

## К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТ

Д. Е. О х о ц и м с к и й

(Москва)

Настоящая работа посвящена решению двух вариационных задач, относящихся к внешней баллистике ракеты.

При изучении движения ракеты будем предполагать, что ракета так уравновешена, что ее ось не отклоняется от касательной к траектории. Применим к центру тяжести ракеты уравнение движения точки переменной массы, из которой вылетают материальные частицы в сторону, противоположную направлению движения. Это уравнение, которое положено в основу исследования, имеет в векторной форме вид

$$M(t) \frac{dv}{dt} = F + V_r \frac{dM}{dt}$$

где  $M(t)$  — переменная, убывающая масса ракеты,  $v$  — скорость ее движения,  $F$  — равнодействующая внешних сил, а  $V_r$  — относительная скорость выбрасываемых частиц (скорость истечения газовой струи). Будем считать  $|V_r| = \text{const}$ . Член  $V_r dM/dt$  представляет собой реактивную силу.

В работе исследуется режим расходования массы, т. е. характер монотонно убывающей функции  $M(t)$ , при которой те или иные характеристики движения становятся экстремальными.

В первой части работы рассматривается с этой точки зрения задача о максимальной горизонтальной дальности ракеты в среде без сопротивления, а во второй части — задача о подъеме ракеты на максимальную высоту при наличии сопротивления воздуха, с учетом изменения плотности воздуха и его температуры с высотой.

Заметим, что написанное уравнение движения предполагает, что давление  $p$  на срезе сопла равно атмосферному давлению  $p_a$ . В случае короткого сопла давление на срезе больше атмосферного и к правой части уравнения следует добавить слагаемое, равное по величине  $S(p - p_a)$ , где  $S$  — площадь среза. Учет этого слагаемого, как будет показано в дальнейшем, не имеет принципиального значения.

С математической стороны рассматриваемые вариационные задачи имеют прежде всего ту особенность, что искомые характеристики движения представляют собой функционалы, заданные неявно при помощи дифференциальных уравнений движения и определенных начальных условий, причем ни получение в общем случае явного выражения этих функционалов через функцию  $M(t)$ , ни получение их первых вариаций при варьировании этой функции не представляется возможным. Другая особенность заключается

в том, что экстремум достигается на кривых, имеющих угловые точки, и это приводит к необходимости изучения тех областей плоскости, где могут располагаться кривые, являющиеся допустимыми.

## I. О максимальной дальности ракеты при отсутствии сопротивления воздуха

**1. Постановка задачи.** Единственной внешней силой будет в данном случае сила тяжести, поэтому в уравнении движения положим  $\mathbf{F} = M\mathbf{g}$ . Представим далее  $M(t)$  в виде  $M(t) = M_0 f(t)$ , где  $M_0$  — начальная масса, а  $f(t)$  — функция, монотонно убывающая от единицы до значения  $\mu > 0$ , где  $\mu$  — относительная масса корпуса ракеты.

Разделим уравнение движения на  $M_0 f$  и спроектируем на оси координат ( $x$  — горизонтальную и  $y$  — вертикальную). Получим

$$\frac{dx}{dt} = -V_r \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{1}{f} \frac{df}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = -g - V_r \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{1}{f} \frac{df}{dt} \quad (1.1)$$

При  $t = 0$  имеем

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \dot{x} = v_0 \sin \theta_0, \quad \dot{y} = v_0 \cos \theta_0 \quad (1.2)$$

Система (1.1) нелинейная, первого порядка относительно компонент скорости. Начальные данные соответствуют тому, что ракета выпущена с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\theta_0$  к вертикали.

Система (1.1) вместе с начальными условиями (1.2) ставит в соответствие каждой функции  $f(t)$  определенную горизонтальную дальность  $X$ , т. е. задает в неявной форме дальность  $X$  как функционал от функции  $f(t)$ . Среди функций  $f(t)$ , монотонно убывающих от 1 до  $\mu > 0$ , надо найти такую, чтобы отвечающая ей дальность  $X$  была максимальной.

Получение явного выражения дальности через функцию  $f(t)$  в общем случае не является возможным. Однако в этом, оказывается, нет и необходимости. Считая массу  $f$  зависящей не от времени, а от угла  $\theta$  между направлением скорости и вертикалью, можно получить явное выражение дальности через функцию  $f(\theta)$  и найти функцию  $f(\theta)$ , при которой горизонтальная дальность будет наибольшей. Находя затем зависимость между временем  $t$  и углом  $\theta$ , можно получить наилучшую функцию  $f(t)$ .

Прежде чем переходить к решению вариационной задачи, рассмотрим полет ракеты в предположении, что заряд сгорает мгновенно в некоторый момент движения, и найдем место на траектории, где это сгорание выгодней всего произвести. Решение такой задачи является приближенным решением для случая, когда сгорание происходит достаточно быстро.

Заметим, что в случае отсутствия внешних сил уравнение движения ракеты легко интегрируется и для величины скорости получается известная формула Циолковского

$$v = v_0 + V_r |\ln f| \quad (1.3)$$

Если  $f \geq \mu$ , то величина скорости ограничена, причем зависит только от массы  $f$ . Отсюда, в частности, следует, что если действуют внешние силы, но заряд сгорает мгновенно, то увеличение величины скорости после сгорания заряда не зависит от характера внешних сил и равно  $\omega = V_r |\ln \mu|$ .

**2. Полет ракеты с мгновенно сгорающим зарядом.** Пусть ракета выпущена под углом  $\theta_0$  к вертикали с начальной скоростью  $v_0$ . Она начнет двигаться по параболе  $P_0$  с вертикальной осью.

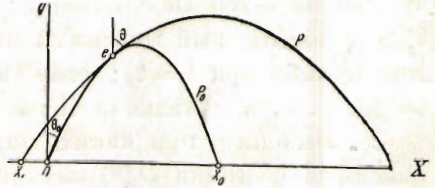
Пусть в момент времени  $t$  заряд мгновенно сгорел и ракета получила от этого дополнительную скорость  $w$  в направлении своего движения. После этого она будет двигаться по параболе  $P$ , ось которой также вертикальна, но параметр больше, чем у  $P_0$ . Парабола  $P$  лежит целиком вне  $P_0$ , касаясь ее лишь в точке  $e$  (фиг. 1).

Имеем соотношения

$$X = v_0 \sin \theta_0 T + w \sin \theta (T - t) \quad (2.1)$$

$$C = v_0 \cos \theta_0 T + w \cos \theta (T - t) - \frac{gT^2}{2} \quad (2.2)$$

$$t = \frac{v_0 \sin(\theta - \theta_0)}{g \sin \theta} \quad (2.3)$$



Фиг. 1.

где  $X$  — горизонтальная дальность,  $T$  — полное время полета, а  $\theta$  — угол между скоростью и вертикалью в момент  $t$ .

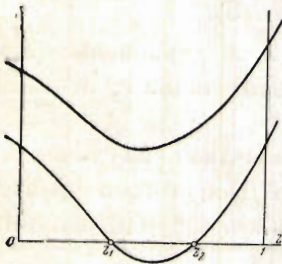
Исключая  $T$  и  $t$  и обозначая  $gX$  через  $D$ , получим  $D$  как функцию величин  $v_0$ ,  $w$ ,  $\theta_0$  и  $\theta$ :

$$D = (v_0 \sin \theta_0 + w \sin \theta) \left[ (v_0 \cos \theta_0 + w \cos \theta) + \sqrt{(v_0 \cos \theta_0 + w \cos \theta)^2 - 2v_0 w \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{\operatorname{tg} \theta}} \right] - v_0 w \sin(\theta - \theta_0) \quad (2.4)$$

Исследуем эту формулу.

1°. Найдем на параболе  $P_0$  точку, где должен сгореть заряд, чтобы дальность была наибольшей, т. е. найдем абсолютный максимум  $D$  как функции угла  $\theta$ , считая, что  $\theta$  ограничено условиями

$$\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$$



Фиг. 2.

Исследуем  $D(\theta)$  на более широком участке  $[0, \pi - \theta_0]$ . При  $\theta = 0$  кривая  $D(\theta)$  имеет вертикальную асимптоту, а при  $\theta = \pi - \theta_0$  имеем абсолютный минимум и горизонтальную касательную (точка  $X_0$  на фиг. 1). Могут быть еще относительные экстремумы.

Дифференцируя (2.4) по  $\theta$ , освобождаясь от иррациональности и выражая все  $\cos$  через  $\sin$ , получим уравнение

$$\varphi(z_0, z) = (v_0^2 + 2w^2)z^4 + 6v_0 w z_0 z^3 + (3v_0^2 z_0^2 - v_0^2 - w^2)z^2 - 2v_0 w z_0 z + v_0^2 z_0^2 = 0 \quad (2.5)$$

где обозначено  $z = \sin \theta$ ,  $z_0 = \sin \theta_0$  и откинут множитель  $(\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta)$ , соответствующий абсолютному минимуму  $D(\theta)$  в конце траектории.

Ищем положительные корни уравнения (2.5). По числу перемен знаков в ряду коэффициентов их может быть либо два, либо ни одного (фиг. 2); легко видеть, что если корни существуют, то они будут меньше единицы.

Двум корням  $z_1$  и  $z_2$  уравнения (2.5) отвечают два значения угла  $\theta$  на восходящей ветви ( $\theta_1$  и  $\theta_2$ ) и два — на нисходящей ( $\theta_3 = \pi - \theta_2$  и  $\theta_4 = \pi - \theta_1$ ). Однако корни  $\theta_3$  и  $\theta_4$  являются посторонними. Они отвечают экстремумам функции  $D_1(\theta)$ , которая соответствует второй точке пересечения параболы  $P$  с осью абсцисс.

По ходу кривой  $D(\theta)$  ясно, что меньшему корню  $z_1$  и  $\theta_1$  соответствует относительный минимум, а большему  $z_2$  и  $\theta_2$  — относительный максимум, что же касается абсолютного максимума на отрезке  $[\theta_0, \pi - \theta_0]$ , то при  $\theta_2 > \theta_0$  абсолютный максимум может быть либо при  $\theta = \theta_2$ , т. е. на траектории, либо при  $\theta = \theta_0$ ; если же  $\theta_2 < \theta_0$ , то он может быть лишь при  $\theta = \theta_0$ , т. е. в начальной точке траектории.

2°. Выясним, при каких значениях начального угла  $\theta_0$  абсолютный максимум функции  $D(\theta)$  находится на траектории.

Обозначим через  $e_1$  и  $e_2$  точки параболы  $P_0$ , отвечающие углам  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , и исследуем их перемещение по параболе  $P_0$  при изменении начального угла от нуля до  $\pi/4$ .

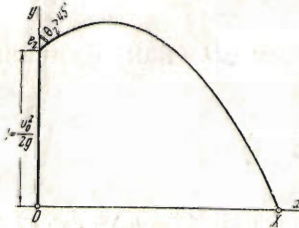
При  $\theta_0 = 0$  уравнение (2.5) примет вид

$$(r_0^2 + 2w^2)z^4 - (r_0^2 + w^2)z^2 = 0$$

откуда

$$z_1 = \theta_1 = 0$$

$$z_2^2 = \sin^2 \theta_2 = \frac{r_0^2 + w^2}{r_0^2 + 2w^2} > \frac{1}{2} \quad (2.6)$$



Фиг. 3.

т. е. при любых  $r_0$  в  $w$  имеем  $\pi/4 \leq \theta_2 \leq \pi/2$  и, следовательно, при  $\theta_0 = 0$ , а значит и при достаточно малых  $\theta_0$  точка  $e_2$  всегда находится на траектории. При  $\theta_0 = 0$  исходная траектория вырождается в удвоенный отрезок; точка  $e_2$  находится в верхней точке этого отрезка (фиг. 3).

С другой стороны, при  $\theta_0 \geq \pi/4$ , т. е. при  $z_0 \geq \sqrt{2}/2$ , уравнение (2.5) не имеет положительных корней, больших  $\pi/4$ , а значит точка  $e_2$  исчезает с траектории.

Определим те значения  $\theta_0 = \theta_0^*$ , при которых какая-либо из точек  $e_1$  или  $e_2$  проходит через границу траектории, — точку  $O$ . Для этого в уравнении (2.5) положим  $\theta = \theta_0 = \theta_0^*$ . Отбрасывая множитель  $\sin^2 \theta_0^* \neq 0$ , получим уравнение

$$(4r_0^2 + 6r_0 w + 2w^2)z_0^{*2} - (2r_0 w + w^2) = 0$$

откуда

$$\sin^2 \theta_0^* = \frac{w}{2(r_0 + w)} < \frac{1}{2} \quad (2.7)$$

Эта формула дает одно значение  $\theta_0^*$  между нулем и  $\pi/4$ , т. е. при увеличении  $\theta_0$  какая-то из точек  $e_1, e_2$  проходит через границу траектории, но это случается только один раз.

Определим знак  $\varphi_z'$  при аргументах  $z = z_0^*$ ,  $z_0 = z_0^*$ , т. е. в момент перехода точки через границу. Дифференцируя уравнение (2.5) по  $z$ , подставляя аргументы и заменяя  $z_0^*$  по формуле (2.7), получим

$$\varphi_z'(z_0^*, z_0^*) = \frac{\sqrt{2w}}{\sqrt{r_0 + w}} (2r_0 + w) \left( w - \frac{r_0}{2} \right) \quad (2.8)$$

Мы получили ранее, что при малых  $\theta_0$  точка  $e_2$  находится на траектории, а затем при увеличении угла  $\theta_0$  исчезает оттуда. Это исчезновение может происходить разными путями для разных значений отношения  $\omega/\nu_0$ .

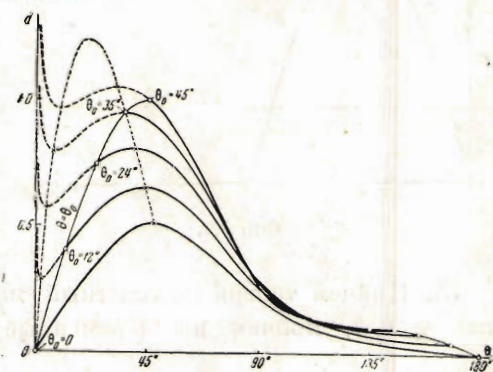
а) Если  $\omega > \nu_0/2$ , то  $\varphi'_z > 0$ . Но положительному  $\varphi'_z$  соответствует больший корень функции  $\varphi(z)$  (фиг. 2), т. е. точка  $e_2$ . Значит при  $\theta_0 = \theta_{0}^*$  точка  $e_2$  пройдет через границу траектории и уйдет с траектории.

б) Если  $\omega = \nu_0/2$ , то  $\varphi'_z = 0$ . Функция  $\varphi(z)$  имеет кратный корень. Значит, подойдя к границе траектории, точка  $e_2$  сольется с  $e_1$ .

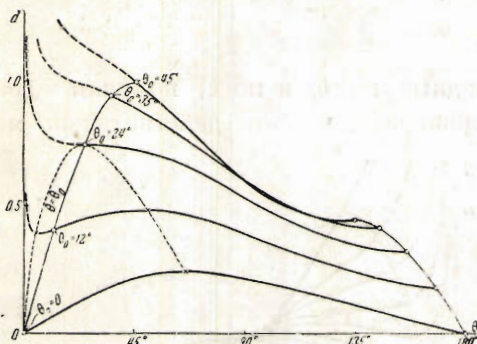
В обоих этих случаях точка  $e_1$  будет лежать все время либо левее границы, либо на ней.

Таким образом, если  $\omega/\nu_0 \geq 1/2$ , то при начальных углах, меньших  $\theta_{0}^*$ , абсолютный максимум функции  $D(\theta)$  находится на траектории, в точке  $e_2$ . При больших начальных углах абсолютный максимум находится в точке  $O$ . При  $\omega/\nu_0 = 1/2$  угол  $\theta_{0}^* = 24^\circ 5' 19''$ . При увеличении  $\omega/\nu_0$  угол  $\theta_{0}^*$  растет и стремится к  $\pi/4$  при  $\omega/\nu_0 \rightarrow \infty$ .

Случай а) и б) показаны на фиг. 4 и 5, где даны серии кривых  $d = D(\theta) / (\nu_0 + \omega)^2$  при различных начальных углах  $\theta_0$ .



Фиг. 4.



Фиг. 5.

На фиг. 6 показана предельная кривая при  $\omega/\nu_0 \rightarrow \infty$  для начального угла  $\theta_0 = 45^\circ$ .

с) Если  $\omega < \nu_0/2$ , то  $\varphi'_z < 0$  и значит границу перейдет точка  $e_1$ . При дальнейшем увеличении  $\theta_0$  точка  $e_1$  сольется с  $e_2$ , но еще до того, как это произойдет, найдется такое значение  $\theta_0 = \theta_{0}^{cr}$ , что значение  $D(\theta)$  в точке  $O$  сравняется со значением в точке  $e_2$ .

Таким образом, если  $\omega/\nu_0 < 1/2$ , то при начальных углах, меньших  $\theta_{0}^{cr}$ , абсолютный максимум функции  $D(\theta)$  достигается на траектории, в точке  $e_2$ . При  $\theta_0 = \theta_{0}^{cr}$  он достигается одновременно в точке  $O$  и в точке  $e_2$ . При  $\theta_0 > \theta_{0}^{cr}$  абсолютный максимум будет в точке  $O$ .

Часть кривых, представленная жирно, соответствует изменению  $\theta$  на исходной траектории, т. е. в пределах от  $\theta_0$  до  $\pi - \theta_0$ ; пунктирная часть соответствует изменению  $\theta$  между нулем и  $\theta_0$ . Точки, разделяющие эти части, лежат на синусоиде, так как при  $\theta = \theta_0$  получим  $D = (\nu_0 + \omega)^2 \sin 2\theta_0$ , как и должно быть для дальности точки, брошенной под углом с начальной скоростью.

На фиг. 4 отношение  $\omega/\nu_0 = 2$ .

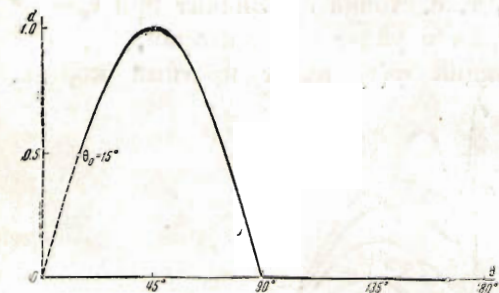
Угол  $\theta_0^{cr}$  может быть определен лишь приближенно при помощи формулы для дальности (2.4) и условия экстремума (2.5). Угол  $\theta_0^{cr}$  существует лишь при  $\omega/v_0 \leq 1/2$ , причем при  $\omega/v_0 < 1/2$  он больше  $\theta_0^*$ , а при  $\omega/v_0 = 1/2$  равен ему и равен, следовательно,  $24^\circ 5' 19''$ . При убывании  $\omega/v_0$  угол  $\theta_0^{cr}$  убывает и при  $\omega/v_0 \rightarrow 0$  стремится к предельному значению, равному примерно  $19^\circ$ .

При малом  $\omega/v_0$  экстремумы выражены весьма слабо.

Пренебрегая квадратом величины  $\omega/v_0$  в формуле (2.4), получим

$$D = v_0^2 \sin 2\theta_0 + v_0 \omega \frac{\sin^2(\theta_0 + \theta)}{\cos \theta_0 \sin \theta} = D_0 + \Delta$$

На фиг. 7 приведены кривые  $\delta = \Delta / 2v_0\omega$  для различных значений  $\theta_0$ .



Фиг. 6.

3°. Найдем теперь абсолютный максимум  $D$  как функции двух переменных  $\theta_0$  и  $\theta$ , причем на переменные надо, очевидно, наложить условия

$$0 \leq \theta_0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Рассмотрим функцию  $\bar{D}(\theta_0, \theta)$ , которую образуем из  $D(\theta_0, \theta)$ , отбрасывая в формуле (2.4) неположительные члены, содержащие  $\sin(\theta - \theta_0)$ :

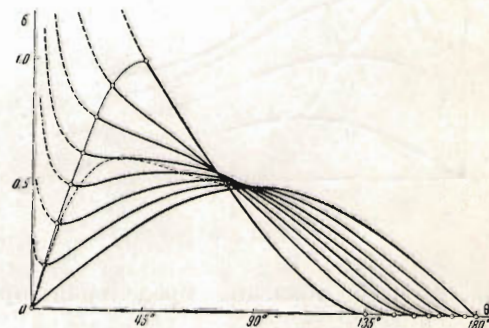
$$\bar{D}(\theta_0, \theta) = 2(v_0 \sin \theta_0 + \omega \sin \theta)(v_0 \cos \theta_0 + \omega \cos \theta) \quad (2.9)$$

и найдем ее абсолютный максимум.

Приравнивая нулю частные производные по  $\theta_0$  и по  $\theta$ , получим единственное решение  $\theta_0 = \theta = 45^\circ$ . Легко проверить, что это действительно максимум, причем абсолютный и единственный.

Ясно, что абсолютный максимум функции  $D(\theta, \theta_0)$  может быть тоже только при этих значениях  $\theta_0$  и  $\theta$ , так как при указанных выше ограничениях на переменные всегда  $D \leq \bar{D}$ , причем равенство достигается лишь при  $\theta_0 = \theta$ , так как только в этом случае  $\sin(\theta_0 - \theta) = 0$ .

Таким образом при мгновенно сгорающем заряде самая большая дальность получится, если начальный угол  $\theta_0 = 45^\circ$ , а заряд сгорает в начальный момент полета. Значение  $D_{\max} = (v_0 + \omega)^2$



Фиг. 7.

3. Необходимость мгновенного сгорания. Угол  $\theta$  между вертикалью и направлением скорости ракеты будет вдоль траектории однозначной, монотонной и непрерывной функцией времени при любом сгорании заряда. Возьмем  $\theta$  в качестве нового независимого переменного.

Вместо функции  $f(\theta)$  введем для упрощения записи зависящую от нее функцию  $\psi(\theta)$  следующим образом:

$$\psi(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta < \theta_0 \\ \zeta_0 + V_r |\ln f| & \text{при } \theta \geq \theta_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Функция  $\psi(\theta)$  будет монотонно возрастающей. Ее вид показан на фиг. 8, где  $W$  — полное изменение функции  $\psi(\theta)$ , а  $\omega = V_r |\ln \mu|$ , где  $\mu = \min f$ , есть часть ее изменения, происходящая от сгорания заряда. Мгновенному сгоранию заряда или его части отвечает скачок функции  $\psi(\theta)$ .

Буква  $\psi$  обозначает скорость, которую получила бы ракета, если бы действовала одна только реактивная сила. Эта скорость зависит только от массы и определяется формулой Циолковского (1.3).

При мгновенном сгорании заряда дополнительная скорость  $\omega$ , которую ракета может получить от сгорания заряда, сообщается ей вся сразу. При постепенном сгорании она сообщается ей постепенно в виде элементарных добавок скорости  $d\psi$  по касательной к траектории. Функция  $\psi(\theta)$  является функцией распределения этих добавок. Отыскание наилучшей функции  $\psi(\theta)$  является определением наилучшего их распределения по траектории.

Введя функцию  $\psi(\theta)$ , мы можем записать уравнения движения ракеты (1.2) в виде

$$\dot{x} = \sin \theta d\psi, \quad \dot{y} = -g dt + \cos \theta d\psi \quad (3.2)$$

так как

$$\begin{aligned} x / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= \sin \theta, & y / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= \cos \theta \\ -V_r \frac{df}{f} &= d\psi \end{aligned}$$

Интегрируя, получим

$$\dot{x} = \int_0^{\theta} \sin \chi d\psi(\chi), \quad \dot{y} = -g t(\theta) + \int_0^{\theta} \cos \chi d\psi(\chi) \quad (3.3)$$

Здесь интегралы надо понимать в смысле Стильтьеса.

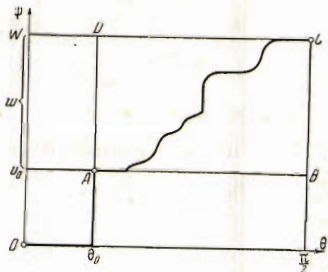
Начальные условия вошли сюда, так как  $\psi(\theta)$  имеет при  $\theta = \theta_0$  скачок, равный  $\zeta_0$ . В качестве нижнего предела можно взять вместо  $\theta = 0$  любое другое  $\theta_1$ , меньшее  $\theta_0$ , так как  $d\psi \equiv 0$  при  $\theta < \theta_0$ .

Замечая, что  $\dot{x}/\dot{y} = \operatorname{tg} \theta$ , из формулы (3.3) получим выражение времени через угол, аналогичное (2.3):

$$t(\theta) = \frac{1}{g \sin \theta} \int_0^{\theta} \sin(\theta - \chi) d\psi(\chi) \quad (3.4)$$

Пусть  $T$  — момент падения ракеты, а  $X$  — дальность, тогда имеем

$$X = \int_0^T \dot{x} dt, \quad 0 = \int_0^T \dot{y} dt$$



Фиг. 8.

Интегрируя по частям, заменяя  $t$  по формуле (3.4), а  $dx$  и  $dy$  по формулам (3.2) и заменяя пределы интегрирования, получим формулы

$$X = T \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\psi(\theta) - \frac{1}{g} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\theta} \sin(\theta - \gamma) d\psi(\gamma) d\psi(\theta) \quad (3.5)$$

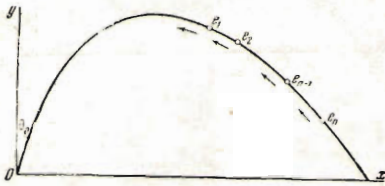
$$0 = T \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\psi(\theta) - \frac{1}{g} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\theta} \frac{\sin(\theta - \gamma)}{\operatorname{tg} \theta} d\psi(\gamma) d\psi(\theta) - \frac{gT^2}{2} \quad (3.6)$$

аналогичные (2.1) и (2.2) в задаче о мгновенно сгорающем заряде.

Исключая  $T$  и полагая  $gX = D$ , получим

$$D(\psi) = \left( \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\psi + \sqrt{\left( \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\psi \right)^2 - 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\theta} \frac{\sin(\theta - \gamma)}{\operatorname{tg} \theta} d\psi d\psi} \right) \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\psi - \int_0^{\pi/2} \int_0^{\theta} \sin(\theta - \gamma) d\psi d\psi \quad (3.7)$$

В качестве верхнего предела взято  $\pi/2$ . Это вполне достаточно, так как все изменение наивыгоднейшей функции  $\psi(\theta)$  должно происходить на восходящей ветви, т. е. при  $\theta \leq \pi/2$ .



Фиг. 9.

В самом деле, если изменение  $\psi$  на нисходящей ветви происходит одним скачком, то по ходу кривой  $D(\theta)$  для мгновенно сгорающего заряда ясно, что этот скачок надо передвинуть на восходящую ветвь. Если изменение  $\psi$  состоит из последовательности скачков в точках  $e_1, e_2, \dots, e_n$ ,

(фиг. 9), то надо точку  $e_n$  передвинуть к точке  $e_{n-1}$ , затем обе точки  $e_n$  и  $e_{n-1}$  к точке  $e_{n-2}$  и т. д. и убрать их все с нисходящей ветви.

Легко видеть, что функционал  $D(\psi)$  непрерывен, если за расстояние между функциями  $\psi_1$  и  $\psi_2$  взять

$$\rho(\psi_1, \psi_2) = \int_0^{\pi} |\psi_1(\theta) - \psi_2(\theta)| d\theta.$$

Из непрерывности следует, что если  $\psi$  вообще как-либо изменяется на нисходящей ветви, то она не может давать максимальной дальности.

Формула (3.7) дает явное выражение функционала  $D(\psi)$  через функцию  $\psi(\theta)$ . Однако искать максимум такого функционала затруднительно.

Рассмотрим несколько более простой функционал  $\bar{D}(\psi)$  и найдем его максимум:

$$\bar{D}(\psi) = \left( \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\psi + \sqrt{\left( \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\psi \right)^2 - 2\tau_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{\operatorname{tg} \theta} d\psi} \right) \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\psi - \tau_0 \int_0^{\pi/2} \sin(\theta - \theta_0) d\psi \quad (3.8)$$



Функционал  $\bar{D}$  отличается от  $D$  тем, что вместо двойных интегралов стоят простые.

Варируем функцию  $\psi(\theta)$ . При вариировании будем иметь закрепленные концы, так как все допустимые кривые  $\psi(\theta)$  проходят через точки  $O$ ,  $A$  и  $C$  (фиг. 8). Участок кривых от  $O$  до  $A$  не варьируется. Участок от  $A$  до  $C$  варьируем, не выходя за пределы прямоугольника  $ABCD$ . Вариация  $\delta\bar{D}$  имеет вид

$$\bar{D} = \int_0^{\pi/2} \Phi(\theta) \delta\psi(\theta) d\theta \quad \left( \Phi(\theta) = A_1 \sin \theta - A_2 \cos \theta + A_3 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \quad (3.9)$$

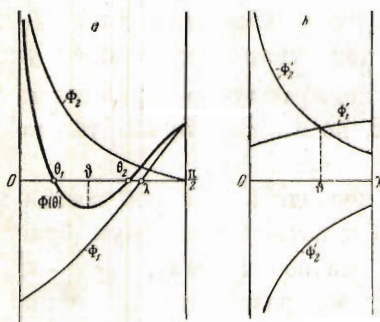
Здесь буквы  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  обозначают некоторые числа, зависящие от варьируемой функции  $\psi(\theta)$ , причем  $A_1 > 0$ ,  $A_3 > 0$ ,  $A_2 \geq 0$ .

Ищем корни функции  $\Phi(\theta)$  на отрезке  $[0, \pi/2]$

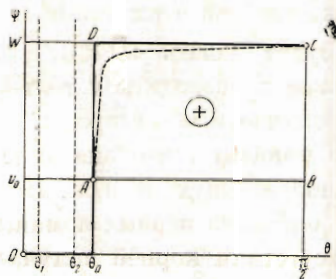
Если  $A_2 \leq 0$ , то корней нет. Пусть  $A_2 > 0$ . Разобьем  $\Phi$  на два слагаемых

$$\Phi_2 = A_3 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \Phi_1 = A_1 \sin(\theta - \lambda) \quad \left( \lambda = \arctg \frac{A_2}{A_1} \right)$$

Функция  $\Phi_1$  меняет знак при  $\theta = \lambda$ . Функция  $\Phi_2$  неотрицательна (фиг. 10, а). Сама функция  $\Phi$  может иметь лишь четное число корней, так



Фиг. 10.



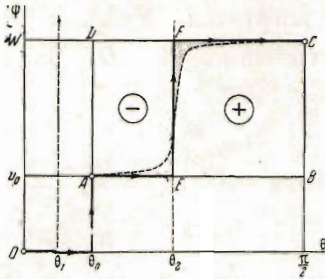
Фиг. 11.

как  $\Phi(0) = \infty$ , а  $\Phi(\pi/2) > 0$ , но исследование производных  $\Phi_1'$  и  $\Phi_2'$  (фиг. 10, б) показывает, что их может быть либо два ( $\theta_1$  и  $\theta_2$ ), как на фиг. 10, а, либо ни одного.

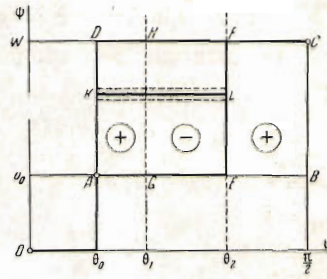
Прямые  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$  могут пересекать прямоугольник  $ABCD$  и делить его на части, в которых  $\Phi$  имеет разные знаки. На фиг. 11, 12 и 13 показаны три возможных случая. Знаки  $\Phi$  показаны в кружочках.

Абсолютный максимум  $\bar{D}$  будет достигаться в первом случае лишь на ломаной  $O\theta_0ADC$ , а во втором — на ломаной  $O\theta AEF C$ , так как всякую другую допустимую кривую или ломаную, проходящую через точки  $A$  и  $C$ , можно провариировать, положив  $\delta\psi > 0$  там, где  $\Phi > 0$ , и  $\delta\psi < 0$  там, где  $\Phi < 0$ , и согласно (3.9) получить  $\delta\bar{D} > 0$ . На этих же ломаных любая допустимая вариация дает  $\delta\bar{D} \leq 0$ .

При вариировании допустимыми вариациями являются лишь те, при которых провариированная функция  $\psi(\theta)$  не выходит за пределы прямоугольника и остается монотонно возрастающей.



Фиг. 12.



Фиг. 13.

При третьем расположении корней (фиг. 13) абсолютный максимум  $\bar{D}$  может достигаться либо на ломаной  $O\theta_0 A E F C$ , либо на ломаной  $O\theta_0 A D C$ , либо на ломаной  $O\theta_0 A K L F C$ , если соответственно

$$\int_{\theta_0}^{\theta_2} \Phi(\theta) d\theta \leq 0, \quad \int_{\theta_0}^{\theta_2} \Phi(\theta) d\theta \geq 0, \quad \int_{\theta_0}^{\theta_2} \Phi(\theta) d\theta = 0$$

Только в этих случаях любая допустимая вариация дает  $\delta\bar{D} \leq 0$ .

При выполнении этих условий любая допустимая вариация от указанных ломаных будет давать  $\delta\bar{D} \leq 0$ , так как в первом случае вариация на участке  $(\theta_0, \theta_2)$  может производиться только вверх, во втором случае только вниз, а в третьем случае в обе стороны.

Можно показать, что значение  $\bar{D}$  на последней ломаной всегда меньше, чем на одной из двух первых. Поэтому абсолютный максимум будет достигаться на одной из первых ломаных или на обеих сразу.

При отсутствии корней получается тот же результат, что и при первом их расположении.

Мы видим, таким образом, что для достижения абсолютного максимума  $\bar{D}$  заряд должен сгорать мгновенно. Но функционал  $\bar{D}$  так подобран, что при таком сгорании  $\bar{D} = D$ . При всяком же другом сгорании, происходящем на восходящей ветви, т. е. на участке  $[\theta_0, \pi/2]$ , значения  $\bar{D} > D$ . Значит абсолютный максимум  $D$  будет также лишь при мгновенном сгорании заряда.

Итак, рассматриваемая вариационная задача имеет следующее решение.

1. Заряд должен сгорать мгновенно.

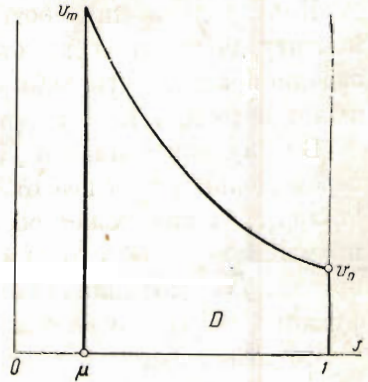
2. Мгновенное сгорание должно происходить или в самом начале полета, или, если направление начальной скорости составляет с вертикалью угол меньше некоторого предельного угла, — в некоторый момент полета. Угол на траектории, соответствующий этому моменту, определяется из уравнения (2.5), а самый момент времени из формулы (2.3).

3. Самая большая дальность будет, если заряд сгорит мгновенно в самом начале полета, а начальный угол будет при этом равен  $45^\circ$ .

**II. О подъеме ракеты в воздухе на максимальную высоту**

**4. Постановка задачи.** Внешними силами будут в данном случае сила тяжести  $Mg$  и сила сопротивления воздуха  $Q$ , зависящая от скорости  $v$  и высоты  $y$ . Проектируя уравнение движения на вертикальную ось  $y$ , получим

$$M \frac{dv}{dt} = -Q(v, y) - Mg - V_r \frac{dM}{dt} \quad (4.1) \quad v$$



Представим  $M(t)$ , как и прежде, в виде  $M(t) = M_0 f(t)$ , а сопротивление  $Q$  в виде  $Q(v, y) = M_0 \varphi(v, y)$ . Тогда уравнение (4.1) примет вид

$$f \frac{dv}{dt} = -\varphi(v, y) - fg - V_r \left[ \frac{df}{dt} \right] \quad (4.2)$$

Пусть ракета выпущена с некоторой начальной скоростью  $v_0$ . Тогда начальные данные для уравнения (4.2) будут иметь вид

$$y = 0, \quad v = v_0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (4.3)$$

Фиг. 14:

Высота подъема  $H$  представляет собой функционал от функции  $f(t)$ , заданный неявно уравнением (4.2) и начальными данными (4.3). Нужно среди функций  $f(t)$ , монотонно убывающих от 1 до  $\mu$ , найти такую, чтобы отвечающая ей высота подъема  $H$  была максимальной.

Получение явного выражения  $H$  через  $f(t)$  в общем случае не представляется возможным. Однако можно решить данную вариационную задачу без предварительной интеграции уравнения движения (4.2).

Нахождение наилучшей функции  $f(t)$ , а также экстремального движения сведется вообще к интегрированию некоторого уравнения первого порядка вида  $dy/dv = \psi(v, y)$  и последующему взятию квадратур.

Если же принять для убывания плотности с высотой закон  $\rho(y) = \rho_0 e^{-\alpha y}$ , то задача целиком сведется к квадратурам, ибо указанное уравнение примет вид  $dy/dv = \psi(v)$ , а если, кроме того, считать, что зависимость сопротивления воздуха от скорости  $v$  имеет вид

$$F(v) = R_1(v) \sqrt[k]{R_2(v)} \quad (4.4)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — рациональные функции скорости, а  $k$  — действительное число, то решение получается в элементарных функциях.

**5. Другая формулировка вариационной задачи.** Поставим, однако, вариационную задачу иначе. Рассмотрим плоскость  $fv$ . Каждому моменту движения соответствует единственная точка на плоскости  $fv$ . Эта точка может располагаться лишь в некоторой области  $D$  (фиг. 14), так как  $1 \geq f(t) \geq \mu > 0$ , а  $v$  ограничено снизу ( $v \geq 0$ ) и сверху. Для получения верхней границы заметим, что если бы не было силы тяжести и сопротивления воздуха, то уравнение движения ракеты, как уже упоминалось в п. 1, легко интегрировалось бы и мы получили бы для зависимости между массой  $f$  и скоростью  $v$  формулу Циолковского (1.3).

Очевидно, что при наличии сил, замедляющих движение, всегда для данного значения  $f$  скорость  $v$  будет меньше, чем по формуле (1.3). Липш.

в случае мгновенного сгорания заряда в начальный момент зависимость между  $v$  и  $f$  будет определяться формулой (4.3), так как конечные внешние силы не успеют сообщить импульса и уменьшить скорость. Формула (4.3) и дает, следовательно, для области  $D$  уравнение верхней границы, которая соответствует мгновенному сгоранию заряда в самом начале полета.

Началу движения соответствует точка  $(1, v_0)$ , а концу движения, т. е. моменту достижения высоты  $H$ , точка  $(\mu, 0)$ . Всему подъему ракеты при заданном законе сгорания заряда соответствует некоторая линия, соединяющая эти точки, т. е. некоторые функции  $v(f)$ .

В силу монотонности  $f(t)$  эта линия должна быть такой, чтобы при перемещении вдоль нее от точки  $(1, v_0)$  к точке  $(\mu, 0)$  значения  $f$  не возрастали, т. е. она может состоять из отрезков кривых, которые пересекаются прямыми  $f = \text{const}$  в одной точке, и, кроме того, может содержать отрезки прямых  $f = \text{const}$  (движение ракеты с постоянной массой). В последнем случае функция  $v(f)$  не будет однозначной.

Обратно, задавая функцию  $v(f)$ , можно из (4.2) и (4.3) определить соответствующие законы сгорания и движения, а также высоту подъема  $H$ .

Таким образом можно считать, что искомый функционал определен на линиях, расположенных в области  $D$  и соединяющих две фиксированные точки, и искать такую линию, чтобы соответствующая высота подъема  $H$  была наибольшей.

В дальнейшем будем считать  $f$  за независимое переменное и производить варьирование при постоянном  $f$ , поэтому ограничимся предположением, что  $v(f)$  есть однозначная функция. Это соответствует предположению о том, что сгорание заряда происходит во все время подъема.

Оказывается, что, вообще говоря, не существует однозначной функции  $v(f)$  такой, что  $v(1) = v_0$  и  $v(\mu) = 0$ , на которой достигался бы максимум функционала. Максимум будет достигаться лишь на кривой, которая состоит частично из границы области и включает отрезки прямой  $f = \mu$  и, быть может, и  $f = 1$ .

Чтобы найти эту предельную кривую, нужно найти первую вариацию  $\delta H$  при варьировании функции  $v(f)$  и исследовать ее свойства. Получение вариации является в данном случае возможным, хотя явного выражения функционала получить попрежнему нельзя. При варьировании же функции  $f(t)$  нельзя получить даже вариации, так как для ее получения нужно было бы решить в общем виде линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами.

**6. Получение первой вариации.** Будем считать  $f$  за независимое переменное, тогда уравнение (4.2) можно привести к виду

$$v \left( f \frac{dv}{df} + V_r \right) + [\varphi(v, y) + fg] \frac{dy}{df} = 0 \quad (6.1)$$

Если однозначная функция  $v(f)$  задана, то уравнение (6.1) при начальном условии  $y(1) = 0$  (в начале движения высота равна нулю) определяет функцию  $y(f)$ . Значение этой функции при  $f = \mu$  и есть значение функционала  $H$ , так как это есть высота в момент окончания горения, а мы предположили, что горение происходит во все время полета.

Если провариировать  $v(f)$ , то  $y(f)$  также проварируется, причем  $\delta y(f)$  и  $\delta v(f)$  будут связаны уравнением в вариациях от уравнения (6.1). Варируя при постоянном  $f$ , после деления на  $(\varphi + fg) \neq 0$  получим

$$(\delta y)' + A\delta y = B\delta v - C(\delta v)' \tag{6.2}$$

где

$$A = \frac{1}{\varphi + fg} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{df} \quad B = -\frac{1}{\varphi + fg} \left( f \frac{dv}{df} + V_r \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dy}{df} \right), \quad C = \frac{vf}{\varphi + fg} \tag{6.3}$$

Решая линейное уравнение первого порядка (6.2) относительно  $\delta y$  при начальном условии  $\delta y = 0$  при  $f = 1$  и подставляя  $f = \mu$ , получим

$$\delta y(\mu) = \int_{\mu}^1 \left( \exp \int_{\mu}^f A df \right) (-B\delta v + C\delta v') df = \delta H$$

Интегрируя один раз по частям и используя закрепление концов функции  $v(f)$ , а также значения  $A$ ,  $B$  и  $C$ , получим

$$\delta H = \int_{\mu}^1 \Phi(y, v, f) \delta v(f) df \tag{6.4}$$

где введено обозначение

$$\Phi(y, v, f) = \frac{1}{(\varphi + fg)^2} \left[ -v\varphi - V_r v \frac{\partial \varphi}{\partial v} + V_r \varphi + V_r g f \right] \exp \int_{\mu}^f A df \tag{6.5}$$

Уравнение  $\Phi = 0$  является аналогом уравнения Эйлера в простейшей вариационной задаче. Его можно представить в виде

$$f = \frac{1}{gV_r} \left[ v\varphi + V_r \left( v \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \varphi \right) \right] \tag{6.6}$$

Существенно, что мы получили не дифференциальное уравнение, а конечное соотношение между  $f$ ,  $v$  и  $y$ . Это означает, что данная ракета с данной массой  $f$  на данной высоте  $y$  должна подниматься с вполне определенной скоростью  $v$ , которая является наиболее выгодной.

Заметим, что формула (6.6) сохраняется, если считать  $g = g(y)$ .

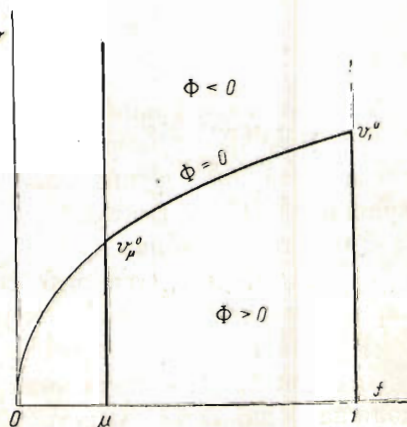
**7. Однородная атмосфера.** Рассмотрим сначала случай однородной атмосферы, где сопротивление не зависит от высоты. Закон сопротивления возьмем ради простоты квадратичным, т. е.  $\varphi(v) = cv^2$ .

Уравнения (6.4) и (6.6) примут вид

$$\delta H = \int_{\mu}^1 \Phi(v, f) \delta v(f) df \tag{7.1}$$

$$f = \frac{cv^2}{g} \left( 1 + \frac{v}{V_r} \right) \tag{7.2}$$

Уравнению (7.2) в плоскости  $f/v$  соответствует кубическая парабола (фиг. 15), которая пересечет прямые  $f = \mu$  и  $f = 1$  в точках  $v_{\mu}^{\circ}$  и  $v_1^{\circ}$  ( $v_{\mu}^{\circ} < v_1^{\circ}$ ), при этом

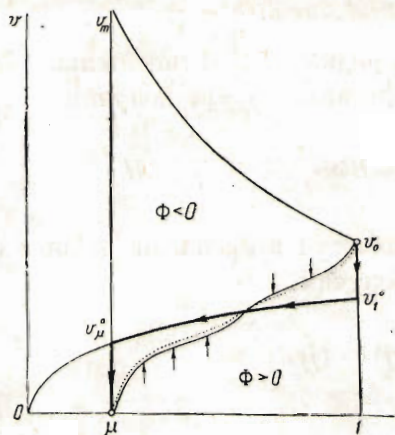


Фиг. 15.

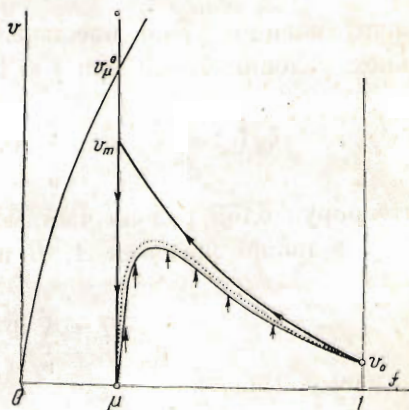
$\Phi > 0$  и  $\Phi < 0$  соответственно для точек ниже и выше дуги  $v_\mu^\circ v_1^\circ$ , а на самой дуге  $\Phi = 0$ .

Здесь и в дальнейшем значок  $^\circ$  означает, что величины относятся к однородной атмосфере. Ясно, что кривая (7.2) и значения скорости  $v_\mu^\circ$  и  $v_1^\circ$  не зависят от той функции  $v(f)$ , которую мы будем варьировать.

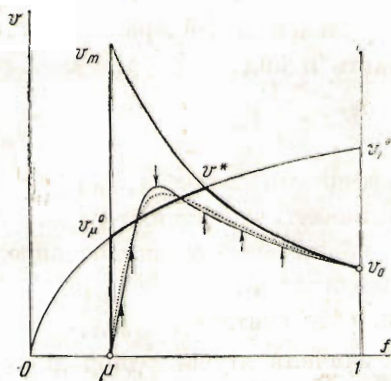
Рассмотрим теперь различные случаи взаимного расположения дуги



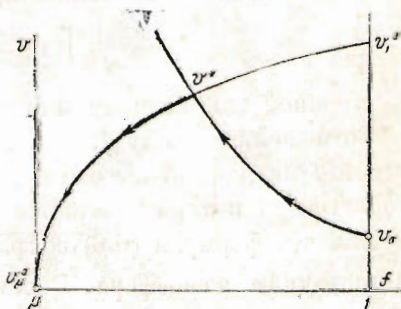
Фиг. 16.



Фиг. 18.



Фиг. 17.



Фиг. 19.

$v_\mu^\circ v_1^\circ$  и верхней границы области  $D$  — дуги  $v_0 v_m$ .

1°. Начальная скорость  $v_0 > v_1^\circ$ . Дуга  $v_\mu^\circ v_1^\circ$  целиком ниже дуги  $v_0 v_m$ , тогда, очевидно, функционал  $H$  может достигать максимума только на кривой  $v_0 v_1^\circ v_\mu^\circ$ . Всякую другую кривую можно проварировать, полагая  $\delta v < 0$  в точках выше дуги  $v_\mu^\circ v_1^\circ$ , где  $\Phi < 0$ , и  $\delta v > 0$  в точках ниже дуги  $v_\mu^\circ v_1^\circ$ , где  $\Phi > 0$ , так что согласно (7.1) получим  $\delta H > 0$  (направление варьирования показано на чертеже стрелками).

Кривой  $v_0 v_1^\circ v_\mu^\circ$  соответствует движение:

отрезок  $v_0 v_1^\circ$ , — начальная скорость оказалась слишком велика и ракета должна подниматься некоторое время, пока в момент времени  $t_1$  на высоте  $y_1$  ее скорость не станет  $v_1^\circ$ ;

дуга  $v_1^\circ v_\mu^\circ$ , — с этого момента должно начаться постепенное сгорание заряда и движение при выполнении условия (7.2);

отрезок  $v_\mu^\circ v_\mu$  — после выгорания всего заряда остаток пути ракета полетит как тело постоянной массы.

2°. Начальная скорость  $v_0 < v_1^\circ$ , но  $v_m > v_\mu^\circ$ . Тогда дуга  $v_\mu^\circ v_1^\circ$  и дуга  $v_0 v_m$  кривой (1.3) пересекутся в точке  $v^*$  (фиг. 17).

Функционал  $H$  может достигать максимума лишь на кривой  $v_0 v^* v_\mu^\circ v_\mu$ , так как только в этом случае любая допустимая вариация дает  $\delta H \leq 0$ .

Кривой  $v_0 v^* v_\mu^\circ v_\mu$  соответствует движение:

дуга  $v_0 v^*$ , — начальная скорость оказалась слишком мала и надо мгновенно сжечь часть заряда, чтобы повысить скорость до величины  $v^*$ ;

дуга  $v^* v_\mu^\circ$ , — происходит постепенное сгорание заряда и движение при выполнении условия (7.2);

отрезок  $v_\mu^\circ v_\mu$ , — заряд выгорел, движется пустая ракета.

3°. Случай  $v_m < v_\mu^\circ$  (фиг. 18). Дуга  $v_\mu^\circ v_1^\circ$  лежит выше области  $D$ . Максимум  $H$  может достигаться лишь на кривой  $v_0 v_m v_\mu$ , а это значит:

дуга  $v_0 v_m$ , — заряд сгорает мгновенно в начальный момент;

отрезок  $v_m v_\mu$ , — ракета движется как тело, брошенное со скоростью  $v_m$ , причем  $v_m$  определяется формулой (1.3) для  $f = \mu$ ; очевидно,  $y_m = y_0 = 0$ .

Если начальная скорость  $v_0 = 0$ , то возможны только случаи 2° и 3°.

Мы получили, что при любом значении  $\mu$  заряд должен сгорать весь без остатка, а это значит, что заряд должен составлять возможно большую часть массы ракеты. В пределе получим, что ракета должна сгорать вся без остатка, причем должна догорать в момент достижения наибольшей высоты ( $v_\mu^\circ = 0$ ), т. е. наилучшее  $\mu = 0$  (фиг. 19).

Если сопротивление задать в виде  $\varphi(v) = cF(v)$ , где  $F(v)$  — закон сопротивления, а  $c$  — баллистический коэффициент полной ракеты, то вместо (7.2) будем иметь

$$f = \frac{c}{gV_r} [vF(v) + V_r(vF(v) - F(v))] \quad (7.3)$$

т. е. опять вполне определенную кривую в плоскости  $f/v$ , и все рассуждения будут те же. Можно показать, что задача в этом случае целиком сводится к квадратурам.

**§ 8. Закон сгорания и движения в случае однородной атмосферы и квадратичного закона сопротивления.** Подставляя (7.2) в (4.2) и разрешая относительно  $dt$ , получим

$$dt = - \frac{v^2 + 4V_r v + 2V_r^2}{gv(v + 2V_r)} dv \quad (8.1)$$

Интегрируя в пределах от  $v_1^\circ$  до  $v$  и опуская для простоты значки  $^\circ$ , получим

$$t - t_1 = \frac{1}{g} \left[ (v_1 - v) + V_r \ln \frac{v_1^2 + 2V_r v_1}{v^2 + 2V_r v} \right] \quad (v_1 \geq v \geq v_\mu) \quad (8.2)$$

что в соединении с формулой (7.2) дает в параметрическом виде невыгоднейший закон изменения массы.

Полагая  $v = v_\mu$  в формуле (8.2), получим время сгорания

$$\tau = \frac{1}{g} \left[ (v_1 - v_\mu) + V_r \ln \frac{v_1^2 + 2V_r v_1}{v_\mu^2 + 2V_r v_\mu} \right] \quad (8.3)$$

Для получения закона движения умножим обе части (8.1) на  $v$ . Интегрируя от  $v_1$  до  $v$ , получим

$$y - y_1 = \frac{1}{2g} (v_1 - v) (v_1 + v + 4V_r) - \frac{2V_r^2}{g} \ln \frac{v_1 + 2V_r}{v + 2V_r} \quad (8.4)$$

Это уравнение вместе с (8.2) дает закон движения в параметрической форме. Значения  $v_0$  и  $v_1$  получим непосредственно из формулы (7.2), полагая  $f = \mu$  и  $f = 1$  и решая алгебраические уравнения относительно  $v$ .

В случае 2° вместо  $v_1$  в формулы (8.2), (8.3) и (8.4) войдет  $v^*$ , которое определим, решая совместно (7.2) и (1.3).

Для нахождения  $y_1$  и  $t_1$  надо интегрировать уравнение вертикального подъема при постоянном  $f$ , равном 1, т. е. уравнение

$$\frac{dv}{dt} = -cv^2 - g$$

Полагая  $v = v_0$ ,  $y = 0$  для  $t = 0$ , получим

$$y(v) = \frac{1}{2c} \ln \frac{cv_0^2 + g}{cv^2 + g}, \quad t(v) = \frac{1}{\sqrt{cg}} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c}{g}} v_0 - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c}{g}} v \right) \quad (8.5)$$

Значения  $y_1$  и  $t_1$  найдем, полагая в этих формулах  $v = v_1$ . Для случая 2° ясно, что  $y^* = t^* = 0$ .

Для участка движения с массой  $\mu$ , т. е. после выгорания заряда, легко получить формулы, аналогичные (8.5), и найти полную высоту подъема, наибольшую возможную для данных  $\mu$ ,  $V_r$  и  $c$ , а также полное время полета.

**9. Неоднородная атмосфера.** При подъеме на сколько-нибудь значительные высоты необходимо учитывать изменение плотности воздуха. Зависимость плотности от высоты для наших целей удобно представить в виде

$$H(y) = \frac{\rho(y)}{\rho_0} = \exp \left( - \int_0^y \alpha(y) dy \right) \quad (9.1)$$

Приведем значения  $\alpha = \alpha(y)$  для летнего распределения температур:

$y_{\text{км}} = 0$	2	4	6	8	10	12
$10^4 \alpha(y) = 0.969$	1.029	1.088	1.137	1.213	1.405	1.545

Для  $y \geq 12$  км  $\alpha = 1.545 \times 10^{-4}$ , так как в стратосфере температура постоянна.

Примем, как обычно в баллистике, для сопротивления

$$\varphi(v, y) = cH(y)F(v) \quad (9.2)$$

Тогда из (6.6) получим соотношение между  $f$ ,  $v$  и  $y$ :

$$f = \frac{c}{gV_r} [vF + V_r(vF' - F)] \exp \left( - \int_0^y \alpha(y) dy \right) \quad (9.3)$$

отличающееся от (7.3) наличием экспоненциального множителя, который меньше или равен единице.

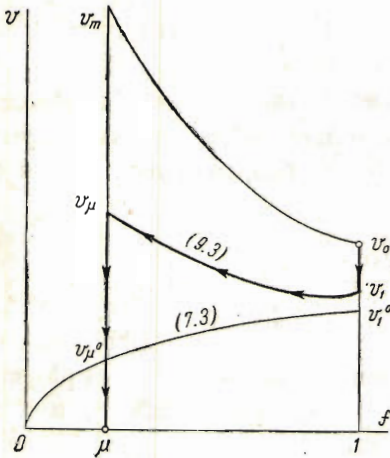
Если задать зависимость  $y(f)$  или  $y(v)$ , то уравнение (9.3) выражает некоторую кривую в плоскости  $fv$ . Мы возьмем такую зависимость  $y(f)$ , которая получится из (6.1) при начальном условии  $y(1) = 0$  для варьируемой функции  $v(f)$ . Таким образом кривая (9.3) будет зависеть от того, какую



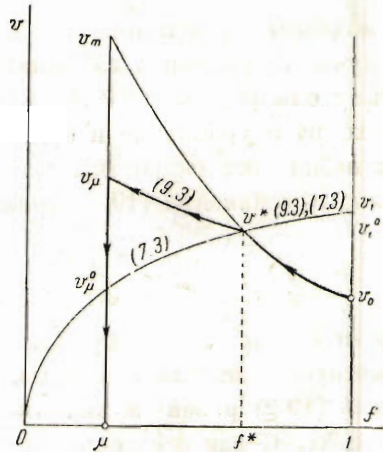
функцию  $v(f)$  мы будем варьировать. Легко видеть, что кривая (9.3) лежит в плоскости  $f/v$  не ниже, чем (7.3). Точки пересечения кривой (9.3) с прямыми  $f = \mu$  и  $f = 1$  будем обозначать  $v_\mu$  и  $v_1$  (фиг. 20).

Как и для однородной атмосферы, легко видеть, что максимум функционала  $H$  может достигаться лишь на такой кривой, соединяющей точки  $(1, v_0)$  и  $(\mu, 0)$ , которая частью совпадает с границей области  $D$ , а внутри области совпадает с кривой (9.3) (фиг. 18, 20, 21), так как всякую другую кривую можно так проварьировать, чтобы получить  $\delta H > 0$ .

Могут быть, как и прежде, три различных вида экстремального движения



Фиг. 20.



Фиг. 21.

в зависимости от взаимного расположения кривой (9.3) и области  $D$ , причем расположение кривой (9.3) определяется расположением кривой (7.3).

1°. Начальная скорость  $v_0 > v_1^0$ , т. е. дуга  $v_\mu^0 v_1^0$  кривой (7.3), лежит целиком ниже дуги  $v_0 v_m$ .

Это значит, что в начальный момент скорость слишком велика, при  $y = 0$  уравнение (9.3) не удовлетворяется и, следовательно, скорость должна упасть до значения  $v_1 < v_0$ , причем  $v_1 > v_1^0$ , так как экспоненциальный множитель в уравнении (9.3) меньше 1 при  $y \neq 0$ .

Для нахождения  $v_1$  надо интегрировать уравнение вертикального подъема с постоянной массой и определить значения  $y$  и  $v$ , удовлетворяющее уравнению (9.3) при  $f = 1$ , а также соответствующее значение  $t$ . Это и будут  $y_1$ ,  $v_1$  и  $t_1$ . Движению ракеты соответствует кривая  $v_0 v_\mu v_1$  (фиг. 20).

2°. Дуга  $v_\mu^0 v_1^0$  кривой (7.3) пересекается с дугой  $v_0 v_m$  в точке  $v^*$ . Так как кривая (9.3) лежит не ниже, чем (7.3), то ясно, что на участке  $(f^*, 1)$  наилучшим может быть только мгновенное сгорание части заряда в самом начале полета, — дуга  $v_0 v^*$ . В этом случае на участке  $(f^*, 1)$  кривые (9.3) и (7.3) совпадают, так как  $y^* = y_0 = 0$ .

В точке  $v^*$  уравнение (9.3) удовлетворяется и должно начаться постепенное сгорание заряда, — дуга  $v^* v_\mu$ ; кривая (9.3) будет выше кривой (7.3).

Значение  $v^*$  определится точно так же, как и для однородной атмосферы, т. е. совместным решением уравнения (1.3) и уравнения (9.3), в котором надо положить  $y \equiv 0$ .

3°. Случай  $v_m < v_{\mu}^{\circ}$ , т. е. дуга  $v_{\mu} v_1^{\circ}$  кривой (7.3), а значит (9.3) расположены целиком выше области  $D$ . Лучше всего сжечь весь заряд в самом начале полета (фиг. 18).

Если  $v_0 = 0$ , то могут быть, очевидно, лишь случаи 2° и 3°

10. Исследование движений при постепенном сгорании заряда с выполнением условия (9.3). Подставив выражение (9.3) в общее уравнение движения (4.2), получим уравнение экстремального движения

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha V_r [V_r (vF' - F) + vF] - g(F + V_r F')}{F + 2V_r F' + V_r^2 F''} \quad (10.1)$$

Начальными условиями будут  $v = v_1$ ,  $y = y_1$  при  $t = t_1$ .

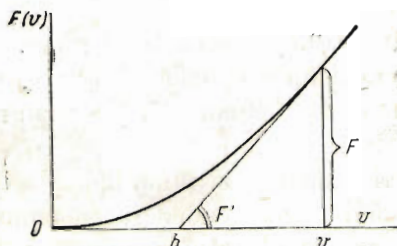
В случае 2° индекс 1 заменяется на индекс \*.

В силу однородности (10.1) относительно баллистического коэффициента, он не входит в уравнение и будет влиять только через начальные условия.

При небольших скоростях можно принять квадратичный закон сопротивления, и уравнение (10.1) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha(y) V_r v (v + V_r) - g(v + 2V_r)}{v^2 + 4V_r v + 2V_r^2} v \quad (10.2)$$

Характер движения определится знаком числителя. Для данного  $V_r$  и  $\alpha$  существует одно положительное значение скорости  $v_{cr}$ , при котором числитель (10.2) равен нулю. Значения  $v_{cr}$  при различных  $V_r$  и  $\alpha$  приведены в табл. 1, где все скорости даны в м/сек.



Фиг. 22.

Таблица 1

$V_r$	$\alpha, v_{cr}$	$\alpha = 0.969 \times 10^{-4}$	$\alpha = 1.545 \times 10^{-4}$
		$v_{cr} \text{ max}$	$v_{cr} \text{ min}$
1000		180	127
1500		125	85
2000		98	67
2500		80	56

Могут представиться различные случаи:

а) если в начале постепенного сгорания  $v > v_{cr}$ , то числитель положителен и движение будет ускоренным, так как  $v_{cr}$  с высотой убывает;

б) если в начале постепенного сгорания  $v < v_{cr}$ , то  $dv/dt < 0$  и движение замедленное, но потом вследствие убывания  $v_{cr}$  числитель может стать положительным, а значит и останется положительным. Движение сперва замедленное, а потом ускоренное;

в) наконец (когда, например,  $v < v_{cr \text{ min}}$ ), числитель отрицателен и движение все время замедленное.

В частности, при  $\rho \equiv \rho_0$ , т. е. в случае однородной атмосферы, имеем  $\alpha \equiv 0$  и из (10.1) видно, что движение всегда будет замедленным.

Табл. 1 показывает, что все значения  $v_{cr}$  находятся в области применимости квадратичного закона сопротивления, когда температура воздуха

не играет роли. Можно показать, что при больших скоростях числитель выражения (10.1) положителен, также и при учете влияния понижения температуры на числа Маха, и значит движение будет ускоренным.

Характер изменения  $v$  является существенным, так как мы возьмем потом  $v$  в качестве параметра, через который выразим время, путь и массу.

Дадим одно следствие [формулы (9.3)]. Умножив (9.3) на  $M_0 g$ , получим

$$Mg = M_0 c H(y) F(v) \left[ \frac{v}{V_r} + \frac{vF' - F}{F} \right]$$

но  $M_0 c H F$  есть сила сопротивления воздуха  $Q$ , а скобку преобразуем, заменяя  $F = (v - b) F'$  согласно фиг. 22. Имеем

$$Mg = Q \left[ \frac{v}{V_r} + \frac{b}{v - b} \right] \tag{10.3}$$

Для квадратичного закона сопротивления  $b = v/2$  и  $b/(v - b) = 1$ , поэтому

$$Mg = Q \left[ \frac{v}{V_r} + 1 \right] \quad \text{откуда} \quad Q < Mg$$

Исследование скобки в (10.3) при различных скоростях с учетом влияния температуры дает  $Q < 1,5 Mg$  для  $V_r < 2500$  м/сек, т. е. при сгорании заряда движение должно происходить с такой скоростью, чтобы сила сопротивления воздуха была меньше 1.5 силы веса, а при квадратичном законе сопротивления — меньше силы веса.

**11. Расчет движения и закона изменения массы.** Движение ракеты при постоянной массе рассчитывается, как для обычного снаряда. При мгновенном же сгорании заряда нет никакого движения, так как ракета не успевает сдвинуться с места. Остается рассчитать движение ракеты при постепенном изменении массы по наивыгоднейшему закону.

Мы получили в п° 10 уравнение экстремального движения (10.1), которое можно представить в виде

$$\frac{dv}{pt} = \alpha V_r \frac{V_r F'(v)(v - A) + F(v)(v - B)}{F(v) + 2V_r F'(v) + V_r^2 F''(v)} \quad \left( A = \frac{g}{\alpha V_r}, \quad B = V_r + A \right) \tag{11.1}$$

Заменяя в левой части  $dv/dt = v dx/dy$ , получим

$$\alpha dy = \frac{F(v) + 2V_r F'(v) + V_r^2 F''(v)}{V_r F'(v)(v - A) + F(v)(v - B)} \frac{v}{V_r} dx \tag{11.2}$$

В стратосфере выше 12 км температура постоянна и  $\alpha = \alpha^* = \text{const.}$  Плотность изменяется по закону

$$\rho(y) = \rho^* e^{-\alpha^*(y-h)}$$

где  $\rho^*$  — плотность на высоте  $h = 12$  км. Согласно (11.1) коэффициенты  $A$  и  $B$  также постоянны и (11.2) принимает вид

$$dy = \frac{1}{\alpha V_r} v G(v) dx \tag{11.3}$$

где через  $G(v)$  обозначена дробь в правой части (11.2). Отсюда

$$y - y_1 = \frac{1}{\alpha V_r} \int_{v_1}^{v_2} v G(v) dx \tag{11.4}$$

Эта квадратура может быть взята в элементарных функциях, если закон сопротивления имеет, например, вид  $F(v) = R_1(v) \sqrt[k]{R_2(v)}$ , где  $R_1$  и  $R_2$  — рациональные функции, а  $k$  — действительное. В этом случае функция  $G(v)$  будет после сокращения рациональной дробью.

В нижних слоях атмосферы (до 12 км) —  $\alpha$ ,  $A$  и  $B$  не будут постоянными и переменные в (11.2), вообще говоря, не разделяются.

Однако величина  $A$  не велика по сравнению с  $v$  и  $V_r$ , обычно  $A \approx 30 \div 40$  м/сек, и изменения  $y$  настолько мало влияют на правую часть (11.2), что можно заменить  $A$  и  $B$  средними значениями на участке интегрирования (от замены  $y=0$  на  $y=12$  км правая часть (11.2) изменяется примерно на 0.5%). Тогда переменные в уравнении (11.2) можно разделить

$$\alpha(y) dy = \bar{G}(v) \frac{v}{V_r} dv \quad (11.5)$$

где через  $\bar{G}(v)$  обозначена функция  $G(v)$  после замены  $A$  и  $B$  их средними значениями. Интегрируя, получим

$$\int_{y_1}^y \alpha(y) dy = \frac{1}{V_r} \int_{v_1}^v v \bar{G}(v) dv \quad (11.6)$$

Интеграл в левой части согласно (9.1) равен

$$\int_{y_1}^y \alpha(y) dy = - \ln \frac{\rho(y)}{\rho(y_1)} \quad (11.7)$$

где величина плотности  $\rho(y)$  берется из таблиц. Правая часть (11.6) аналогична правой части (8.4) и, следовательно, решение уравнения (11.5) получается квадратурой.

Для большей точности надо учитывать не только изменение  $\alpha$ , но и изменение температуры и ее влияние на числа Маха и закон сопротивления.

Из баллистики известно, что при температуре  $T(y)$  сопротивление выражается формулой

$$\varphi(v, y) = cH(y) \frac{1}{\theta^2} F(\theta v) \quad \left( \theta(y) = \sqrt{\frac{T_0}{T(y)}} \right) \quad (11.8)$$

где  $F(v)$  — закон сопротивления у земли при нормальной температуре  $T_0$ .

Приводим значения  $\theta(y)$  для различных значений  $y$  для летнего распределения температур:

$y_{\text{км}} =$	0	2	4	6	8	10	12
$\theta(y) =$	1.000	1.023	1.044	1.071	1.101	1.127	1.140

Эти данные показывают, что функция  $\theta(y)$  изменяется до 12 км не более 14%; выше 12 км  $\theta = \text{const}$ .

Используя (11.8), получаем вместо (11.2)

$$\alpha(y) dy = \frac{F(\theta v) + 2V_r \theta F'(\theta v) + V_r^2 \theta^2 F''(\theta v)}{V_r \theta F'(\theta v)(v - A_1) + F(\theta v)(v - B_1)} \frac{v}{V_r} dv \quad (11.9)$$

где

$$A_1 = \frac{g}{\beta V_r}, \quad B_1 = V_r + A_1, \quad \beta(y) = \alpha(y) - \frac{1}{T} \frac{dT}{dy} \quad (11.10)$$

или, короче,

$$\alpha(y) dy = \frac{1}{V_r} v G(v, y) dv \quad (11.11)$$

При получении (11.9) мы пренебрегли слагаемым, содержащим логарифмическую производную от  $\theta$ , вследствие его незначительности.

Для численного интегрирования (11.11) можно разбить высоту атмосферы от 0 до 12 км на несколько слоев, в каждом из которых считать величины  $\theta$  и  $A_1$  постоянными и равными среднему значению в слое. Тогда интегрирование в каждом слое сведется к подсчету квадратур.

В стратосфере  $T = \text{const}$ , и значит  $\beta = \alpha = \text{const}$ ,  $A_1 = A = \text{const}$ . Учет температуры сведется лишь к замене  $F(v)$  на  $F(\theta v)$  в уравнении (11.2) и интегрированию в квадратурах по формуле, аналогичной (11.4). Интегрируя (11.3), (11.5) или (11.11), получим зависимость вида  $y = y(v)$ . Имея ее, нетрудно выразить время через скорость.

При  $\alpha = \text{const}$ , поделив обе части (11.2) на  $v$ , получим

$$t - t_1 = \frac{1}{\alpha V_r} \int_{v_1}^v G(v) dv \quad (11.13)$$

Для переменного  $\alpha$  с учетом температуры получим соответственно

$$t - t_1 = \frac{1}{V_r} \int_{v_1}^v \frac{G_1[v, y(v)]}{\alpha[y(v)]} dv \quad (11.14)$$

причем  $y(v)$  под интегралом согласно (11.12).

Подставляя, далее, эту зависимость (11.12) в (9.3), получим

$$j = \frac{cH[y(v)]}{gV_r} [vF(v) + V_r(vF'(v) - F(v))] = \frac{cHF}{gV_r} [v + V_r(n - 1)] \quad (11.15)$$

где  $n(v) = vF'(v)/F(v)$  есть так называемый показатель сопротивления. Для закона сопротивления Сиацци имеются таблицы этой функции. С учетом температуры

$$j = \frac{cH[y(\theta)]}{gV_r \theta^2} [vF(\theta v) + V_r(\theta v F'(\theta v) - F(\theta v))]$$

Выражение (11.15) вместе с (11.13) или выражение (11.16) вместе с (11.14) дают в параметрическом виде закон изменения массы, обеспечивающий наибольшую высоту подъема.

Метод определения значений параметра  $v$ , соответствующих началу и концу сгорания, а также значений  $t_1$  и  $y_1$  ясен из п. 9.

Для числового расчета по приведенным выше формулам надо знать закон сопротивления для тела, имеющего форму ракеты, зависимость плотности от высоты и зависимость температуры от высоты.

При скоростях  $v < 1000$  м/сек член  $V_r^2 F''(v)$  в числителе выражений (11.2) и (11.9) будет иметь порядок других слагаемых вследствие наличия множителя  $V_r^2$ , и поэтому таблицы для  $F(v)$  должны быть достаточно точными.

В случае короткого сопла к правой части уравнения движения надо, как было указано в начале статьи, добавить член, равный по величине  $S(p - p_a)$ . Чтобы учесть этот член, разобьем его на два слагаемых:  $S p$  и  $-S p_a$ .

Первое слагаемое пропорционально секундному расходу массы, т. е. пропорционально  $dM/dt$ . Объединим его с выражением  $V_r dM/dt$ . Второе слагаемое зависит только от атмосферного давления. Объединим его с силой сопротивления. В итоге получим, что для учета повышенного давления на срезе сопла достаточно взять несколько большее значение  $V_r$ , а к закону сопротивления прибавить постоянное слагаемое.

Заметим, что наивыгоднейшая функция  $f(t)$  на участке постепенного сгорания довольно часто, особенно в случае малого относительного веса заряда, весьма близка к линейной функции. Поэтому в качестве первого приближения можно взять режим сгорания с постоянным секундным расходом. причем сгорание должно начинаться в момент  $t_1$  (или  $t^*$ ), а кончаться в момент  $t_\mu$ . Величину секундного расхода легко определить, так как масса заряда дана, а время горения  $\tau = t_\mu - t_1$ .

Мы получили, что иногда заряд или его часть выгоднее всего сжечь мгновенно. Это означает, что сгорание должно происходить с наибольшим секундным расходом массы. При этом, если имеет место случай 2°, для достижения наивыгоднейшей скорости движения  $v^*$  придется израсходовать часть массы, большую чем при мгновенном сгорании.

Поступила в редакцию  
8 IV 1945

#### D. E. OKHOTSIMSKY. — ON THE THEORY OF ROCKET PROPULSION

Part I takes up the problem of the maximum range of a rocket, fired with an initial velocity at an angle to the horizon in a non-resistant medium. In paragraph 3 the author points out the necessity of instantaneous combustion of the charge. In paragraph 2, it is shown that, if the direction of the initial velocity is sufficiently near to the vertical, this instantaneous combustion must take place at a definite moment in the flight; and if not, it must take place at the moment of projection.

Part II discusses the problem of the ascent of the rocket to a maximum height, including in the calculations changes in the density of the air and in its temperature corresponding to altitude. In paragraphs 7 and 9, the author reaches the conclusion that depending on the initial velocity and the ballistic properties of the rocket, there may be three types of the most efficient expenditure of the fuel.

These cases are represented in fig. 20, 21 and 18, where the vertical ordinates correspond to the motion of the constant mass, while the upper boundary of the domain corresponds to instantaneous combustion.

During gradual combustion, the relationship (9.3) between velocity  $v$ , mass  $f$  and altitude  $y$  holds. The case of gradual combustion is characterized by parametric formulae (11.16) and (11.14). The solution is reduced to the integration of equation (11.2) and to the quadrature; while in the isothermic case, the quadratures alone are sufficient. If atmospheric resistance is governed by the law (4.5), the quadratures may be taken in elementary functions. The method of determination of the magnitudes of parameters corresponding to the beginning and end of gradual combustion is given in paragraph 9. Paragraph 11 shows how to make corrections for additional pressure in the equation of motion of a rocket with a short nozzle.