\sigma} + \frac{1}{(q_g - 1)!} \left[\frac{(D - \varkappa_g)^{q_g}}{\Delta(D)}\right]_{D=\varkappa_g} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(g\sigma)} y_k(t) \qquad \begin{pmatrix} g = 1, \ldots, N' \\ \sigma = 1, \ldots, q_g \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Аналогичным образом

$$\frac{da_{h\sigma}}{dt} + i a_{h\sigma} \frac{du_{h\sigma}}{dt} = \varepsilon_h a_{h\sigma} + \frac{dA_{h\sigma}}{dt} \exp \varepsilon_h t + i a_{h\sigma}\left(\omega_h + \frac{d\theta_{h\sigma}}{dt}\right) =$$

$$= (\varepsilon_h + i\omega_h) a_{h\sigma} + \exp \varepsilon_h t \left(\frac{dA_{h\sigma}}{dt} + i A_{h\sigma} \frac{d\theta_{h\sigma}}{dt}\right) \tag{3.5}$$

и, подставляя второе выражение (2.33) и отделяя действительную и мнимую части:

$$\frac{da_{h\sigma}}{t} = \varepsilon_h a_{h\sigma} + \frac{2}{(q_h - 1)!} \operatorname{Re} \left[\frac{(D - \varepsilon_h - i\omega_h)^{q_h}}{\Delta(D)}\right]_{D=\varepsilon_h + i\omega_h} \exp(-iu_{h\sigma}) \sum_{k=1}^{n} B_k^{(h\sigma)} y_k(t)$$

$$\tag{3.6}$$

$$\frac{du_{h\sigma}}{dt} = \omega_h + \frac{2}{(q_h - 1)!\, a_{h\sigma}} \operatorname{Im} \left[\frac{(D - \varepsilon_h - i\omega_h)^{q_h}}{\Delta(D)}\right]_{D=\varepsilon_h + i\omega_h} \exp(-iu_{h\sigma}) \sum_{k=1}^{n} B_k^{(h\sigma)} y_k(t)$$

$$(h = N' + 1, \ldots, N' + N''\,;\ \sigma = 1, \ldots, q_h)$$

Соотношения (3.4), (3.6) образуют систему Q уравнений относительно Q неизвестных $\xi_{g\sigma}$, $a_{h\sigma}$, $u_{h\sigma}$. Если ввести вместо $a_{h\sigma}$, $u_{h\sigma}$ переменные

$$\xi_{h\sigma} = a_{h\sigma}\cos u_{h\sigma}, \qquad \eta_{h\sigma} = -a_{h\sigma}\sin u_{h\sigma} \tag{3.7}$$

и положить

$$N_{jv}^{(h\sigma)}\cos(\gamma_j^{(h\sigma)} + v\zeta_h) = X_{jv}^{(h\sigma)}, \qquad N_{jv}^{(h\sigma)}\sin(\gamma_j^{(h\sigma)} + v\zeta_h) = Y_{jv}^{(h\sigma)} \tag{3.8}$$

то система формул (3.3) обращается в линейное преобразование с постоянными коэффициентами

$$\overset{v}{x_j} = \sum_{k=1}^{n} S_{jk}^{(v)}(D)\, y_k(t) + \sum_{g=1}^{N'}\sum_{\sigma=1}^{q_g} X_{jv}^{(g\sigma)}\xi_{g\sigma} +$$

$$+ \sum_{h=N'+1}^{N'+N''}\sum_{\sigma=1}^{q_h}(X_{jv}^{(h\sigma)}\xi_{h\sigma} + Y_{jv}^{(h\sigma)}\eta_{h\sigma}) \quad (v=0,\ 1, \ldots, m_j') \tag{3.9}$$

Чтобы получить уравнения для $\xi_{h\sigma}$, $\eta_{h\sigma}$, заметим, что согласно (3.5), (3.7)

$$\frac{d}{dt}(\xi_{h\sigma} - i\eta_{h\sigma}) = \frac{d}{dt}(a_{h\sigma}e^{iu_{h\sigma}}) = \exp(iu_{h\sigma})\left(\frac{da_{h\sigma}}{dt} + ia_{h\sigma}\frac{du_{h\sigma}}{dt}\right) =$$

$$= (\varepsilon_h + i\omega_h)(\xi_{h\sigma} - i\eta_{h\sigma}) + \exp[\varepsilon_h t + i(\omega_h t + \theta_{h\sigma})]\left(\frac{dA_{h\sigma}}{dt} + iA_{h\sigma}\frac{d\theta_{h\sigma}}{dt}\right)$$

отсюда, пользуясь вторым уравнением (2.33) и отделяя опять действительную и мнимую части:

$$\begin{gathered}\frac{d\xi_{h\sigma}}{dt} = \varepsilon_h\xi_{h\sigma} + \omega_h\eta_{h\sigma} + \frac{2}{(q_h-1)!}\operatorname{Re}\left[\frac{(D-\varepsilon_h-i\omega_h)^{q_h}}{\Delta(D)}\right]_{D=\varepsilon_h+i\omega_h}\sum_{k=1}^{n}B_k^{(h\sigma)}y_k(t)\\ \frac{d\eta_{h\sigma}}{dt} = \varepsilon_h\eta_{h\sigma} - \omega_h\xi_{h\sigma} - \frac{2}{(q_h-1)!}\operatorname{Im}\left[\frac{(D-\varepsilon_h-i\omega_h)^{q_h}}{\Delta(D)}\right]_{D=\varepsilon_h+i\omega_h}\sum_{k=1}^{n}B_k^{(h\sigma)}y_k(t)\\ (h=N'+1, \ldots, N'+N'';\ \sigma=1, \ldots, q_h)\end{gathered} \tag{3.10}$$

Величины $\xi_{g\sigma}$, $\xi_{h\sigma}$, $\eta_{h\sigma}$ суть нормальные координаты, так как преобразование (3.9) линейно, а уравнение (3.4), которому удовлетворяет какая-нибудь $\xi_{g\sigma}$, также линейно и не связано с другими, равно как и два уравнения (3.10), которым удовлетворяет какая-нибудь пара $\xi_{h\sigma}$, $\eta_{h\sigma}$.

Матрица X коэффициентов $X_{jv}^{(g\sigma)}$, $X_{jv}^{(h\sigma)}$, $Y_{jv}^{(h\sigma)}$ преобразования (3.9) содержит $M+e$ строк и $Q \leqslant M+e$ столбцов. Чтобы определить ее ранг, заметим, что согласно (2.20), (2.23), (2.28), (3.1), (3.2), (3.7),

$$(K_{g\sigma})_{t=0} = (K_{h\sigma})_{t=0} = 0, \qquad (A_{g\sigma})_{t=0} = G_{g\sigma}, \qquad (A_{h\sigma}\exp i\theta_{h\sigma})_{t=0} = G_{h\sigma}' - iG_{h\sigma}''$$

$$(\xi_{g\sigma})_{t=0} = (A_{g\sigma})_{t=0}, \qquad (\xi_{h\sigma} - i\eta_{h\sigma})_{t=0} = (a_{h\sigma}\exp iu_{h\sigma})_{t=0} = (A_{h\sigma}\exp i\theta_{h\sigma})_{t=0}$$

и, следовательно,

$$(\xi_{g\sigma})_{t=0} = G_{g\sigma}, \qquad (\xi_{h\sigma})_{t=0} = G_{h\sigma}', \qquad (\eta_{h\sigma})_{t=0} = G_{h\sigma}'' \tag{3.11}$$

Таким образом постоянные G суть начальные значения нормальных координат, и в случае однородной системы мы имеем выражения

$$\overset{v}{x}_j(0)=\sum_{g=1}^{N'}\sum_{\sigma=1}^{q_g} X_{jv}{}^{(g\sigma)}\,G_{g\sigma}+\sum_{h=N'+1}^{N'+N''}\sum_{\sigma=1}^{q_h}\left(X_{jv}{}^{(h\sigma)}\,G_{h\sigma}'+Y_{jv}{}^{(h\sigma)}G_{h\sigma}''\right) \tag{3.12}$$
$$(j=1,\ldots,n;\; v=0,\,1,\ldots,\,m_j')$$

Приравнивая их нулю, получаем $M+e$ однородных уравнений относительно постоянных G, и если бы ранг X был меньше Q, то можно было бы удовлетворить этим уравнениям такими величинами G, которые не все равны нулю. Но это противоречит выражениям (2.20) этих величин, которые вследствие (2.16) линейны и однородны относительно начальных значений M-функций, а потому должны исчезать вместе с ними. Отсюда следует, что матрица X имеет наибольший возможный ранг Q.

Рассматривая (3.9) как линейные алгебраические уравнения относительно нормальных координат, можем написать условия их совместности, которые будут линейны относительно $M+e$ разностей

$$\overset{v}{x}_j-\sum_{k=1}^{n} S_{jk}{}^{(v)}(D)\,y_k$$

так как ранг X равен Q, то число этих условий будет $M+e-Q$.

Иными словами, если $Q<M+e$, то M-функции и e-координаты должны удовлетворять $M+e-Q$ конечным линейным уравнениям с постоянными коэффициентами, содержащим также функции $y_j(t)$ и их производные, но не заключающим никаких произвольных постоянных. При учете этих уравнений преобразование к нормальным координатам может считаться обратимым. Тем же самым уравнениям должны удовлетворять, разумеется, и начальные значения.

Рассмотрим теперь частные случаи и прежде всего тот, когда определитель коэффициентов старших производных $D^{m_j}x_j$ и все числа m_j отличны от нуля. При этих условиях степень Q старшего члена характеристического уравнения равна M. С другой стороны, $e=0$ и $m_j'=m_j-1$ для каждого j. Поэтому $M+e=M=Q$. Система функций, определяемых формулами (3.9), сводится к M-функциям, не связанным какими-либо конечными уравнениями. Начальные значения независимы и, как нетрудно убедиться, все $S_{jk}{}^{(v)}(D)$ при $v=0,\,1,\,\ldots,\,m_j-1$ тождественно равны нулю. В самом деле, для однородной системы мы имеем при $t=0$ соотношения (3.12). Если заменить постоянные G их выражениями (2.20), то эти соотношения обращаются в тождества относительно начальных значений и должны поэтому оставаться верными и для неоднородной системы. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} S_{jk}(D_0)\,y_k(0)=\sum_{k=1}^{n} S_{jk}{}^{(1)}(D_0)\,y_k(0)=\ldots=\sum_{k=1}^{n} S_{jk}{}^{(m_j-1)}(D_0)\,y_k(0)=0$$

где $D_0=d/dt_0$ и эти условия должны выполняться при любых функциях $y_k(t)$. Следовательно,

$$S_{jk}(D)\equiv S_{jk}{}^{(1)}(D)\equiv\ldots\equiv S_{jk}{}^{(m_j-1)}(D)\equiv 0$$

как мы и утверждали выше. Таким образом в рассматриваемом случае формулы (2.31), (3.3), (3.9) для однородной и для неоднородной системы будут одни и те же.

Это вообще неверно, если определитель старших производных имеет дефект $\partial > 0$ и (или) $e > 0$, так как тогда $M + e > Q$ и между M-функциями и e-координатами существуют конечные соотношения.

Предположим сначала $\partial > 0$; это будет второй частный случай. Очевидно, что здесь можно составить ∂ линейных комбинаций данных уравнений, не содержащих старших производных, к которым причисляются и возможные e-координаты. Таким образом мы сразу получаем ∂ конечных уравнений относительно M-функций, в которые входят также и функции $y_j(t)$. Однако не следует думать, что не может быть и других таких уравнений, — это замечание не излишне, так как такого рода ошибка иногда делается [11]. Примером может служить система

$$(D^2 - 2D - 1)\, x_1 + (D - 1)\, x_2 = \dot{y}_1(t) \qquad (\mathrm{A}_1)$$

$$(D - 2)\, x_1 \qquad + x_2 \qquad = y_2(t) \qquad (\mathrm{A}_2)$$

для которой

$$\Delta(D) = D - 3\,, \qquad M = 3\,, \qquad \partial = 1\,, \qquad e = 0\,, \qquad Q = 1\,.$$

Здесь мы имеем два соотношения между M-функциями $\dot{x}_1$, x_1, x_2, а именно

$$x_1 + x_2 = -y_1(t) + \dot{y}_2(t)\,, \qquad \dot{x}_1 - 2x_1 + x_2 = y_2(t)$$

первое из них есть комбинация $-(A_1) + D(A_2)$, а второе совпадает с (A_2).

Конечные уравнения, о которых идет речь, остаются в силе и при $t = 0$. Таким образом заведомо существуют такие линейные соотношения, которые действительно содержат начальные значения M-функций и связывают их с начальными значениями функций $y_j(t)$ и вообще их производных. Прежнее рассуждение в отношении полиномов $S_{jk}^{(v)}(D)$ неприменимо, и они могут не быть все тождественно равны нулю.

В качестве третьего и последнего возможного случая рассмотрим тот, когда $\partial = 0$, но $e > 0$. Здесь опять $Q = M$ и система может быть алгебраически разрешена относительно старших производных, но e из получающихся при этом уравнений будут выражать e-координаты, трактуемые как «старшие производные» через M-функции. С помощью этих выражений можно исключить e-координаты из остальных $n - e$ уравнений. В полученной приведенной системе с $n - e$ неизвестными определитель старших производных попрежнему отличен от нуля, а e-координат нет, так что для нее $\partial' = e' = 0$ и $M + e' = M = Q$. Начальные значения M-функций вновь оказываются независимыми, и мы можем прежним способом доказать, что полиномы $S_{jk}^{(v)}(D)$ тождественно равны нулю за исключением, однако, тех $S_{jk}(D)$, у которых индекс j есть номер одной из e-координат. Эти последние полиномы не фигурируют в начальных условиях, а потому к ним доказательство неприменимо и они могут не быть все тождественно равны нулю.

§ 4. Уравнения нелинейной системы, выраженные в нормальной форме. Перейдем к рассмотрению системы

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(D)\, x_k = \varphi_j(x_1\,, \ldots, x_n\,, t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \qquad (4.1)$$

де $f_{jk}(D)$ — те же, что и раньше, а $\varphi_j(x_1\,, \ldots, x_n\,, t)$ суть данные функции своих аргументов, вообще нелинейные; они могут содержать также для некоторых или для всех k производные до $D^{m_k'} x_k$, которые не указаны, явно лишь с целью избежать усложнения обозначений. Будем предполагать, что определитель старших производных отличен от нуля и что исчезают все $S_{jk}(D)$, у которых j есть номер e-координаты, а k — номер функции ψ_k, не равной нулю. Мы можем и здесь применить преобразование (3.3), которое при сделанных предположениях принимает вид

$$\overset{v}{x_j} = \sum_{g=1}^{N'} \sum_{\sigma=1}^{q_g} X_{jv}^{(g\sigma)} \xi_{g\sigma} + \sum_{h=N'+1}^{N'+N''} \sum_{\sigma=1}^{q_h} N_{jv}^{(h\sigma)} a_{h\sigma} \cos (u_{h\sigma} + \gamma_j^{(h\sigma)} + v\zeta_h) \tag{4.2}$$

$$(j = 1, \ldots, n;\ v = 0, 1, \ldots, m_j')$$

нормальные координаты $\xi_{g\sigma}$, $a_{h\sigma}$, $u_{h\sigma}$, рассматриваемые как новые неизвестные, должны удовлетворять уравнениям, получаемым из (3.4), (3.6) путем замены функций $y_k(t)$ через $\psi_k(x_1, \ldots, x_n, t)$:

$$\frac{d\xi_{g\sigma}}{dt} = \varkappa_g \xi_{g\sigma} + \frac{1}{(q_g-1)!} \left[\frac{(D-\varkappa_g)^{q_g}}{\Delta(D)} \right]_{D=\varkappa_g} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(g\sigma)} \psi_k (x_1, \ldots, x_n, t)$$

$$(g = 1, \ldots, N',\ \sigma = 1, \ldots, q_g)$$

$$\frac{da_{h\sigma}}{dt} = \varepsilon_h a_{h\sigma} + \frac{2}{(q_h-1)!} \operatorname{Re} \left[\frac{(D-\varepsilon_h - i\omega_h)^{q_h}}{\Delta(D)} \right]_{D=\varepsilon_h+i\omega_h} \exp(-iu_{h\sigma}) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} B_k^{(h\sigma)} \psi_k (x_1, \ldots, x_n, t) \tag{4.3}$$

$$\frac{du_{h\sigma}}{dt} = \omega_h + \frac{2}{(q_h-1)!\, a_{h\sigma}} \operatorname{Im} \left[\frac{(D-\varepsilon_h - i\omega_h)^{q_h}}{\Delta(D)} \right]_{D=\varepsilon_h+i\omega_h} \exp(-iu_{h\sigma}) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} B_k^{(h\sigma)} \psi_k (x_1, \ldots, x_n, t)$$

$$(h = N'+1, \ldots, N'+N'',\ \sigma = 1, \ldots, q_h)$$

Величины x_k и их производные в правых частях нужно представлять себе замененными их выражениями (4.2).

Мы могли бы также применить преобразования (2.31) или (3.9), всякий раз вычеркивая члены, содержащие полиномы $S_{jk}^{(v)}(D)$.

Преобразованные уравнения могут быть применены для исследования возмущений, происходящих от функций $\psi_j(x_1, \ldots, x_n, t)$.

§ 5. Системы с нормальными координатами, вводимыми точечным преобразованием. Покажем, каким образом из предыдущего может быть выведено классическое, более узкое определение нормальных координат. С этой целью предположим, что операционные полиномы имеют вид

$$f_{jk}(D) = L_{jk} D^{\rho} + U_{jk} \qquad (j, k = 1, \ldots, n) \tag{5.1}$$

где ρ есть какое-нибудь целое число, а первая из двух квадратных матриц

$$L = \| L_{jk} \|, \qquad U = \| U_{jk} \| \tag{5.2}$$

предполагается неособой. Мы сохраняем также основное предположение, что все элементарные делители линейны. В этом случае разложения операционного определителя $\Delta(D)$ и алгебраических дополнений $F_{jk}(D)$ содержат лишь степени $D^{\rho}, D^{2\rho}, \ldots$ Характеристическое уравнение $\Delta(\varkappa)=0$ может быть выражено через новую неизвестную

$$\lambda = -\varkappa^{\rho} \tag{5.3}$$

Будем обозначать через λ_g $(g=1, \ldots, N)$ различные корни преобразованного таким образом уравнения и через q_g степени их кратности; каждому λ_g соответствует группа ρ корней

$$\varkappa_g{}^{(\alpha)} = \varkappa_g \eta_g{}^{(\alpha)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, \rho) \tag{5.4}$$

непреобразованного уравнения, причем $\varkappa_g$ есть арифметическое значение радикала $\sqrt[\rho]{|-\lambda_g|}$, а $\eta_g{}^{(1)}, \ldots, \eta_g{}^{(\rho)}$ суть корни ρ-ой степени из комплексного числа $-\lambda_g/(\varkappa_g)^{\rho}$, модуль которого равен единице.

Дифференцируя присоединенную матрицу, находим

$$F'(\varkappa) = \frac{dF}{d\lambda}(-\rho)\varkappa^{\rho-1}$$

$$F''(\varkappa) = \frac{d^2F}{d\lambda^2}(-\rho)^2\varkappa^{2(\rho-1)} - \frac{dF}{d\lambda}\rho(\rho-1)\varkappa^{\rho-2}$$

$$F'''(\varkappa) = \frac{d^3F}{d\lambda^3}(-\rho)^3\varkappa^{3(\rho-1)} + 3\frac{d^2F}{d\lambda^2}\rho^2(\rho-1)\varkappa^{2\rho-3} - \frac{dF}{d\lambda}\rho(\rho-1)(\rho-2)\varkappa^{\rho-3}$$

. . . .

$$F^{(q_g-1)}(\varkappa) = \frac{d^{q_g-1}F}{d\lambda^{q_g-1}}(-\rho)^{q_g-1}\varkappa^{(q_g-1)(\rho-1)} + \ldots$$

Принимая во внимание (2.5), получаем отсюда при $\varkappa = \varkappa_g{}^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, \ldots, \rho)$

$$\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_g} = \ldots = \left(\frac{d^{q_g-2}F}{d\lambda^{q_g-2}}\right)_{\lambda=\lambda_g} = 0$$

$$F^{(q_g-1)}(\varkappa_g{}^{(\alpha)}) = \left(\frac{d^{q_g-1}F}{d\lambda^{q_g-1}}\right)_{\lambda=\lambda_g}(-\rho)^{q_g-1}(\varkappa_g\eta_g{}^{(\alpha)})^{(q_g-1)(\rho-1)}$$

Матрица $(d^{q_g-1}F/d\lambda^{q_g-1})_{\lambda=\lambda_g}$ не зависит от α, а скалярный множитель $(-\rho)^{q_g-1}(\varkappa_g\eta_g{}^{(\alpha)})^{(q_g-1)(\rho-1)}$ не влияет на ранг. Поэтому эта матрица будет ранга q_g и может быть выражена в виде

$$\left(\frac{d^{q_g-1}F}{d\lambda^{q_g-1}}\right)_{\lambda=\lambda_g} = \sum_{\sigma=1}^{q_g} X_{g\sigma}B_{g\sigma} \tag{5.5}$$

где столбцы $X_{g\sigma}$ и строки $B_{g\sigma}$ не зависят от α. Полагая

$$B_{g\alpha\sigma} = B_{g\sigma}(-\rho)^{q_g-1}(\varkappa_g\eta_g{}^{(\alpha)})^{(q_g-1)(\rho-1)} \tag{5.6}$$

получим

$$F^{(q_g-1)}(\varkappa_g{}^{(\alpha)}) = \sum_{\sigma=1}^{q_g} X_{g\sigma}B_{g\alpha\sigma} \tag{5.7}$$

Мы не будем здесь выделять действительных и комплексных корней характеристического уравнения, сохраняя общее обозначение $\varkappa_g{}^{(\alpha)}$ $(g = 1, \ldots, N$

и $\alpha=1, \ldots, \rho$). Если еще $\xi_{g1}^{(\alpha)}, \ldots, \xi_{gq_g}^{(\alpha)}$ суть нормальные координаты, соответствующие корню $\varkappa_g^{(\alpha)}$, то, вспоминая, что столбцы $X_{g\sigma}$ не зависят от α, напишем (3.3) при $v=0$ в виде

$$x_j=\sum_{g=1}^{N}\sum_{\sigma=1}^{q_g} X_j^{(g\sigma)}\left(\xi_{g\sigma}^{(1)}+\ldots+\xi_{g\sigma}^{(\rho)}\right)$$

Полагая

$$\xi_{g\sigma}=\xi_{g\sigma}^{(1)}+\ldots+\xi_{g\sigma}^{(\rho)} \tag{5.8}$$

получим преобразование

$$x_j=\sum_{g=1}^{N}\sum_{\sigma=1}^{q_g} X_j^{(g\sigma)}\xi_{g\sigma} \tag{5.9}$$

В случае однородной системы уравнения типа (3.4) для группы координат $\xi_{g\sigma}^{(1)}, \ldots, \xi_{g\sigma}^{(\rho)}$ будут

$$\frac{d\xi_{g\sigma}^{(1)}}{dt}=\varkappa_g\eta_g^{(1)}\xi_{g\sigma}^{(1)}, \ldots, \frac{d\xi_{g\sigma}^{(\rho)}}{dt}=\varkappa_g\eta_g^{(\rho)}\xi_{g\sigma}^{(\rho)}$$

Вводя в дополнение к $\xi_{g\sigma}$ переменные

$$\xi_{g1\sigma}=\eta_g^{(1)}\xi_{g\sigma}^{(1)}+\ldots+\eta_g^{(\rho)}\xi_{g\sigma}^{(\rho)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\xi_{g,\rho-1,\sigma}=(\eta_g^{(1)})^{\rho-1}\xi_{g\sigma}^{(1)}+\ldots+(\eta_g^{(\rho)})^{\rho-1}\xi_{g\sigma}^{(\rho)}$$

будем складывать предыдущие уравнения, умножая их при этом на $1, \ldots, 1$, на $\eta_g^{(1)}, \ldots, \eta_g^{(\rho)}, \ldots$, наконец, на $(\eta_g^{(1)})^{\rho-1}, \ldots, (\eta_g^{(\rho)})^{\rho-1}$. Замечая, что $(\eta_g^{(1)})^{\rho}=\ldots=(\eta_g^{(\rho)})^{\rho}=-\lambda_g/(\varkappa_g)^{\rho}$, получим

$$\frac{d\xi_{g\sigma}}{dt}=\varkappa_g\xi_{g1\sigma}, \quad \frac{d\xi_{g1\sigma}}{dt}=\varkappa_g\xi_{g2\sigma}, \quad \ldots, \quad \frac{d\xi_{g,\rho-1,\sigma}}{dt}=-\frac{\lambda_g}{(\varkappa_g)^{\rho-1}}\xi_{g\sigma}$$

или же, исключая $\xi_{g1\sigma}, \ldots \xi_{g,\rho-1,\sigma}$:

$$\frac{d^{\rho}\xi_{g\sigma}}{dt^{\rho}}+\lambda_g\xi_{g\sigma}=0 \qquad (g=1, \ldots, N;\ \sigma=1, \ldots, q_g) \tag{5.10}$$

Число переменных $\xi_{g\sigma}$ есть

$$n=\sum_{g=1}^{N} q_g$$

и, как мы видим, каждая из них удовлетворяет линейному уравнению ρ-го порядка, не зависящему от остальных. Мы можем поэтому принять их за нормальные координаты вместо $n\rho$ величин $\xi_{g\sigma}^{(\alpha)}$ и получить, таким образом, непосредственное обобщение классического определения. Если все корни λ_g действительны, то такими же можно взять и все $X_{g\sigma}$; преобразование (5.9) будет тогда действительным. Так именно обстоит дело, когда $\rho=2$, а рассматриваемые уравнения характеризуют малые движения консервативной динамической системы около положения равновесия.

Преобразованные уравнения для случая неоднородной или нелинейной системы типа (4.1) также легко написать, пользуясь, если нужно, выражениями $\dot{x}_j, \ldots, \overset{\rho-1}{x_j}$ через $\dot{\xi}_{g\sigma}, \ldots, \overset{\rho-1}{\xi_{g\sigma}}$.

§ 6. Гамильтоновы системы. В качестве второго примера рассмотрим Гамильтонову систему

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial (H_2 + H')}{\partial y_j}, \quad \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial (H_2 + H')}{\partial x_j} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{6.1}$$

где

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_jy_k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}y_jy_k \tag{6.2}$$

$$a_{jk} = a_{kj}, \quad c_{jk} = c_{kj} \tag{6.3}$$

но вообще

$$b_{jk} \neq b_{kj}$$

a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} суть постоянные, а H' — заданная функция x и y. Подставляя выражение (6.2), получим (6.1) в виде

$$\begin{aligned} &\sum_k a_{jk}x_k + \sum_k (\delta_{jk}D + b_{jk})\, y_k = -\frac{\partial H'}{\partial x_j} \\ &\sum_k (-\delta_{jk}D + b_{kj})\, x_k + \sum_k c_{jk}\, y_k = -\frac{\partial H'}{\partial y_j} \end{aligned} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{6.4}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера.

При $H' = 0$ имеем «невозмущенные» линейные уравнения с операционной матрицей

$$f(D) = \left\| \begin{matrix} a_{11} \ldots & a_{1n} & D + b_{11} \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} \ldots & a_{nn} & b_{n1} \ldots & D + b_{nn} \\ -D + b_{11} \ldots & b_{n1} & c_{11} \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{1n} \ldots & -D + b_{nn} & c_{n1} \ldots & c_{nn} \end{matrix} \right\| \tag{6.5}$$

Она принадлежит к числу так называемых квази-эрмитовых матриц[12], так как $f(-\varkappa)$, очевидно, совпадает с матрицей, транспонированной по отношению к $f(\varkappa)$; отсюда, в частности, следует, что

$$F_{jk}(\varkappa) = F_{kj}(-\varkappa) \tag{6.6}$$

Характеристический определитель $\Delta(\varkappa) = \Delta(-\varkappa)$ содержит только четные степени, и мы обозначим через λ_h различные между собой корни характеристического уравнения $\Delta(\varkappa) = 0$, выраженного через переменную $\lambda = -\varkappa^2$. Будем предполагать все эти корни действительными и положительными, полагая $\lambda_h = \omega_h^2$; тогда каждому из них соответствует пара корней $\varkappa_h, \varkappa_h' = \pm i\omega_h$ определителя, выраженного через $\varkappa$. Это всегда имеет место, когда H_2 есть определенная положительная квадратичная форма[13]. Для простоты будем также предполагать, что кратных корней нет. Тогда при каждом h среди диагональных элементов матрицы $F(i\omega_h)$ найдется по крайней мере один, отличный от нуля. В самом деле, используя (6.6) и известное соотношение

$$F_{jj}(i\omega_h)\,F_{kk}(i\omega_h)-F_{jk}(i\omega_h)\,F_{kj}(i\omega_h)=0$$

находим

$$|F_{jk}(i\omega_h)|^2=F_{jk}(i\omega_h)\,F_{jk}(-i\omega_h)=F_{jk}(i\omega_h)\,F_{kj}(i\omega_h)=F_{jj}(i\omega_h)\,F_{kk}(i\omega_h)$$

Отсюда видно, что если бы все диагональные элементы равнялись нулю, то то же самое было бы и со всеми остальными, что, однако, невозможно, поскольку корни $i\omega_h$ — простые. Обозначая один из не исчезающих диагональных элементов через $F_{l(h),\,l(h)}(i\omega_h)$ и применяя соотношение

$$F_{l(h),\,l(h)}(i\omega_h)\,F_{kj}(i\omega_h)-F_{l(h),\,j}(i\omega_h)\,F_{k,\,l(h)}(i\omega_h)=0$$

можем написать

$$F(i\omega_h)=C_hB_h,\qquad F_{kj}(i\omega_h)=C_j^{(h)}\,B_k^{(h)} \tag{6.7}$$

где C_h, B_h обозначают матрицу-столбец и матрицу-строку с элементами

$$C_j^{(h)}=S_h\frac{F_{l(h),\,j}(i\omega_h)}{F_{l(h),\,l(h)}(i\omega_h)},\qquad B_k^{(h)}=\frac{1}{S_h}F_{k,\,l(h)}(i\omega_h) \tag{6.8}$$

а S_h — произвольный коэффициент пропорциональности. Замечая, что $F_{l(h),\,l(h)}(i\omega_h)$ действителен, так же как и все другие диагональные элементы $F_{jj}(i\omega_h)=F_{jj}(-i\omega_h)$, положим

$$S_h=+\sqrt{\frac{1}{\omega_h}\left|\frac{F_{l(h),\,l(h)}(i\omega_h)}{\Delta_h(i\omega_h)}\right|}\qquad\left(\Delta_h(D)=\frac{\Delta(D)}{D^2+\omega_h^2}\right) \tag{6.9}$$

причем значение $\Delta_h(i\omega_h)$ тоже действительно. Поэтому

$$F_{l(h),\,l(h)}(i\omega_h)=\pm\,\omega_h\Delta_h(i\omega_h)\,S_h^2$$

и

$$C_{l(h)}{}^{(h)}=S_h,\qquad B_{l(h)}^{(h)}=\pm\,\omega_h\Delta_h(i\omega_h)\,S_h$$

$$C_j^{(h)}=X_j^{(h)}+iY_j^{(h)}=S_h\frac{F_{j,\,l(h)}(-i\omega_h)}{F_{l(h),\,l(h)}(i\omega_h)}=S_h^2\,\frac{\overline{B}_j^{(h)}}{F_{l(h),\,l(h)}(i\omega_h)}=\frac{\pm\,\overline{B}_j^{(h)}}{\omega_h\,\Delta_h(i\omega_h)}$$

$$B_k^{(h)}=\pm\,\omega_h\,\Delta_h(i\omega_h)\,\overline{C}_k^{(h)}=\pm\,\omega_h\,\Delta_h(i\omega_h)\,(X_k^{(h)}-iY_k^{(h)}) \tag{6.10}$$
$$(j,\,k=1,\,\ldots,\,2n)$$

Преобразование к нормальным координатам имеет вид

$$x_j=\sum_{h=1}^{n}(X_j^{(h)}\xi_h+Y_j^{(h)}\eta_h),\qquad y_j=\sum_{h=1}^{n}(X_{n+j}^{(h)}\xi_h+Y_{n+j}^{(h)}\eta_h)\quad(j=1,\ldots,n) \tag{6.11}$$

и мы можем написать

$$\begin{aligned}B_k^{(h)}&=\pm\,\omega_h\,\Delta_h(i\omega_h)\left(\frac{\partial x_k}{\partial\xi_h}-i\,\frac{\partial x_k}{\partial\eta_h}\right)\\ B_{n+k}{}^{(h)}&=\pm\,\omega_h\,\Delta_h(i\omega_h)\left(\frac{\partial y_k}{\partial\xi_h}-i\,\frac{d y_k}{\partial\eta_h}\right)\end{aligned}\qquad(k=1,\,\ldots,\,n)$$

Пользуясь этими выражениями, принимая во внимание, что

$$\left[\frac{D-i\omega_h}{\Delta(D)}\right]_{D=i\omega_h}=\left[\frac{1}{(D+i\omega_h)\,\Delta_h(D)}\right]_{D=i\omega_h}=-\frac{i}{2\omega_h}\frac{1}{\Delta_h(i\omega_h)}$$

и подставляя в (3.10) вместо $y_k(t)$ выражения

$$-\frac{\partial H'}{\partial x_1},\ \ldots,\ -\frac{\partial H'}{\partial x_n},\quad -\frac{\partial H'}{\partial y_1},\ \ldots,\ -\frac{\partial H'}{\partial y_n}.$$

получим следующие уравнения в нормальных координатах

$$\frac{d\xi_h}{dt}=\omega_h\eta_h\pm\operatorname{Re}\left\{i\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial x_k}{\partial\xi_h}-i\frac{\partial x_k}{\partial\eta_h}\right)\frac{\partial H'}{\partial x_k}+\left(\frac{\partial y_k}{\partial\xi_h}-i\frac{\partial y_k}{\partial\eta_h}\right)\frac{\partial H'}{\partial y_k}\right]\right\}$$

$$\frac{d\eta_h}{dt}=-\omega_h\xi_h\mp\operatorname{Im}\left\{i\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial x_k}{\partial\xi_h}-i\frac{\partial x_k}{\partial\eta_h}\right)\frac{\partial H'}{\partial x_k}+\left(\frac{\partial y_k}{\partial\xi_h}-i\frac{\partial y_k}{\partial\eta_h}\right)\frac{\partial H'}{\partial y_k}\right]\right\}$$

или

$$\frac{d\xi_h}{dt}=\omega_h\eta_h\pm\frac{\partial H'}{\partial\eta_h},\qquad \frac{d\eta_h}{dt}=-\omega_h\xi_h\pm\frac{\partial H'}{\partial\xi_h}$$

Мы видим, что, какова бы ни была функция H' в (6.1), преобразованная система оказывается канонической с гамильтоновой функцией

$$\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}\omega_h(\xi_h^2+\eta_h^2)\pm H'$$

поэтому полученное нами преобразование также является каноническим. Так как оно не зависит от времени t, то оно должно быть вполне каноническим[14], т. е.

$$H_2+H'=\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}\omega_h(\xi_h^2+\eta_h^2)\pm H'$$

Знак минус перед H' невозможен, так как последнее соотношение должно удовлетворяться тождественно при всяком H'. Поэтому получаем преобразованные уравнения в следующей окончательной форме:

$$\frac{d\xi_h}{dt}=\omega_h\eta_h+\frac{\partial H'}{\partial\eta_h},\qquad \frac{d\eta_h}{dt}=-\omega_h\xi_h-\frac{\partial H'}{\partial\xi_h}\tag{6.12}$$

для коэффициентов преобразования из (6.10) получаются выражения

$$X_j^{(h)}-i\,Y_j^{(h)}=\frac{F_{j,l(h)}(i\omega_h)}{\sqrt{\omega_h\,|\Delta_h(i\omega_h)\,F_{l(h),\,l(h)}(i\omega_h)|}}\tag{6.13}$$

Поступила в редакцию
25 1 1945

Институт механики Московского
государственного университета

B. V. BULGAKOV. — ON NORMAL COORDINATES

The purpose of the paper is the effective transformation to normal coordinates of the system of linear differential equations

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(D)\,x_k=y_j(t)\qquad (j=1,\ \ldots,\ n)$$

where D is the differential operator d/dt and the letters x_k denote the unknown functions of the independent variable t; the $f_{jk}(D)$'s and $y_j(t)$'s are given functions of their arguments, the first set being simply polynomials of any finite degrees with constant coefficients. It is the most general form of a system of linear differential equations with constant coefficients as studied, for instance, by E. J. Routh and E. L. Ince. Only two general assumptions relative to these equations are made, *viz.* (a) that the determinant of the operational matrix $\| f_{jk}(D) \|$ is not identical with zero and (b) that all its elementary divisors are linear. To render the transformation as simple as possible it is necessary to start immediately from the given equations and not from the equivalent system of the first order. The transformation is given by the formulae (3.9) of the paper and the transformed equations are (3.10). Formulae (3.3), (3.4), (3.6) are also given relative to another useful system of new unknowns, representing the amplitudes and the angular variables.

The results obtained are applied to the case where the $y_j(t)$'s are replaced by any perturbation functions $\psi_j(x_1, \dots, x_n, t)$, in general non-linear, and depending not only on t, but also on the unknowns x_k. The transformation and the transformed equations in this case are given by formulae (4.2), (4.3).

It is also shown, how the classical and more restricted definition of the normal coordinates can be deduced from that given here, and to this purpose the special case of a system with operational polynomials of the type (5.1) is considered. Finally the Hamiltonian systems (6.1) are studied. The general transformation for these systems is reduced to that considered by A. M. Liapounoff, T. J. Bromwich and E. T. Whittaker and by G. D. Birkhoff.

ЛИТЕРАТУРА

1. Routh E. J. Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II, 5th ed., London. 1892.
2. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Перев. под ред. А. М. Эфроса. Харьков. 1939.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Изд. 2-е. Л. — М. 1935.
4. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. Пер. И. Г. Малкина. М. — Л. 1937.
5. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. Пер. Е. М. Ливенсона. М. — Л. 1941.
6. Булгаков Б. В. О применении метода ван-дер-Поля к псевдолинейным колебательным системам со многими степенями свободы. Прикладная математика и механика. 1942. Т. VI. Вып. 6. Стр. 395 — 410.
7. Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. Изд. 3-е. М. — Л. 1937. Стр. 274 — 276.
8. Frazer R. A., Duncan W. J., Collar A. R. Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations. Cambridge. 1938. Pages 20, 65.
9. Булгаков Б. В. Об операционных решениях систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Доклады Академии Наук СССР. 1943. Т. XLI. Вып. 6. Стр. 248 — 251.
10. Айнс Э. Л. Цит. соч. Стр. 200 — 201.
11. Frazer R. A. и др. Цит. соч. Стр. 163.
12. Wedderburn J. H. M. Lectures on Matrices. New York. 1934. Стр. 93.
13. Уиттекер Е. Т. Цит. соч. Стр. 225.
14. Levi-Civita T. e U. Amaldi, Lezioni di meccanica razionale. Bologna. 1927. Vol. II. Parte II. Pagine 314 — 315.