Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛ ПРИ ИЗГИБЕ ОПЕРТЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Г. Ю. Джанелидзе

(Ленинград)

В работе разбирается вопрос об определении перерезывающих сил при изгибе тонких пластин без полного интегрирования уравнения равновесия, т. е. без предварительного определения прогиба.

§ 1. Основные уравнения. Определение прогиба $w(x, y)$ тонкой пластины сводится к решению дифференциального уравнения

$$D\Delta\psi = p(x, y) \qquad (\psi = \Delta w) \tag{1.1}$$

при граничных условиях, соответствующих условиям закрепления пластины.

Перерезывающие силы N_1 и N_2, отвечающие нагрузке $p(x, y)$, вызывающей прогиб $w(x, y)$, определяются формулами

$$N_1 = -D\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad N_2 = -D\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad (\psi = \Delta w) \tag{1.2}$$

где D — жесткость пластины и ψ — лапласиан функции w.

Перерезывающие силы N_1 и N_2 могут быть сразу определены по формулам (1.2) в тех случаях, когда удается сформулировать граничные условия для функции[1] ψ.

Для пластины произвольной формы, опертой по краям на граничном контуре, должны выполняться соотношения[1]

$$w = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) = 0 \tag{1.3}$$

где $\rho(s)$ — радиус кривизны граничной кривой, ν — коэффициент Пуассона, а $\partial/\partial n$ и $\partial/\partial s$ обозначают дифференцирование по нормали и касательной.

В этих обозначениях

$$\psi = \Delta w = \frac{\partial w^2}{\partial n^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \tag{1.4}$$

Согласно (1.3) и (1.4) получаем контурные условия, содержащие функцию ψ

$$w = 0, \qquad \psi + (\nu - 1)\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) = 0 \tag{1.5}$$

Вид уравнений (1.5) показывает, что непосредственное определение функций ψ возможно при $\nu = 1$, — случай, лишенный физического содержания,

---

[1] Функция ψ представляет собой (с точностью до множителя $-1/[D(1+\nu)]$) сумму изгибающих моментов M_1 и M_2; поэтому развиваемый ниже прием позволяет определить не только перерезывающие силы, но и сумму моментов M_1 и M_2 в каждой точке плиты.

и при $1/\rho = \infty$, — контур прямая линия. В последнем случае второе граничное условие (1.5) принимает вид

$$\psi = 0 \tag{1.6}$$

так как на контуре $w(s) = 0$ и $\partial^2 w / \partial s^2 = 0$.

Таким образом прямое определение перерезывающих сил без нахождения прогиба возможно только в случае опертых пластин, ограниченных контурами, составленными из отрезков прямых.

§ 2. Определение перерезывающих сил. Наметим схему определения перерезывающих сил для случая свободно опертой пластины, ограниченной кривой, состоящей из отрезков прямых линий. В этом случае функция $\psi(x, y)$ определяется решением уравнения (1.1) при граничном условии (1.6).

Решение уравнения (1.1), соответствующее условию (1.6), может быть, как известно, представлено в виде интеграла

$$\psi(x, y) = \frac{1}{D} \iint\limits_{\Omega} K(x, y;\ \xi, \eta)\, p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{2.1}$$

где $K(x, y;\ \xi, \eta)$ — функция Грина уравнения Лапласа (1.1) для внутренней области, ограниченной контуром пластины.

В теории функций комплексного переменного показывается, что функция Грина уравнения Лапласа находится по формуле [2]

$$K(x, y;\ \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln f(z) \tag{2.2}$$

где $w = f(z)$ — функция комплексного переменного $z = x + iy$, осуществляющая конформное преобразование области, ограниченной контуром пластины, на внутренность круга единичного радиуса. При этом точка (ξ, η) плоскости переменного z, в которой приложена единичная сосредоточенная сила, должна преобразоваться в центр круга. Знак (плюс) перед логарифмом взят в соответствии с уравнением (1.1), которое отличается от обычной формы $\Delta u = -\varphi(x, y)$.

Из (2.1) и (2.2) имеем

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi D} \iint\limits_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln |f(z)|\, d\xi\, d\eta \tag{2.3}$$

Формула Шварца-Кристофеля, дающая конформное преобразование полуплоскости на многоугольник [3], в сочетании с соотношением (2.3) позволяет определить функцию $\psi(x, y)$ для любой пластины, ограниченной многоугольником. Производные $\partial\psi / \partial x$ и $\partial\psi / \partial y$ определяют перерезывающие силы N_1 и N_2 согласно (1.2).

§ 3. Определение перерезывающих сил в случае опертой прямоугольной пластины. Отображение прямоугольника со сторонами a и b на круг единичного радиуса дается функцией [4]

$$w(z) = \frac{\sigma(z - \zeta;\ 2\omega_1, 2\omega_2)\, \sigma(z + \zeta;\ 2\omega_1, 2\omega_2)}{\sigma(z - \bar{\zeta};\ 2\omega_1, 2\omega_2)\, \sigma(z + \bar{\zeta};\ 2\omega_1, 2\omega_2)} \tag{3.1}$$

где $\sigma(u;\ 2\omega_1, 2\omega_2)$ — сигма-функция Вейерштрасса, $\omega_1 = a$ и $\omega_2 = ib$ — ее полупериоды, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$ комплексные перемещения.

Преобразуем теперь формулу (3.1) с помощью соотношения, связывающего сигма-функцию $\sigma(u)$ с тэта-функцией ϑ_1, а именно

$$\sigma(u;\, 2\omega_1, 2\omega_2) = 2\omega_2 \exp\left(-\frac{\vartheta_1'''(0)}{24\vartheta_1'(0)}\frac{u^2}{\omega_2^2}\right)\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}u/\omega_2;\, \tau)}{\vartheta_1'(0;\, \tau)} \tag{3.2}$$

Здесь[1]

$$\vartheta_1(u;\, \tau) = 2\left[q^{1/4}\sin\pi u - q^{9/4}\sin 3\pi u + q^{25/4}\sin 5\pi u - \ldots\right]$$

причем для рассматриваемого случая величины

$$\tau = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = i\,\frac{a}{b}, \qquad q = \exp i\pi\tau = \exp\left(-\frac{a}{b}\,\pi\right) \tag{3.3}$$

Выражая с помощью формулы (3.2) все сигма-функции, входящие в формулу (3.1), через ϑ_1-функцию, получим

$$w(z) = \exp\left(\frac{\vartheta_1'''(0)}{24\vartheta_1'(0)}\frac{(z-\zeta)^2+(z+\zeta)^2-(z-\bar\zeta)^2-(z+\bar\zeta)^2}{b^2}\right)\frac{\vartheta_1([\frac{1}{2}i(z-\zeta)/b]\,\vartheta_1[\frac{1}{2}i(z+\zeta)/b]}{\vartheta_1[\frac{1}{2}i(z-\bar\zeta)/b]\,\vartheta_1[\frac{1}{2}i(z+\bar\zeta)/b]} \tag{3.4}$$

Пусть пластина нагружена сосредоточенной силой P, приложенной в точке (ξ, η), тогда формула (2.3) дает

$$\psi(x, y;\, \xi, \eta) = \frac{P}{2\pi D}\,\mathrm{Re}\ln w(z) \tag{3.5}$$

или на основании (3.4)

$$\psi(x, y;\, \xi, \eta) = \frac{P}{2\pi D}\,\mathrm{Re}\ln\frac{\vartheta_1[\frac{1}{2}i(z-\zeta)/b]\,\vartheta_1(\frac{1}{2}i(z+\zeta)/b]}{\vartheta_1[\frac{1}{2}i(z-\bar\zeta)/b]\,\vartheta_1[\frac{1}{2}i(z+\zeta)/b]} \tag{3.6}$$

Здесь в правой части опущен член

$$\frac{P}{\pi D b^2}\frac{\vartheta_1'''(0)}{24\vartheta_1'(0)}\,\mathrm{Re}\,(\zeta^2-\bar\zeta^2)$$

так как выражение в скобках $\zeta^2 - \bar\zeta^2 = 4i\eta\xi$.

Формула (3.6), если перейти к сопряженным величинам, совпадает с аналогичным выражением, полученным нами ранее иным методом [6].

Из формул (1.2) согласно (3.6) для перерезывающей силы N_1 получим

$$N_1 = -\frac{P}{4\pi b}\,\mathrm{Re}\, i\left\{\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left[\frac{i}{2b}(z-\zeta)\right]+\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left[\frac{i}{2b}(z+\zeta)\right]-\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left[\frac{i}{2b}(z-\bar\zeta)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left[\frac{i}{2b}(z+\bar\zeta)\right]\right\} \tag{3.7}$$

В качестве численного примера разберем определение перерезывающей силы N_1 в середине стороны $x=0$ для опертой квадратной пластины, нагруженной сосредоточенной силой P, приложенной в центре пластины. В этом случае, подставляя в (3.7) $a=b$, $\zeta=\frac{1}{2}a(1+i)$, $z=\frac{1}{2}ai$ и пользуясь известными из теории ϑ-функций соотношениями

$$\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2}(x), \qquad \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(-x) = -\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(x), \qquad \frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2}(-x) = -\frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2}(x)$$

[1] Формула (3.2) в этой форме приводится в книге Вейерштрасса [5].

получим

$$N_1 = -\frac{Pi}{2\pi a} \operatorname{Re} i \left\{ \frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2}\left[\frac{i}{4}\right] - \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left[\frac{i}{4}\right] \right\} \tag{3.8}$$

Формулу (3.8) можно еще преобразовать, если воспользоваться разложениями логарифмических производных тэта-функций в ряды [7]

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_1'(x)}{\vartheta_1(x)} &= \pi \left\{ \operatorname{ctg} \pi x + 2q \frac{\sin 2\pi x}{\operatorname{sh} \pi\rho} + \cdots + 2q^n \frac{\sin 2\pi n x}{\operatorname{sh} \pi n \rho} + \cdots \right\} \\ \frac{\vartheta_2'(x)}{\vartheta_2(x)} &= \pi \left\{ -\operatorname{tg} \pi x - 2q \frac{\sin 2\pi x}{\operatorname{sh} \pi\rho} + \cdots + (-1)^n 2q^n \frac{\sin 2\pi n x}{\operatorname{sh} \pi n \rho} + \cdots \right\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

в которых $q = \exp(i\pi\tau)$ и $\rho = \tau/i$. В рассматриваемом случае $q = \exp(-\pi)$ и $\rho = 1$; с помощью этих представлений выражение (3.8) принимает вид

$$N_1 = \frac{P}{2a}\left(\operatorname{cth}\frac{\pi}{4} - \operatorname{th}\frac{\pi}{4}\right) - \frac{2P}{a}\left\{ e^{-\pi}\frac{\operatorname{sh}\pi/2}{\operatorname{sh}\pi} + e^{-3\pi}\frac{\operatorname{sh}3\pi/2}{\operatorname{sh}3\pi} + e^{-5\pi}\frac{\operatorname{sh}5\pi/2}{\operatorname{sh}5\pi} + \cdots \right\} \tag{3.10}$$

В целях сравнения с обычным решением приведем результат вычисления силы N_1 из решения задачи в форме ряда Леви

$$N_1 = \frac{P}{a}\left\{ \operatorname{sch}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sch}3\frac{\pi}{2} + \operatorname{sch}5\frac{\pi}{2} + \cdots \right\} \tag{3.11}$$

Производя численные подсчеты по формуле (3.9) при сохранении в фигурных скобках одного члена и по формуле (3.10), сохраняя три члена, получим соответственно

$$N_1 = 0.4174\frac{P}{a}, \qquad N_1 = 0.4172\frac{P}{a}$$

§ 4. Определение перерезывающих сил в случае опертой треугольной пластины. Разберем теперь нахождение перерезывающих сил в случае равнокатетной треугольной пластины, опертой по краям и нагруженной сосредоточенной силой P, приложенной в точке ξ, η. Отображение треугольника на верхнюю полуплоскость дается интегралом Кристоффеля-Шварца, имеющим в рассматриваемом случае вид

$$z = C_1 \int_0^t t^{-1/2}(1-t)^{-3/4}\,dt + C_2 \tag{4.1}$$

Постоянные C_1 и C_2 определим из условий $t=0$ при $z=0$ и $t=1$ при $z=L$, обеспечивающих преобразование вершин треугольника соответственно в точки 0,1, ∞ плоскости переменного t. Имеем

$$z = \frac{L}{B(^1/_2, {}^1/_4)}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}\,\sqrt[4]{(1-t)^3}} = \frac{4iL}{B(^1/_2, {}^1/_4)}\int_{\sqrt{1-t}}^{t} \frac{du}{\sqrt{4u^3-4u}} \tag{4.2}$$

где $B(^1/_2, {}^1/_4)$ — бэта-функция Эйлера, и для получения последнего интеграла использована подстановка $u = \sqrt{1-t}$.

Обращение последнего интеграла (4.2) может быть выражено через $\wp$-функцию Вейерштрасса [7]. В рассматриваемом случае

$$g_2 = 4, \quad g_3 = 0, \quad e_1 = 1, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = -1 \tag{4.3}$$

и

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{u^3-u}} = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$
$$\omega_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^\infty \frac{du}{\sqrt{u^3-u}} = \frac{i}{4} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \tag{4.4}$$

Представляя (4.2) в форме

$$z = \frac{4iL}{B\,(^1/_2,\ ^1/_4)}\left\{\int_{\sqrt{1-t}}^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3-4u}} - \int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3-4u}}\right\} \tag{4.5}$$

имеем

$$\frac{(z+iL)\,B\,(^1/_2,\ ^1/_4)}{4iL} = \int_{\sqrt{1-t}}^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3-4u}} \tag{4.6}$$

Обращение интеграла (4.6) дает

$$\sqrt{1-t} = \wp\left[\omega_1\left(1-i\frac{z}{L}\right), 4, 0\right]$$

или

$$t = 1-\wp^2\left[\omega_1\left(1-i\frac{z}{L}\right), 4, 0\right] \tag{4.7}$$

Для получения конформного отображения треугольника на круг нужно теперь полуплоскость отобразить на круг единичного радиуса. При этом точку полуплоскости t_ξ, которой соответствует точка $\zeta=\xi+i\eta$ (точка приложения сосредоточенной силы P) плоскости z, необходимо преобразовать в центр круга.

Дробнолинейное преобразование вида

$$w = (t-t_\zeta)\,/\,(t-\bar{t}_\xi) \tag{4.8}$$

удовлетворяет этим условиям. Подставляя (4.7) в (4.8), получим[1]

$$w(z) = \frac{\wp^2[\omega_1(1-i\zeta\,/\,L),\,4,\,0]-\wp^2[\omega_1(1-iz\,/\,L),\,4,\,0]}{\wp^2[\omega_1(1+i\bar{\zeta}\,/\,L),\,4,\,0]-\wp^2[\omega_1(1-iz\,/\,L),\,4,\,0]} \tag{4.9}$$

Преобразуем $w(z)$ к виду, удобному для логарифмирования. При этом воспользуемся известными из теории эллиптических функций соотношениями [7]

$$\wp(u)-\wp(v) = -\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)}$$
$$\wp(u)-\wp(iv) = -\frac{\sigma(u-iv)\,\sigma(u+iv)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(iv)}$$
$$\wp(iv;\,g_2,\,g_3) = -\wp(v;\,g_2,\,-g_3)$$

---

[1]) Из вещественности инвариантов g_2 и g_3 следует

$$\overline{\wp(u)} = \bar{\wp}(\bar{u}) = \wp(\bar{u})$$

из которых при $g_3=0$ следует формула

$$\wp^2(u)-\wp^2(v)=-\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)\,\sigma(u-iv)\,\sigma(u+iv)}{\sigma^4(u)\,\sigma^4(v)} \tag{4.10}$$

Вводя обозначения

$$u_0=\omega_1\left(1-i\,\frac{\zeta}{L}\right),\qquad v=\omega_1\left(1-i\,\frac{z}{L}\right) \tag{4.11}$$

и пользуясь (4.10), представим (4.9) в виде

$$w(z)=\frac{\sigma^4(\bar u_0)}{\sigma^4(u_0)}\,\frac{\sigma(u_0-v)\,\sigma(u_0+v)\,\sigma(u_0-iv)\,\sigma(u_0+iv)}{\sigma(\bar u_0-v)\,\sigma(\bar u_0+v)\,\sigma(\bar u_0-iv)\,\sigma(\bar u_0+iv)} \tag{4.12}$$

Согласно (2.3) или (3.5) функция ψ в рассматриваемом случае примет вид

$$\psi(x,y;\xi,\eta)=\frac{P}{2\pi D}\,\mathrm{Re}\ln\frac{\sigma(u_0-v)\,\sigma(u_0+v)\,\sigma(u_0-iv)\,\sigma(u_0+iv)}{\sigma(\bar u_0-v)\,\sigma(\bar u_0+v)\,\sigma(\bar u_0-iv)\,\sigma(\bar u_0+iv)} \tag{4.13}$$

где под знаком логарифма опущены чисто мнимые множители.

Переходя с помощью соотношения (3.2) к тэта-функциям, имеем

$$\begin{aligned}\psi(x,y;\xi,\eta)=\frac{P}{2\pi D}\mathrm{Re}\Big\{&\ln\Big[\vartheta_1\Big(\frac{i}{2L}(z-\zeta)\Big)\vartheta_1\Big(\frac{i}{2L}(z+\zeta)\Big)\Big]-\\&-\ln\Big[\vartheta_1\Big(\frac{i}{2L}(z-\bar\zeta)\Big)\vartheta_1\Big(\frac{i}{2L}(z+\bar\zeta)\Big)\Big]+\\&+\ln\Big[\vartheta_1\Big(\frac{1-i}{2}-\frac{i}{2L}(\zeta-iz)\Big)+\vartheta_1\Big(\frac{1+i}{2}-\frac{i}{2L}(\zeta+iz)\Big)\Big]-\\&-\ln\Big[\vartheta_1\Big(\frac{1-i}{2}+\frac{i}{2L}(\bar\zeta+iz)\Big)\vartheta_1\Big(\frac{1+i}{2}+\frac{i}{2L}(\bar\zeta-iz)\Big)\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{4.14}$$

Введя величину $\zeta_1=L-\eta+i(L-\xi)=L(1+i)-i\bar\zeta$ и используя соотношение

$$\vartheta_1(x;1)=\exp(-\pi x^2)\,\frac{\vartheta_1(ix;1)}{i}$$

представим (3.9) в форме

$$\begin{aligned}\psi(x,y;\xi,\eta)=\frac{P}{2\pi D}\Big[&\mathrm{Re}\Big\{\ln\Big[\vartheta_1\Big(\frac{i}{2L}(z-\zeta)\Big)\vartheta_1\Big(\frac{i}{2L}(z+\zeta)\Big)\Big]-\\&-\ln\Big[\vartheta_1\Big(\frac{i}{2L}(z-\bar\zeta)\Big)\vartheta_1\Big(\frac{i}{2L}(z+\bar\zeta)\Big)\Big]\Big\}-\mathrm{Re}\Big\{\ln\Big[\vartheta_1\Big(\frac{i}{2L}(z-\zeta_1)\Big)\times\\&\times\vartheta_1\Big(\frac{i}{2L}(z+\zeta_1)\Big)\Big]-\ln\Big[\vartheta_1\Big(\frac{i}{2L}(z-\bar\zeta)\Big)\vartheta_1\Big(\frac{i}{2L}(z+\bar\zeta)\Big)\Big]\Big\}\Big]\end{aligned} \tag{4.15}$$

Этот же результат может быть и прямо получен из вычислений § 3 путем следующих соображений[18]. Если квадратная пластина находится под действием силы P, приложенной в точке $\zeta=\xi+i\eta$, и силы $-P$, приложенной в точке $\zeta_1=L-\eta+i(L-\xi)$, то срединная поверхность пластины будет иметь перегиб по диагонали MN. Тогда на стороне MN треугольника OMN прогиб $w=0$ и $\partial^2 w/\partial n^2=0$, поэтому на MN и $\psi=\triangle w=0$. Это показывает, что функция $\psi(x,y;\xi,\eta)$ для квадратной пластины, нагруженной указанным образом, одновременно является функцией $\psi(x, y; \xi, \eta)$ для равнокатетной треугольной пластины, нагруженной сосредоточенной силой P в точке (ξ, η).

В заключение разберем в качестве численного примера определение перерезывающей силы N_1 в середине катета $x=0$ при приложении силы P в точке $\xi=\eta=L/4$. Тогда

$$z=i\frac{L}{2}, \quad \zeta=\frac{L}{4}(1+i), \quad \bar{\zeta}=\frac{L}{4}(1-i), \quad \zeta_1=\frac{3L}{4}(1+i), \quad \bar{\zeta}_1=\frac{3L}{4}(1-i)$$

и выражение для перерезывающей силы N_1 примет вид

$$N_1=\frac{P}{4\pi L}\operatorname{Re} i\left\{\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left[\frac{1}{8}+\frac{i}{8}\right]-\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left[\frac{1}{8}-\frac{i}{8}\right]+\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left[\frac{3}{8}-\frac{i}{8}\right]-\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left[\frac{3}{8}+\frac{i}{8}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left[\frac{5}{8}+\frac{3i}{8}\right]-\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left[\frac{5}{8}-\frac{3i}{8}\right]+\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left[\frac{1}{8}-\frac{3i}{8}\right]-\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\left[\frac{1}{8}+\frac{3i}{8}\right]\right. \qquad (4.16)$$

Пользуясь разложением (3.9) логарифмической производной ϑ_1-функции, эту формулу можно преобразовать к виду

$$N_1=\left\{\sqrt{2}\frac{\operatorname{sh}\pi/4}{\operatorname{ch}\pi/2}-\sqrt{2}\frac{\operatorname{sh}3\pi/4}{\operatorname{ch}3\pi/2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\pi}\frac{\sin n\pi/2\sin n\pi/4}{\operatorname{ch}n\pi/4}\right\}\frac{P}{L} \qquad (4.17)$$

Из обычного решения Навье для квадратной пластины путем суммирования (или прямо из решения Леви) выражение для N_1 получается в виде разложения

$$N_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\operatorname{sch}\frac{\pi}{4}-\operatorname{sch}\frac{3\pi}{4}-\operatorname{sch}\frac{5\pi}{4}+\operatorname{sch}\frac{7\pi}{4}+\operatorname{sch}\frac{9\pi}{4}-\cdots\right\}\frac{P}{L} \qquad (4.18)$$

Пользуясь таблицами [9,10] и производя численные вычисления по формуле (4.17) при сохранении только члена с $n=1$ и по формуле (4.18) при сохранении пяти членов, получим соответственно

$$N_1=0.3791\frac{P}{L}, \qquad N_1=0.3790\frac{P}{L}$$

Изложенный метод может быть эффективно применен тогда, когда контур пластины отображается на круг с помощью эллиптических функций. Поэтому, кроме разобранных случаев, с помощью эллиптических функций могут быть рассмотрены задачи о равносторонней треугольной пластине и пластине, ограниченной прямоугольным треугольником с углами 30 и 60°.

При этом легко показать, что перерезывающие силы всегда могут быть выражены через логарифмическую производную ϑ-функции. Для этого следует воспользоваться теоремой [11] о представимости эллиптической функции $f(u)$ через сигма-функцию и известными соотношениями между сигма- и тэта-функциями.

Из сопоставления уравнения теории кручения призматического стержня и уравнения, определяющего функцию ψ, следует, что все результаты, полученные в теории кручения призматического стержня, могут быть непосредственно перенесены на случай равномерно нагруженной опертой полигональной пластины.

Поступила в редакцию
3 V 1945

*

G. J. DJANELIDZE.—DETERMINATION OF SHEARING FORCES IN THE BENDING OF SUPPORTED THIN PLATES

The paper deals with the question of finding the shearing forces in the bending of thin plates without preliminary determination of deflection.

In paragraph 2 it is shown that in the case of a freely supported plate bounded by a contour composed of straight lines, the problem of finding the shearing forces N_1 and N_2 is reduced to the solution of the boundary problem

$$\triangle\psi=\frac{p(x, y)}{D}$$

on the contour $\psi=0$.

In paragraph 3, the procedure is applied to the determination of shearing forces in the case of a supported rectangular plate, under a concentrated load P. As an illustration, the numerical calculations for a square plate are carried out.

In paragraph 4, the procedure is applied to the determination of shearing forces in the case of a supported right-angled isosceles triangular plate, under a concentrated load. A numerical example is carried out. Comparison reveals that the expressions for the shearing force obtained in this work in the form of series (3.10) and (4.17) converge more rapidly than those given in the Navier-Levy theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. Релей (Дж. В. Стрэтт). Теория звука. ГТТИ. М. – Л. 1940. Т. I.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. ГТТИ. М – Л. 1941. Т. IV.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. ГТТИ. М. – Л. 1939. Т. III.
4. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. ГТТИ. М. – Л. 1933. Т. I.
5. Weierstrass K. Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. Springer. 1893.
6. Джанелидзе Г. Ю. Суммирование решения Навье для прямоугольной пластины. Прикладная математика и механика. 1939. Т. III. № 4.
7. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. Изд. АН СССР. М. – Л. 1941.
8. Галеркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат. 1933.
9. Сафонов В. С. Круговые и гиперболические функции комплексного переменного. ГНТИ. М. – Л. 1931.
10. Jahnke E. и Emde F. Funktionentafeln. Teubner.
11. Гурвиц А. Теория аналитических и эллиптических функций. ГТТИ. М. – Л. 1933.