Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946.

ВЫНУЖДЕННЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО СОБОЙ ВЫРЕЗ В БЕСКОНЕЧНО УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Я. А. Миндлин

(Москва)

Вынужденными волнами на поверхности бесконечного упругого полупространства, граничащего с пустотой, занимался в 1903 г. H. Lamb [1].

Вопросам теории распространения упругих колебаний в бесконечном упругом полупространстве посвящены работы В. Смирнова и С. Соболева [2], Е. Нарышкиной [3] и других авторов. Нами были рассмотрены задачи об упругих колебаниях круга и плоскости с круговым вырезом, а также задача о диффракции плоской упругой волны относительно круга и шара [4] (неустановившиеся колебания).

В настоящей работе рассматривается задача о распространении колебаний по поверхности бесконечного кругового цилиндра, представляющего собой вырез в бесконечном упругом пространстве.

Предполагается, что вынужденные колебания вызваны возмущающими периодическими силами, равномерно распределенными по окружности.

1. Пусть в бесконечном упругом пространстве дан вырез в виде бесконечно длинного кругового цилиндра диаметра $2R$, ось которого примем за ось z, а r, θ суть полярные координаты точек плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра. При нашем предположении, т. е. при рассмотрении осесимметрической задачи, имеем

$$u_\theta = 0, \qquad \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0 \tag{1.1}$$

где u_r — перемещение в направлении радиуса, u_z — перемещение в направлении оси цилиндра, u_θ — перемещение в направлении θ.

Векторное уравнение движения однородной и изотропной упругой среды при отсутствии массовых сил имеет вид

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u} - \mu\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{u} = \rho\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор смещения, λ, μ — постоянные Ляме, ρ — плотность.

Разобьем вектор смещения $\mathbf{u}$ на сумму двух векторов потенциального и соленоидального:

$$\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{rot}\,\psi \tag{1.3}$$

Тогда уравнение (1.2) будет удовлетворено, если мы положим

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\psi = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad \left(a = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\ b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right) \tag{1.4}$$

где ∇ — оператор Гамильтона. Формула (1.3), как известно, представляет собой общее решение уравнения (1.2). В силу условия (1.1) достаточно взять как скалярный, так и векторный потенциал зависящими только от r и z. К тому же векторный потенциал можно всегда выбирать таким образом, чтобы направление этого вектора в каждой точке было перпендикулярно к меридиональной плоскости. Выражая градиент и вихрь в цилиндрических координатах и имея в виду, что $\nabla^2\psi = \operatorname{grad}\operatorname{div}\psi - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\psi$, получаем

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\psi \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\psi + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1.6}$$

Для компонентов вектора напряжения, действующего на площадку границы, имеем формулы

$$\widehat{rr} = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \lambda\frac{\partial u_z}{\partial z} + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \widehat{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{1.7}$$

где u_r и u_z определяются выражениями (1.5). Пусть

$$\varphi = e^{i(pt+\xi z)}\varphi_1, \qquad \psi = e^{i(pt+\xi z)}\psi_1, \qquad (r \geqslant R) \tag{1.8}$$

Подставляя выражение (1.8) в (1.6), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi_1}{dr} - (\xi^2 - h^2)\varphi_1 = 0 && \left(h^2 = \frac{p^2}{a^2}\right) \\ &\frac{d^2\psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi_1}{dr} - \left[(\xi^2 - k^2) + \frac{1}{r^2}\right]\psi_1 = 0 && \left(k^2 = \frac{p^2}{b^2}\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

За интегралы уравнений (1.9) возьмем функции Макдональда $K_0(\sqrt{\xi^2 - h^2}\, r)$ и $K_1(\sqrt{\xi^2 - k^2}\, r)$, которые, как известно, при $\sqrt{\xi^2 - k^2} > 0$ и $r \to \infty$ стремятся к нулю по экспоненциальному закону.

Таким образом решения уравнений (1.6) при $r \geqslant R$ имеем в виде

$$\varphi = AK_0(\alpha r)\, e^{i(pt+\xi z)}, \qquad \psi = BK_1(\beta r)\, e^{i(pt+\xi z)} \tag{1.10}$$

где α и β — положительные действительные или положительные мнимые величины, определяемые соотношением

$$\alpha^2 = \xi^2 - h^2, \qquad \beta^2 = \xi^2 - k^2 \tag{1.11}$$

Интегралы (1.10) являются аналогичными решениям Лэмба для случая колебаний полупространства.

Подставляя (1.10) в (1.5), а затем полученные выражения в (1.7) и воспользовавшись при этом рекуррентными формулами для функций

$$K_0'(x) = -K_1(x), \qquad K_1'(x) = -K_0(x) - \frac{1}{x}K_1(x) \tag{1.12}$$

получим выражения для проекций вектора смещения и компонентов вектора напряжения на поверхности выреза $r = R$:

$$\begin{aligned} u_z^{(0)} &= [i\xi AK_0(\alpha R) - \beta BK_0(\beta R)]\, e^{i(pt+\xi z)} \\ u_r^{(0)} &= [-\alpha AK_1(\alpha R) - i\xi BK_1(\beta R)]\, e^{i(pt+\xi z)} \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\widehat{rz}\,|_{r=R} = \mu\{-2i\xi\alpha A K_1(\alpha R) + (2\xi^2 - k^2) B K_1(\beta R)\}\, e^{i(pt+\xi z)}$$

$$\widehat{rr}\,|_{r=R} = \mu\left\{\left[(2\xi^2 - k^2) K_0(\alpha R) + \frac{2\alpha}{R} K_1(\alpha R)\right] A + \right. \qquad (1.14)$$

$$\left. + 2i\xi\beta\left[K_0(\beta R) + \frac{1}{\beta R} K_1(\beta R)\right]\right\} e^{i(pt+\xi z)}$$

2. Предположим, что к поверхности выреза приложено нормальное напряжение, т. е.

$$\widehat{rz}\,|_{r=R} = 0, \qquad \widehat{rr}\,|_{r=R} = Y e^{i(pt+\xi z)} \qquad (2.1)$$

Тогда из выражений (1.14) находим постоянные A и B формул (1.10), которые определяются из уравнений

$$-2i\xi\alpha A K_1(\alpha R) + (2\xi^2 - k^2) B K_1(\beta R) = 0 \qquad (2.2)$$

$$\left[(2\xi^2 - k^2) K_0(\alpha R) + \frac{2\alpha}{R} K_1(\alpha R)\right] A + 2i\xi B\left[\beta K_0(\beta R) + \frac{1}{R} K_1(\beta R)\right] = \frac{Y}{\mu}$$

Решая уравнения (2.2), находим значения постоянных A и B:

$$A = \frac{(2\xi^2 - k^2) K_1(\beta R)}{F(\xi)} \frac{Y}{\mu}, \qquad B = \frac{2i\xi\alpha K_1(\alpha R)}{F(\xi)} \frac{Y}{\mu} \qquad (2.3)$$

где для сокращения письма обозначено

$$F(\xi) = (2\xi^2 - k^2)^2 K_0(\alpha R) K_1(\beta R) - 4\xi^2\alpha\beta K_0(\beta R) K_1(\alpha R) - \frac{2k^2}{R}\alpha K_1(\alpha R) K_1(\beta R) =$$

$$= K_1(\alpha R) K_1(\beta R)\left[(2\xi^2 - k^2)^2 \frac{K_0(\alpha R)}{K_1(\alpha R)} - 4\xi^2\alpha\beta\frac{K_0(\beta R)}{K_1(\beta R)} - \frac{2k^2}{R}\alpha\right] \qquad (2.4)$$

Подставляя в (1.13) вместо A и B их выражения (2.3), находим значения смещений на поверхности выреза $r = R$

$$u_z^{(0)} = \frac{i\xi\,[(2\xi^2 - k^2) K_0(\alpha R) K_1(\beta R) - 2\alpha\beta K_0(\beta R) K_1(\alpha R)]\, e^{i\xi z}}{F(\xi)} \frac{Y}{\mu} e^{ipt}$$

$$u_r^{(0)} = \frac{k^2\alpha K_1(\alpha R) K_1(\beta R)\, e^{i\xi z}}{F(\xi)} \frac{Y}{\mu} e^{ipt} \qquad (2.5)$$

В случае сосредоточенной силы, действующей по окружности, являющейся линией пересечения плоскости $z = 0$ с поверхностью цилиндра, пишем по Лэмбу

$$Y = -\frac{1}{2\pi} Q\, d\xi$$

Таким образом, формально интегрируя правые части равенств (2.5) от $-\infty$ до $+\infty$, получаем

$$u_z^{(0)} = \frac{-iQ}{2\pi\mu} e^{ipt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\xi\,[(2\xi^2 - k^2) K_0'(\alpha R) K_1(\beta R) - 2\alpha\beta K_0(\beta R) K_1(\alpha R)]\, e^{i\xi z}\, d\xi}{F(\xi)} =$$

$$= -\frac{iQ}{2\pi\mu} e^{ipt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi\,[(2\xi^2 - k^2) K_0(\alpha R) / K_1(\alpha R) - 2\alpha\beta K_0(\beta R) / K_1(\beta R)] e^{i\xi z}\, d\xi}{(2\xi^2 - k^2)^2 K_0(\alpha R) / K_1(\alpha R) - 4\xi^2\alpha\beta K_0(\beta R) / K_1(\beta R) - 2k^2\alpha / R}$$

$$u^{(0)}{}_r = \frac{-Q}{2\pi\mu} e^{ipt} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2\alpha K_1(\alpha R) K_1(\beta R) e^{i\xi z}\, d\xi}{F(\xi)} =$$

$$= \frac{-Q}{2\pi\mu} e^{ipt} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2\alpha e^{i\xi z}\, d\xi}{(2\xi^2 - k^2)^2 K_0(\alpha R) / K_1(\alpha R) - 4\xi^2\alpha\beta K_0(\beta R) / K_1(\beta R) - 2k^2\alpha / R} \tag{2.6}$$

3. Как ниже докажем, существует такой промежуток значений для частоты $p_0 \leqslant p < \infty$, что при любом значении p из этого промежутка подинтегральные функции в выражениях (2.6) имеют полюс первого порядка для двух вещественных значений ξ, равных между собой по абсолютной величине. Это как раз соответствует случаю существования решения однородной задачи, т. е. задачи о свободных колебаниях. В случае резонанса, когда частота возмущающей силы будет равна частоте свободных колебаний, в формулах (2.6) интегралы будем понимать в смысле их главного значения по Коши и к результату будем прибавлять свободные волны так, чтобы в окончательном результате иметь волны, идущие от источника колебаний.

Исследованию свободных колебаний посвящено наше сообщение [5].

Для получения условий отсутствия напряжений на поверхности цилиндра в (2.2) полагаем $Y=0$, тогда получаем

$$F(\xi) = K_1(\alpha R) K_1(\beta R) \left[(2\xi^2 - k^2)^2 \frac{K_0(\alpha_1 R)}{K_1(\alpha_1 R)} - 4\xi^2\alpha\beta \frac{K_0(\beta R)}{K_1(\beta R)} - \frac{2k^2}{R}\alpha \right] = 0 \tag{3.1}$$

Таким образом корни уравнения (3.1) дают нам условие существования решения однородной задачи и к тому же они являются полюсами подинтегральных функций в выражениях (2.6). Будем находить сначала корни уравнения (2.6) в интервале $k < \xi < \infty$. Если обозначить через $\vartheta = \xi / p$ величину, обратную скорости распространения волны вдоль цилиндра, а через $\tau = 1/(pR)$ величину, обратную произведению частоты на радиус выреза, то уравнение (3.1) можно представить в виде

$$p^4 K_1(\alpha_1/\tau) K_1(\beta_1/\tau) \left\{ \left(2\vartheta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 \frac{K_0(\alpha_1/\tau)}{K_1(\alpha^1/\tau)} - 4\vartheta^2\alpha_1\beta_1 \frac{K_0(\beta_1/\tau)}{K_1(\beta_1/\tau)} - \frac{2}{b^2}\tau\alpha_1 \right\} = 0 \tag{3.2}$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{\vartheta^2 - \frac{1}{a^2}}, \qquad \beta_1 = \sqrt{\vartheta^2 - \frac{1}{b^2}} \qquad \left(\vartheta > \frac{1}{b}\right) \tag{3.3}$$

Так как значения функции $K_1(\alpha_1 pR)$ и функции $K_1(\beta_1 pR)$ при $\vartheta > 1/b$ оказываются больше нуля, то корни уравнения (3.2) в указанном интервале те же, что и корни уравнения

$$\Phi(\vartheta, \tau) = \left(2\vartheta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 \frac{K_0(\alpha_1/\tau)}{K_1(\alpha_1/\tau)} - 4\vartheta^2\alpha_1\beta_1 \frac{K_0(\beta_1/\tau)}{K_1(\beta_1/\tau)} - \frac{2}{b^2}\tau\alpha_1 = 0 \tag{3.4}$$

Из уравнения (3.4) следует, что скорость распространения волны по поверхности цилиндра зависит от произведения частоты на радиус выреза.

Для исследования уравнения (3.4) предварительно установим монотонный характер изменения как самой функции

$$f(x) = \frac{K_0(1/x)}{K_1(1/x)} \tag{3.5}$$

так и ее производной для всех неотрицательных значений x.

Для этого воспользуемся интегральными представлениями функций Макдональда. Имеем для $\zeta > 0$

$$K_n(\zeta) = \left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{1/2} \frac{e^{-\zeta}}{\Gamma\,(n+{}^1/_2)} \int\limits_0^\infty e^{-z} z^{n-1/2}\left(1+\frac{z}{2\zeta}\right)^{n-1/2} dz \qquad (n=0,1) \qquad (3.6)$$

Заменяя в (3.5) числитель и знаменатель их выражениями (3.7), имеем

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^\infty e^{-z} z^{-1/2}\left(1+\frac{xz}{2}\right)^{-1/2} dz\right]\left[\int\limits_0^\infty e^{-z} z^{1/2}\left(1+\frac{xz}{2}\right)^{1/2} dz\right]^{-1} \quad (3.7)$$

Дифференцируя по x обе части равенства (3.7), получаем

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{8}\left\{\left[\int\limits_0^\infty e^{-z} z^{1/2}\left(1+\frac{xz}{2}\right)^{-3/2} dz\right]\left[\int\limits_0^\infty e^{-z} z^{1/2}\left(1+\frac{xz}{2}\right)^{1/2} dz\right]^{-1} + \right.$$

$$+\left[\int\limits_0^\infty e^{-z} z^{-1/2}\left(1+\frac{xz}{2}\right)^{1/2} dz \int\limits_0^\infty e^{-z} z^{3/2}\left(1+\frac{xz}{2}\right)^{-1/2} dz\right] \times$$

$$\left.\times\left[\int\limits_0^\infty e^{-z} z^{1/2}\left(1+\frac{xz}{2}\right)^{1/2}\right]^{-2}\right\} < 0 \qquad (3.8)$$

Из формулы (3.5) следует, что $f(x) \to 1$ при $x \to 0$. Для нахождения предела $f(x)$ при $x \to \infty$ воспользуемся известным разложением функции $K_n(x)$ при n целом в окрестности начала координат. Имеем

$$K_n(x) = -I_n(x) \ln\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}(-1)^\nu \frac{(n-\nu-1)!}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\nu} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\,(n+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}\left[2C - \sum_1^{n+\nu}\frac{1}{m} - \sum_1^{\nu}\frac{1}{m}\right] \qquad (3.9)$$

где $I_n(x)$ — бесселева функция от мнимого аргумента, а C — постоянная Эйлера. Заменяя в формуле (3.5) числитель и знаменатель их выражениями (3.9) и переходя к пределу, получаем $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

В силу (3.8) приходим к заключению, что функция $f(x)$ при x, изменяющемся от нуля до бесконечности, убывает соответственно от 1 до 0.

Дифференцируя обе части равенства (2.13), убеждаемся, что $f''(x) > 0$.

Из формулы (3.8) находим, что $f'(x) \to -1/2$ при $x \to 0$.

Для нахождения предела функции $f'(x)$ при $x \to \infty$ продифференцируем обе части формулы (3.5), после чего, воспользовавшись (1.12), получаем

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left\{-1 + x\frac{K_0(1/x)}{K_1(1/x)} + \left[\frac{K_0(1/x)}{K_1(1/x)}\right]^2\right\} \qquad (3.10)$$

Из формулы (3.10) следует, что $f'(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Таким образом функция $f'(x)$ при x, изменяющемся от нуля до бесконечности, возрастает соответственно от $-1/2$ до 0. При обозначениях (3.5) уравнение (3.4) примет вид

$$\Phi(\vartheta, \tau) = \left(2\vartheta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 f\left(\frac{\tau}{\alpha_1}\right) - 4\vartheta^2\alpha_1\beta_1 f\left(\frac{\tau}{\beta_1}\right) - \frac{2}{b^2}\tau\alpha_1 = 0 \qquad (3.11)$$

Установим монотонный характер изменения функции $\Phi(\vartheta, \tau)$ как функции от τ при любом фиксированном $\vartheta > 1/b$ и $\tau \geqslant 0$. Имеем

$$\frac{\partial \Phi(\vartheta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\alpha_1}\left\{\left(2\vartheta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 f'\left(\frac{\tau}{\alpha_1}\right) - 2\alpha_1^2\left[2\vartheta^2 f'\left(\frac{\tau}{\beta_1}\right) + \frac{1}{b^2}\right]\right\} \tag{3.12}$$

или

$$\frac{\partial \Phi(\vartheta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\alpha_1}\left\{4\vartheta^4\left[f'\left(\frac{\tau}{\alpha_1}\right) - f'\left(\frac{\tau}{\beta_1}\right)\right] + \frac{1}{b^4} f'\left(\frac{\tau}{\alpha_1}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{2\vartheta^2}{b^2}\left[1 + 2f'\left(\frac{\tau}{\alpha_1}\right)\right] + \frac{2}{a^2}\left[2\vartheta^2 f'\left(\frac{\tau}{\beta_1}\right) + \frac{1}{b^2}\right]\right\} \tag{3.13}$$

Так как функция $f'(x)$ есть возрастающая функция для всех $x \geqslant 0$, то $f'(\tau/\alpha_1) < f'(\tau/\beta_1)$; к тому же $f'(x) < 0$ и $|f'(x)| \leqslant 1/2$. В силу этого первое слагаемое формулы (3.12), а также первые три слагаемых формулы (3.13) представляют собой отрицательные величины. Возможны два случая:

$$2\vartheta^2 f'\left(\frac{\tau}{\beta_1}\right) + \frac{1}{b^2} \geqslant 0, \qquad 2\vartheta^2 f'\left(\frac{\tau}{\beta_1}\right) + \frac{1}{b^2} \leqslant 0$$

В первом случае из формулы (3.12), а во втором из (3.13) следует, что

$$\frac{\partial \Phi(\vartheta, \tau)}{\partial \tau} < 0 \tag{3.14}$$

Таким образом нами доказано, что функция $\Phi(\vartheta, \tau)$, рассматриваемая как функция от τ, есть функция убывающая, когда τ изменяется от нуля до бесконечности, при любом фиксированном ϑ из промежутка $1/b < \vartheta < \infty$.

Функция $\Phi(\vartheta, \tau)$, согласно (3.11), при $\tau = 0$ равна

$$\Phi(\vartheta, 0) = M(\vartheta) = \left(2\vartheta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 - 4\vartheta^2\alpha_1\beta_1 \tag{3.15}$$

Уравнение

$$M(\vartheta) = 0 \tag{3.16}$$

представляет собой уравнение Релея [6], полное исследование которого проведено в работе Лэмба [1] и в работе С. Соболева [7]. Уравнение (3.16) имеет единственный вещественный положительный корень, лежащий в промежутке $1/b < \vartheta < \infty$, и другой, равный ему по модулю, отрицательный. Обозначим этот корень через $1/c$. Таким образом при $\tau = 0$ уравнение (3.11) имеет единственный вещественный положительный корень $\vartheta = 1/c$ и другой, равный ему по модулю, отрицательный. Производная $M'(\vartheta)$, как это доказано С. Соболевым, отрицательна для всех ϑ, лежащих в промежутке $1/c < \vartheta < \infty$. В этом можно убедиться непосредственным дифференцированием равенства (2.10), если учесть (2.9), что $\alpha_1 > \beta_1$. Таким образом имеем

$$\left(2\vartheta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 > 4\vartheta^2\alpha_1\beta_1 \qquad \text{при} \quad \vartheta < \frac{1}{c}$$
$$\left(2\vartheta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 < 4\vartheta^2\alpha_1\beta_1 \qquad \text{при} \quad \vartheta > \frac{1}{c}$$

Теперь уже нетрудно доказать существование единственного вещественного положительного корня τ у уравнения (3.11) при любом фиксированном ϑ из промежутка $1/b < \vartheta < 1/c$. Действительно, имеем

$$\Phi(\vartheta, 0) > 0, \qquad \Phi(\vartheta, \infty) < 0 \qquad \left(\frac{1}{b} < \vartheta < \frac{1}{c}\right)$$

В силу ранее доказанного, что функция $\Phi(\vartheta, \tau)$ как функция от τ есть функция убывающая, следует, что уравнение (2.16) имеет единственный вещественный положительный корень, лежащий в интервале $0 < \tau < \infty$, при любом фиксированном ϑ из промежутка $1/b < \vartheta < 1/c$.

Докажем, что при всяком фиксированном ϑ из промежутка $1/c < \vartheta < \infty$ уравнение (3.11) не имеет вещественного положительного корня. Имеем

$$\Phi(\vartheta, 0) < 0, \qquad \Phi(\vartheta, \infty) < 0 \qquad \left(\frac{1}{c} < \vartheta < \infty\right)$$

откуда и следует вышеупомянутое утверждение, так как функция $\Phi(\vartheta, \tau)$, как функция от τ, есть функция убывающая.

Остается доказать, что уравнение (3.11) имеет единственный вещественный положительный корень при $\vartheta = 1/b$. Подставляя $\vartheta = 1/b$ в (3.11), получаем

$$\Phi\left(\frac{1}{b}, \tau\right) = \frac{1}{b^4} f\left(\tau \Big/ \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}\right) - \frac{2}{b^2}\tau\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} = 0 \qquad (3.17)$$

Функция $\Phi(1/b, \tau)$ при τ, равном нулю, положительна, а при τ равном бесконечности отрицательна. Единственность корня уравнения (3.17) вытекает из постоянства знака производной $d\Phi/d\tau$ в интервале $0 < \tau < \infty$.

Таким образом нами доказано, что каждому значению частоты из промежутка $1/(qR) \leqslant p < \infty$, где q — корень уравнения (3.17), соответствует единственный вещественный положительный корень уравнения (3.11), лежащий в промежутке $1/b \leqslant \vartheta < 1/c$, и другой, равный ему по модулю, отрицательный. Иными словами, при свободных колебаниях частотам, изменяющимся от значения, равного отношению величины, обратной корню уравнения (3.17), к радиусу выреза до бесконечности, соответствует скорость распространения волны вдоль цилиндра, изменяющаяся между величиной, равной скорости поперечных волн, и величиной, равной скорости волны Релея. Переходим к исследованию уравнения (3.1), когда $h^2 < \xi^2 < k^2$.

Докажем, что в этом случае уравнение (3.1) не имеет корней. В силу условия (3.18) значение β становится чисто мнимым и равным $i\sqrt{k^2 - \xi^2}$, а значение функции $K_1(\alpha R)$ попрежнему остается больше нуля. Как известно, функция

$$K_n(x) = \frac{1}{2}\pi i \exp\left(\frac{1}{2}\pi n i\right) H_n^{(1)}(ix) \qquad (3.18)$$

где $H_n^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля, связанная с функцией Бесселя и Вебера известным соотношением $H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z)$, и, следовательно,

$$K_0(ix) = \frac{\pi}{2}\left[-Y_0(x) - iJ_0(x)\right], \qquad K_1(ix) = \frac{\pi}{2}\left[-J_1(x) + iY_1(x)\right] \qquad (3.19)$$

причем функции $K_0(ix)$ и $K_1(ix)$ при $x > 0$, как известно, не обращаются в нуль. В силу чего уравнение (3.1) при условии (3.17) примет вид

$$(2\xi^2 - k^2)^2 \frac{K_0(\alpha R)}{K_1(\alpha R)} - 4i\xi^2\alpha\bar{\beta}\, \frac{-Y_0(\bar{\beta}R) - iJ_0(\bar{\beta}R)}{-J_1(\bar{\beta}R) + iY_1(\bar{\beta}R)} - \frac{2k^2}{R}\alpha = 0 \qquad (3.20)$$

где $\bar{\beta} = \sqrt{k^2 - \xi^2}$, или (3.21)

$$(2\xi^2 - k^2)^2 \frac{K_0(\alpha R)}{K_1(\alpha R)} + 4\xi^2\alpha\bar{\beta}\, \frac{J_0(\bar{\beta}R)\, J_1(\bar{\beta}R) + Y_0(\bar{\beta}R)\, Y_1(\bar{\beta}R)}{J_1^2(\bar{\beta}R) + Y_1^2(\bar{\beta}R)} -$$

$$- \frac{2k^2}{R}\alpha - 4i\xi^2\alpha\bar{\beta}\, \frac{Y_0(\bar{\beta}R)\, J_1(\bar{\beta}R) - J_0(\bar{\beta}R)\, Y_1(\bar{\beta}R)}{J_1^2(\bar{\beta}R) + Y_1^2(\bar{\beta}R)} = 0 \qquad (3.22)$$

Пользуясь выражением для вронскиана [8] функций Бесселя

$$Y_0(x)\, J_1(x) - J_0(x)\, Y_1(x) = \frac{2}{\pi x} \tag{3.23}$$

тотчас же получаем, что коэффициент при мнимой единице в левой части выражения (3.22) отличен от нуля.

Таким образом доказано, что когда ξ определяется условием $h^2 < \xi^2 < k^2$ уравнение (3.1) или, что то же, уравнение (3.22) не имеет корней.

Теперь рассмотрим наличие корней у уравнения (3.1), когда $\xi^2 < h^2$. Докажем, что и в этом случае уравнение (3.1) не имеет корней. В силу условия $\xi^2 < h^2$ значение α становится чисто мнимым и равным $i\sqrt{h^2 - \xi^2}$.

Уравнение (3.1) при условии $\xi^2 < h^2$ и соотношениях (3.9) примет вид

$$\begin{gathered}(2\xi^2 - k^2)^2 \frac{Y_0(\bar{\alpha}R)\, J_1(\bar{\alpha}R) - J_0(\bar{\alpha}R)\, Y_1(\bar{\alpha}R)}{J_1^2(\bar{\alpha}R) + Y_1^2(\bar{\alpha}R)} + \\ + 4\xi^2\bar{\alpha}\bar{\beta} \frac{Y_0(\bar{\beta}R)\, J_1(\bar{\beta}R) - J_0(\bar{\beta}R)\, Y_1(\bar{\beta}R)}{J_1^2(\bar{\beta}R) + Y_1^2(\bar{\beta}R)} + \\ + i\left[(2\xi^2 - k^2)^2 \frac{J_0(\bar{\alpha}R)\, J_1(\bar{\alpha}R) + Y_0(\bar{\alpha}R)\, Y_1(\bar{\alpha}R)}{J_1^2(\bar{\alpha}R) + Y_1^2(\bar{\alpha}R)} + \right. \\ \left. + 4\xi^2\bar{\alpha}\beta \frac{J_0(\bar{\beta}R)\, J_1(\bar{\beta}R) + Y_0(\bar{\beta}R)\, Y_1(\bar{\beta}R)}{J_1^2(\bar{\beta}R) + Y_1^2(\bar{\beta}R)} - \frac{2k^2}{R}\bar{\alpha}\right] = 0\end{gathered} \tag{3.24}$$

где $\bar{\alpha} = \sqrt{h^2 - \xi^2}$.

Вещественная часть левой части выражения (3.24) на основании равенства (3.23) не равна нулю, в силу чего уравнение (3.1), когда ξ определяется условием $\xi^2 < h^2$, не имеет корней.

Вычисляя значение подинтегральных функций в формулах (2.6) при $\xi = \pm h$, имеем, что в выражении для $u_z^{(0)}$ предел подинтегральной функции оказывается равным

$$\pm \frac{h}{2h^2 - k^2} e^{\pm ihz} \tag{3.25}$$

а подинтегральной функции в выражении для $u_r^{(0)}$ равным нулю.

Проведенное исследование уравнения (2.6) на всей вещественной оси приводит нас к следующим выводам. При свободных колебаниях, когда потенциалы φ и ψ представляются формулами (1.10), скорость распространения свободной волны вдоль цилиндра может изменяться только от скорости волны Релея до скорости поперечных волн. Соответственно этому частота может изменяться в промежутке $p_0 \leqslant p < \infty$, где p_0 — корень уравнения

$$\Phi\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{p_0 R}\right) = \frac{1}{b^4} \frac{K_0(\sqrt{1/b^2 - 1/a^2}\, p_0 R)}{K_1(\sqrt{1/b^2 - 1/a^2}\, p_0 R)} - \frac{2}{b^2 p_0 R}\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} = 0 \tag{3.26}$$

Для определения корня уравнения (3.26) примем гипотезу Пуассона о соотношении между упругими постоянными.

Полагая $\lambda = \mu$, т. е. $a^2 = 3b^2$, уравнению (3.26) можно придать вид

$$\frac{K_0(x)}{K_1(x)} - \frac{4}{3x} = 0 \tag{3.27}$$

где

$$x = \frac{p_0 R}{b}\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{или} \quad p_0 = \frac{b}{R}\sqrt{\frac{3}{2}}\, x \tag{3.28}$$

Решая приближенно уравнение (3.27) и вставляя найденное значение $x = 1.689\ldots$ в (3.28), находим значение для p_0, которое оказывается равным

$$p_0 = \frac{b}{R}\, 2.069\ \ldots$$

Для получения значений проекций вектора смещения на границе в случае свободных колебаний обращаемся к уравнениям (2.2), которые при $Y = 0$ и условии (3.1) представляют собой каждое следствие другого.

Таким образом условие отсутствия напряжений на границе будет удовлетворено, если

$$\frac{A}{B} = \frac{(2\varkappa^2 - k^2)\, K_1(\beta_0 R)}{2i\varkappa\alpha_0 K_1(\alpha_0 R)} = -\frac{2i\varkappa\,[\beta_0 K_0(\beta_0 R) + K_1(\beta_0 R)\,/\,R]}{(2\varkappa^2 - k^2)\, K_0(\alpha_0 R) + 2\alpha_0 K_1(\alpha_0 R)\,/\,R]} \tag{3.29}$$

где $\varkappa$ — корень уравнения (3.1) и α_0, β_0 — соответствующие значения α и β. Полагая по аналогии с формулами (1.9)

$$\varkappa = p\,/\,\bar{c} \tag{3.30}$$

где $\bar{c}$ — скорость распространения волны вдоль цилиндра, подставляя в выражение (1.13) значение $\xi = \pm\varkappa$, а также на основании (3.29)

$$A = (2\varkappa^2 - k^2)\, C K_1(\beta_0 R), \qquad B = \pm\, 2i\varkappa\,\alpha_0 C K_1(\alpha_0 R) \tag{3.31}$$

и складывая при этом выражения для $u_z^{(0)}$, $u_r^{(0)}$, соответственно двум значениям ξ, получим формулы для проекций вектора смещения, представляющие собой систему стоячих волн:

$$u_z^{(0)} = -2\varkappa K_1(\alpha_0 R)\, K_1(\beta_0 R) \left[(2\varkappa^2 - k^2)\frac{K_0(\alpha_0 R)}{K_1(\alpha_0 R)} - 2\alpha_0\beta_0 \frac{K_0(\beta_0 R)}{K_1(\beta_0 R)} \right] C \sin \varkappa z\, e^{ipt}$$

$$u_r^{(0)} = 2k^2\alpha_0 K_1(\alpha_0 R)\, K_1(\beta_0 R)\, C \cos \varkappa z\, e^{ipt} \tag{3.32}$$

4. Обращаясь к случаю, когда к поверхности выреза приложено нормальное напряжение, к которому относятся формулы (2.6), рассмотрим случай резонанса, когда величина частоты возмущающей силы оказывается равной частоте свободных колебаний. В этом случае частота p удовлетворяет условию $p_0 \leqslant p < \infty$. Тогда для выделения поверхностной волны, т. е. главного колебания, прибавим и вычтем главные части рядов Лорана, соответствующие двум полюсам $\pm\varkappa$, к подинтегральным функциям, являющимся множителями у $e^{i\xi z}$ в интегралах (2.6). Пусть $T(\xi)$ — подинтегральная функция, являющаяся множителем у $e^{i\xi z}$ в первом интеграле формулы (2.6). т. е.

$$T(\xi) = \frac{\xi\,[(2\xi^2 - k^2)\, K_0(\alpha_0 R)\,/\,K_1(\alpha R) - 2\alpha\beta K_0(\beta R)\,/\,K_1(\beta R)]}{(2\xi^2 - k^2)^2 K_0(\alpha R)\,/\,K_1(\alpha R) - 4\xi^2\alpha\beta K_0(\beta R)\,/\,K_1(\beta R) - 2k^2\alpha\,/\,R} \tag{4.1}$$

Имеем тождество

$$T(\xi) = \left\{ T(\xi) - \frac{\mathscr{E}_{+\varkappa} T(\xi)}{\xi - \varkappa} - \frac{\mathscr{E}_{-\varkappa} T(\xi)}{\xi + \varkappa} \right\} + \frac{\mathscr{E}_{+\varkappa} T(\xi)}{\xi - \varkappa} + \frac{\mathscr{E}_{-\varkappa} T(\xi)}{\xi + \varkappa} \tag{4.2}$$

где символ $\mathscr{E}_{+\varkappa}\, T(\xi)$ означает вычет функции $T(\xi)$ относительно полюса $\xi = +\varkappa$. Принимая во внимание, что производная знаменателя правой части формулы (4.1) есть нечетная функция от ξ, вычислим вычеты функции $T(\xi)$

относительно полюсов на вещественной оси, которые для краткости обозначим через $-H$. Имеем

$$-H=\mathcal{E}_{+\varkappa}T(\xi)=\mathcal{E}_{-\varkappa}T(\xi)=\frac{1}{\omega'(\varkappa)}\left\{\varkappa\left[(2\varkappa^2-k^2)^2\frac{K_0(\alpha_0R)}{K_1(\alpha_0R)}-2\alpha_0\beta_0\frac{K_0(\beta_0R)}{K_1(\beta_0R)}\right]\right\} \quad (4.3)$$

где

$$\omega(\xi)=(2\xi^2-k^2)^2\frac{K_0(\alpha R)}{K_1(\alpha R)}-4\xi^2\alpha\beta\frac{K_0(\beta R)}{K_1(\beta R)}-\frac{2k^2}{R}\alpha \quad (4.4)$$

Тождество (4.2) теперь можно переписать в виде

$$T(\xi)=\left\{T(\xi)+\frac{2H\xi}{\xi^2-\varkappa^2}\right\}-\frac{H}{\xi-\varkappa}-\frac{H}{\xi+\varkappa} \quad (4.5)$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках формулы (4.5), представляет собой непрерывную функцию на всей вещественной оси.

Подставляя выражение (4.5) в первую из формул (2.6), имеем

$$u_z^{(0)}=-\frac{iQ}{2\pi\mu}e^{ipt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[T(\xi)+\frac{2H\xi}{\xi^2-\varkappa^2}\right]e^{i\xi z}d\xi+$$

$$+\frac{iQH}{2\pi\mu}e^{ipt}\,\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\xi z}\,d\xi}{\xi-\varkappa}+\frac{iQH}{2\pi\mu}e^{ipt}\,\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\xi z}\,d\xi}{\xi+\varkappa} \quad (4.6)$$

где $T(\xi)$ определяется формулой (4.1), а H — формулой (4.3).

При вычислении последних двух интегралов формулы (4.6) применим теорию вычетов и будем считать z положительным, что является достаточным, так как $u_z^{(0)}$ представляет собой нечетную функцию от z. Контуры интегрирования состоят из двух участков вещественной оси, соединенных в верхней полуплоскости полуокружностью малого радиуса δ с центром соответственно в точках $\pm\varkappa$ и замкнутых в верхней полуплоскости полуокружностью R с центром в начале координат

При $R\to\infty$, а $\delta\to 0$ получим

$$u_z^{(0)}(z,t)=-\frac{Q}{\mu}He^{ipt}\cos\varkappa z-\frac{iQ}{2\mu\pi}e^{ipt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[T(\xi)+\frac{2H\xi}{\xi^2-\varkappa^2}\right]e^{i\xi z}d\xi \quad (z>0) \quad (4.7)$$

$$u_z^{(0)}(-z,t)=-u_z^{(0)}(z,t) \quad (4.8)$$

Аналогично предыдущему получаем

$$u_r^{(0)}=\frac{-Q}{2\pi\mu}e^{ipt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[P(\xi)+\frac{2LH}{\xi^2-\varkappa^2}\right]e^{i\xi z}d\xi+$$

$$+\frac{QL}{2\pi\mu}e^{ipt}\,\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\xi z}\,d\xi}{\xi-\varkappa}-\frac{QL}{2\pi\mu}e^{ipt}\,\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\xi z}\,d\xi}{\xi+\varkappa} \quad (4.9)$$

где $P(\xi)$ — подинтегральная функция во втором интеграле формулы (2.6), являющаяся множителем у $e^{i\xi z}$

$$P(\xi)=\frac{k^2\alpha}{(2\xi^2-k^2)^2K_0(\alpha R)\,/\,K_1(\alpha R)-4\xi^2\alpha\beta K_0(\beta R)\,/\,K_1(\beta R)-2k^2\alpha\,/\,R} \quad (4.10)$$

$$L=-\frac{k^2\alpha_0}{\omega'(\varkappa)} \quad (4.11)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках интеграла (4.9), является непрерывной функцией на всей вещественной оси. Так как $u_r^{(0)}$ является четной функцией от z, то, считая z положительным, формулу (4.9) можно переписать в виде

$$u_r^{(0)}(z, t) = \frac{-Q}{\mu} L e^{ipt} \sin \varkappa z - \frac{Q}{2\pi\mu} e^{ipt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[P(\xi) + \frac{2L\varkappa}{\xi^2 - \varkappa^2} \right] e^{i\xi z} d\xi \qquad (z > 0) \quad (4.12)$$

$$u_r^{(0)}(-z, t) = u_r^{(0)}(z, t) \quad (4.13)$$

В соответствии со сказанным выше прибавим теперь к правым частям формул (4.7) и (4.12) выражения (3.32), соответствующие свободным волнам. С этой целью положим в формулах (3.32) постоянную C равной

$$C = \frac{iQ/\mu}{2K_1(\alpha_0 R) K_1(\beta_0 R)\, \omega'(\varkappa)}$$

Тогда получим выражение для проекций вектора смещения в случае свободных волн в виде

$$u_z^{(0)} = i\frac{Q}{\mu} H \sin \varkappa z e^{ipt}, \qquad u_r^{(0)} = -i\frac{Q}{\mu} L \cos \varkappa z e^{ipt} \quad (4.14)$$

Таким образом окончательное выражение для проекций вектора смещения на поверхности выреза в рассматриваемой нами задаче в случае резонанса, т. е. когда частота возмущающей силы удовлетворяет условию $p_0 < p < \infty$, имеет вид

$$u_z^{(0)} = -\frac{Q}{\mu} H e^{i(pt - \varkappa z)} - \frac{iQ}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[T(\xi) + \frac{2H\xi}{\xi^2 - \varkappa^2} \right] e^{i(pt + \xi z)} d\xi \qquad (z > 0) \quad (4.15)$$

$$u_r^{(0)} = -\frac{iQ}{\mu} L e^{i(pt - \varkappa z)} - \frac{Q}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[P(\xi) + \frac{2L\varkappa}{\xi^2 - \varkappa^2} \right] e^{i(pt + \xi z)} d\xi \qquad (z > 0) \quad (4.16)$$

где функции $T(\xi)$ и $P(\xi)$ определяются формулами (4.1) и (4.10), а постоянные H и L — формулами (4.3), (4.4), и (4.11). Для $z < 0$ значения $u_z^{(0)}$ и $u_r^{(0)}$ определяются из условий (4.8) и (4.13).

На основании известных теорем (см., например [9]) теории интегралов Фурье интегралы в правой части формул (4.15) и (4.16) стремятся к нулю при неограниченном возрастании z. Принимая во внимание в формулах (4.15) и (4.16) только главные члены, дающие поверхностную волну, будем иметь

$$u_z^{(0)} = \mp H\frac{Q}{\mu} \exp\left[ip\left(t \mp \frac{z}{c} \right) \right], \quad u_r^{(0)} = -i\frac{Q}{\mu} L \exp\left[ip\left(t \mp \frac{z}{c} \right) \right] \quad (4.17)$$

где верхние знаки для $z > 0$, нижние — для $z < 0$.

В формулах (4.17) p удовлетворяет условию $p_0 \leqslant p < \infty$, а $c^{-1} = \vartheta$ — корень уравнения (3.4), в котором через τ обозначена величина, обратная произведению частоты на радиус выреза. Из формул (4.17) следует, что скорость распространения поверхностной волны есть функция частоты. Таким образом в отличие от распространения колебаний по поверхности бесконечно упругого полупространства в рассмотренной задаче имеет место дисперсия.

В случае, если частота p не удовлетворяет условию $p_0 \leqslant p < \infty$, то главных членов, дающих поверхностную волну, не будет. Тогда вместо формул (4.15) и (4.16) будут иметь место формулы (2.6), дающие выражение для проекций вектора смещения, когда отсутствует резонанс.

Если в формулах (2.6) положим радиус выреза R равным бесконечности, то получим формулы Лэмба для случая приложенной к поверхности упругого полупространства вертикальной периодической силы. Тогда формулы (4.17) дают волны Релея, распространяющиеся по поверхности со скоростью c, яляющейся величиной, обратной положительному корню уравнения (3.16).

Поступила в редакцию
11 IV 1945

Институт механики
Академии Наук СССР

J. A. MINDLIN. — CONSTRAINED WAVES ON THE SURFACE OF CIRCULAR CYLINDRICAL APERTURE OF INFINITE LENGTH IN ELASTIC SPACE

In the problem, it is assumed that the constrained oscillations are caused by uniformly distributed periodic disturbing forces, applied on the contour of the circle of cross section of the cylinder in the plane $z=0$.

In cases of free oscillations, when the potentials φ and ψ are determined by formulae (1.10), it is established that the velocity of propagation of the free waves along the cylinder varies from the velocity of the Rayleigh wave to the velocity of the cross sectional wave. Frequency p accordingly ranges throughout the interval $p_0 < p < \infty$, where p_0 is the root of the equation (3.23).

Resonance is investigated when the frequency of the disturbing force is equal to the frequency of the free oscillation, in case normal stress is applied to the contour. Formulae (4.17) and (4.18) give main terms of the projections of the displacement vector determining the surface wave. If frequency p of the disturbing force does not satisfy the condition $p_0 < p < \infty$, the main terms determining the surface wave vanish. Formulae (2.6) give the projections of the displacement vector in the absence of resonance.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lamb H. Phil. Trans. (A). 203. 1904.
2. Smirnoff V. et Soboleff S. Sur une méthode nouvelle dans le problème plan des vibrations élastiques. Труды Сейсмологического Института Академии Наук. № 20. 1932.
   Smirnoff V. et Soboleff S. Sur l'application de la méthode nouvelle. Труды Сейсмологического Института Академии Наук. № 29. 1933.
   Soboleff S. Sur les vibrations d'un demi-espace et d'une couche élastique. Математический сборник. 40. 1933. B. 2.
3. Narychkina E. Sur les vibrations d'un demi-espace aux conditions initiales arbitraires. Труды Сейсмологического Института Академии Наук. № 45. 1934.
   Нарышкина Е. Общая теория волн Rayleigh для полупространства. Труды Сейсмологического Института Академии Наук. № 90. 1940.
4. Миндлин Я. Доклады Академии Наук СССР. 1937. Т. XV. № 9.1939. Т. 4. — 1940. Т. XXVI. № 6. — 1940. Т. XXVII. № 9.
5. Миндлин Я. ДАН. 1944. Т. XII. № 4.
6. Rayleigh. Proc. Math. Soc. 17. 1885.
7. Соболев С. Некоторые вопросы теории распространения колебаний (дополнение к русск. пер. книги Франка и Мизеса «Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики», ч. II) ОНТИ 1937.
8. Gray A. and Mathew G. A treatise on Bessel functions. 1931.
9. Titchmarsh. Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford. 1937.