

## ПЛАСТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ПО СЕН-ВЕНАНУ

В. В. Соколовский

(Москва)

Настоящая работа<sup>1</sup> содержит исследование уравнений пластического равновесия при плоском напряженном состоянии по теории пластичности Сен-Венана и решение различных задач по этой теории.

**§ 1. Пластическое плоское напряженное состояние.** Рассматривается тонкая пластинка, находящаяся под действием сил, приложенных к контуру, параллельных средней плоскости  $xy$  пластинки и равномерно распределенных по ее толщине — вдоль оси  $z$ . При этом компоненты напряжения

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.1)$$

а остальные компоненты  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  не зависят от координаты  $z$  и должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

Условие пластичности Сен-Венана выражает постоянство максимального касательного напряжения

$$2|\tau|_{\max} = \sigma_s$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести при простом растяжении.

Условимся через  $\sigma_3 = 0$  обозначать главное нормальное напряжение  $\sigma_z = 0$ , а через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  другие два главных напряжения так, чтобы  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ .

Если  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  имеют разные знаки,  $\tau_{\max}$  действует по площадкам скольжения, параллельным оси  $z$  (перпендикулярным к плоскости  $xy$ ), если же  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  имеют одинаковые знаки, то  $\tau_{\max}$  действует по площадкам скольжения, наклоненным к оси  $z$  (к плоскости  $xy$ ) под углами  $\pi/4$ , причем соответственно

$$2|\tau|_{\max} = \sigma_1 - \sigma_2, \quad 4|\tau|_{\max} = \sigma_1 - \sigma_2 + |\sigma_1 + \sigma_2|$$

Таким образом условие пластичности Сен-Венана представится в двух видах:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_s \quad \text{при } \sigma_1 \sigma_2 \leq 0 \quad (1.3a)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\sigma_s - |\sigma_1 + \sigma_2| \quad \text{при } \sigma_1 \sigma_2 \geq 0 \quad (1.3b)$$

<sup>1</sup> Краткое содержание этой работы опубликовано [1] в Докладах Академии Наук СССР.

В компонентах напряжения условие Сен-Венана может быть записано в виде следующих уравнений:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 \quad \text{при } \sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2 \quad (1.4a)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (2\sigma_s - |\sigma_x + \sigma_y|)^2 \quad \text{при } \sigma_x \sigma_y \geq \tau_{xy}^2 \quad (1.4b)$$

Система уравнений (1.2), (1.4a) совпадает с уравнениями пластического плоского деформированного состояния, которая хорошо исследована; напомним некоторые результаты этого исследования. Введем новое безразмерное переменное  $\omega$  на основании условия пластичности (1.3a) следующим образом

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_s, \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 2(\sigma_s \omega + \Lambda)$$

где  $\Lambda$  — произвольная, но наперед выбранная постоянная величина.

Формулы преобразования<sup>1</sup>

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\varphi \quad (*)$$

дают возможность представить компоненты напряжения в виде

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \Lambda + \frac{1}{2}\sigma_s(2\omega \pm \cos 2\varphi), \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2}\sigma_s \sin 2\varphi \quad (1.5)$$

Таким образом три компоненты напряжения выражены через два новых переменных  $\omega$  и  $\varphi$ , причем  $\varphi$  — угол между главным нормальным напряжением  $\sigma_1$  и осью  $x$ . Вследствие выражений (1.5) условие (1.4a) удовлетворяется тождественно; подстановка формул (1.5) в уравнения (1.2) дает

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} - \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} + \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (1.6)$$

Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left( \varphi \pm \frac{\pi}{4} \right), \quad \omega \pm \varphi = \operatorname{const}$$

Исходные уравнения (1.6) имеют таким образом два вещественных различных семейства характеристик. Они принадлежат, следовательно, к уравнениям гиперболического типа.

Пусть  $\alpha = \alpha(x, y) = \operatorname{const}$ ,  $\beta = \beta(x, y) = \operatorname{const}$  суть уравнения характеристик, сетку характеристик можно принять за систему криволинейных координат в плоскости  $xy$  и рассматривать  $x$ ,  $y$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  как функции от  $\alpha$  и  $\beta$ .

В дальнейшем удобно пользоваться новыми переменными

$$\xi = \omega + \varphi, \quad \eta = \omega - \varphi \quad (1.7)$$

Уравнения характеристик можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \beta} &= \operatorname{tg} \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \frac{\partial x}{\partial \beta}, & \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= \operatorname{tg} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \omega + \varphi &= \xi = \xi(\alpha), & \omega - \varphi &= \eta = \eta(\beta) \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $\xi(\alpha)$  и  $\eta(\beta)$  произвольные функции.

<sup>1</sup> Верхний знак относится к  $\sigma_x$ , а нижний знак к  $\sigma_y$ ; подобная форма записи неоднократно применяется в дальнейшем.

При исследовании канонической системы уравнений (1.8) величины  $\xi$  и  $\eta$  предполагаются, вообще говоря, изменяемыми. Однако, существуют частные решения, отвечающие постоянным  $\xi$  и  $\eta$ .

$$1. \xi \neq \text{const}, \eta \neq \text{const}$$

За параметры  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть приняты величины  $\xi$  и  $\eta$ . Тогда уравнения (1.8) будут иметь вид:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \text{tg} \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \text{tg} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (1.9)$$

Характеристиками являются линии  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$ , ортогональные в плоскости  $xy$ .

Функциональный определитель преобразования при переходе от переменных  $x, y$  к переменным  $\xi, \eta$  вследствие уравнений (1.9) имеет вид:

$$\Delta = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \frac{2}{\cos 2\varphi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (1.10)$$

Заметим, что уравнения (1.9) могут быть еще более упрощены путем замены переменных:

$$\left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\} = -x \sin \left( \varphi \mp \frac{\pi}{4} \right) + y \cos \left( \varphi \mp \frac{\pi}{4} \right) \quad (1.11)$$

уравнения (1.9) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{u}{4}, \quad v = 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (1.12)$$

$$2. \xi \neq \text{const}, \eta \equiv \text{const} \quad 3. \xi \equiv \text{const}, \eta \neq \text{const}, \quad 4. \xi \equiv \text{const}, \eta \equiv \text{const}$$

В этих случаях уравнения (1.8) имеют интегралы, полученные С. А. Христиановичем [2].

Система уравнений (1.2), (1.4b) может быть проинтегрирована в замкнутом виде. Введем новое безразмерное переменное  $\chi$  на основании условия пластичности (1.3b) следующим образом

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\sigma_s \chi, \quad |\sigma_1 + \sigma_2| = 2\sigma_s (1 - \chi)$$

Формулы преобразования (\*) дают возможность представить компоненты напряжения в виде

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \sigma_s [x(1 - \chi) \pm \chi \cos 2\varphi], \quad \tau_{xy} = \sigma_s \chi \sin 2\varphi \quad (1.13)$$

причем  $x$  имеет следующие значения

$$x = +1 \quad \text{при } \sigma_x > 0, \sigma_y > 0; \quad x = -1 \quad \text{при } \sigma_x < 0, \sigma_y < 0$$

Таким образом, три компоненты напряжения выражены через две новых переменных  $\chi$  и  $\varphi$ , причем  $\varphi$  — угол между главным нормальным напряжением  $\sigma_1$  и осью  $x$ ; так как  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ , то ясно, что переменная  $\chi$  заключена в пределах  $0 \leq \chi \leq 1/2$ .

Вследствие выражений (1.13) условие (1.4b) удовлетворяется тождественно. Подстановка формул (1.13) в (1.2) дает

$$\sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (x + \cos 2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \sin 2\varphi \frac{\partial \chi}{\partial x} - (x + \cos 2\varphi) \frac{\partial \chi}{\partial y} \mp x 2\chi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (1.14)$$

Интегралы этих уравнений имеют вид

$$y = x \operatorname{tg} \left[ \varphi + (x+1) \frac{\pi}{4} \right] + \Phi(\varphi), \quad \chi = \frac{\Psi(\varphi)}{2x + (1-x \cos 2\varphi) \Phi'(\varphi)} \quad (1.15)$$

где  $\Phi(\varphi)$  и  $\Psi(\varphi)$  — произвольные функции.

Характеристиками в плоскости  $xy$  являются прямые  $\varphi = \text{const}$ .

Перейдем теперь к контурным условиям. Пусть границей пластического тела служит гладкий криволинейный контур; вдоль него приложен вектор напряжения, касательная компонента которого <sup>1</sup> отсутствует:  $\tau_{tn} = 0$ , а нормальная удовлетворяет неравенству  $|\sigma_n| < \sigma_s$ .

Напомним формулы преобразования при переходе от системы координат  $xy$  к системе координат  $tn$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t \\ \sigma_n \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha \pm \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_{tn} = -\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (**)$$

где  $\alpha$  — угол между осями  $x$  и  $t$ .

Если в окрестности границы пластическое напряженное состояние таково, что  $\sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$ , то на основании формул (1.6) и формул преобразования (\*\*\*) можно написать

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t \\ \sigma_n \end{aligned} \right\} = \Delta + \frac{\sigma_s}{2} [2\omega \pm \cos 2(\varphi - \alpha)], \quad \tau_{tn} = \frac{\sigma_s}{2} \sin 2(\varphi - \alpha)$$

Контурные значения  $\omega$  и  $\varphi$  могут быть выражены через  $\sigma_n$ . Положим  $\tau_{tn} = 0$  в написанных уравнениях и решим их относительно  $\omega$  и  $\varphi$ . Имеем

$$2\omega = 2 \frac{\sigma_n - \Delta}{\sigma_s} + \alpha, \quad \varphi = \alpha + (x-1) \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad \sigma_t = \sigma_n + \chi \sigma_s \quad (1.16)$$

где  $\chi = \pm 1$ , а  $n$  — произвольное целое число. При  $\chi = +1$  компонента  $\sigma_t > \sigma_n$ , а при  $\chi = -1$  компонента  $\sigma_t < \sigma_n$ .

Если в окрестности границы пластическое напряженное состояние таково, что  $\sigma_x \sigma_y \geq \tau_{xy}^2$ , то на основании формул (1.13) и формул преобразования (\*\*\*) можно написать

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t \\ \sigma_n \end{aligned} \right\} = \sigma_s [\chi (1 - \chi) \pm \chi \cos 2(\varphi - \alpha)], \quad \tau_{tn} = \sigma_s \chi \sin 2(\varphi - \alpha)$$

Контурные значения переменных  $\chi$  и  $\varphi$  могут быть выражены через  $\sigma_n$ . Положим  $\tau_{tn} = 0$  в написанных уравнениях и решим их относительно  $\chi$  и  $\varphi$ , имея в виду, что  $|\sigma_n| < \sigma_s$ :

$$2\chi = 1 - \frac{|\sigma_n|}{\sigma_s}, \quad \varphi = \alpha + (x-1) \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad \sigma_t = \chi \sigma_s \quad (1.17)$$

где  $n$  — произвольное целое число.

Остановимся теперь на условиях, которым должны удовлетворять значения переменных  $\omega$ ,  $\chi$  и  $\varphi$  на границе зоны I, где  $\sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$ , и зоны II, где  $\sigma_x \sigma_y \geq \tau_{xy}^2$ . Эти условия следуют из требования непрерывности всех компонент напряжения.

<sup>1</sup> Нетрудно рассмотреть также случай, когда задано  $\tau_{tn} = \tau_{tn}(\alpha)$ , или когда задано соотношение  $\tau_{tn} = \sigma_n \operatorname{tg} \mu$ , где  $\mu = \text{const}$ .

Приравнивая компоненты  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $x_{xy}$ , определенные формулами (1.5) и (1.13), найдем

$$2\omega = z - \frac{2\Lambda}{\sigma_s}, \quad 2\chi = 1, \quad \varphi_{II} = \varphi_I + n\pi \quad (1.18)$$

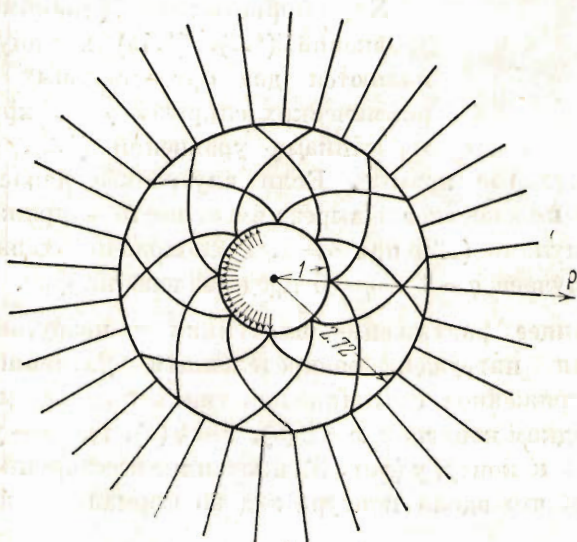
где  $n$  — произвольное целое число.

**§ 2. Полярно-симметричное растяжение пластинки с круговым отверстием.** Рассмотрим сначала пластическое напряженное состояние пластинки с круговым вырезом  $r = a$ , вызванное полярно-симметричным [растяжением.

По контуру выреза приложено равномерное внутреннее давление

$$\sigma_r = -\sigma_s q \quad (0 \leq q \leq 1)$$

где  $q$  — безразмерный параметр, характеризующий величину давления.



Фиг. 1.

Вне выреза следует рассматривать две кольцевые зоны, разделенные некоторой окружностью  $r = d$ , причем  $d \geq a$ .

Ниже удобно пользоваться безразмерными величинами

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \delta = \frac{d}{a}$$

По теории пластичности Сен-Венана решение поставленной задачи нетрудно получить в следующем виде:

в кольцевой зоне  $1 \leq \rho \leq \delta$

$$\sigma_r = \sigma_s (-q + \ln \rho), \quad \sigma_\theta = \sigma_s (-q + 1 + \ln \rho), \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (2.1)$$

в кольцевой зоне  $\delta \leq \rho \leq \infty$

$$\sigma_r = \sigma_s \left(1 - \frac{\delta}{\rho}\right), \quad \sigma_\theta = \sigma_s, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (2.2)$$

Величина  $\delta$  находится по формулам (2.1) из условия  $\sigma_r = 0$  при  $\rho = \delta$  в виде

$$\delta = \exp q$$

Компоненты напряжения, данные формулами (2.1) и (2.2), удовлетворяют уравнениям (1.2), (1.4a) и (1.2), (1.4b), а также условию на контуре выреза  $\rho = 1$ , кроме того, все компоненты напряжения остаются непрерывными на окружности  $\rho = \delta$ .

Для того чтобы вся плоскость вне выреза находилась в пластическом состоянии на бесконечности, должно действовать гидростатическое напряжение

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_s$$

Характеристиками (линиями скольжения) уравнений (1.2), (1.4a) во внутреннем кольце являются два ортогональных семейства логарифмических спиралей  $\rho = C \exp(\pm \theta)$ , а характеристиками уравнений (1.2), (1.4b) во внешнем

кольце радиальные прямые. Если внутреннее давление отсутствует  $q = 0$ , то во всей плоскости вне выреза имеет место напряженное состояние, описываемое формулами (2.2) при  $\delta = 1$ . Расположение характеристик соответственно для случаев  $q = 1$  и  $q = 0$  представлено на фиг. 1 и 2.

**§ 3. Всестороннее растяжение пластинки с некруговым отверстием: контур отверстия нагружен распределенным давлением.** Рассмотрим пластическое напряженное состояние пластинки с вырезом, ограниченным произвольным гладким контуром  $x = x(\alpha)$ ,  $y = y(\alpha)$ , где  $\alpha$  — угол между осью  $x$  и касательной  $t$  к контуру (фиг. 3), вызванное всесторонним растяжением.

Будем считать, что вдоль контура задано нормальное давление

$$\sigma_n = -\sigma_s q(\alpha) \quad (q > 0)$$

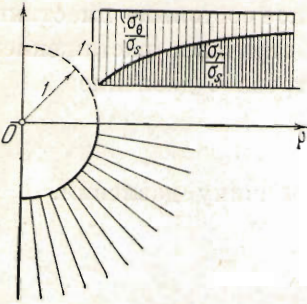
Предполагается, что функция  $q(\alpha)$  допускает первую производную, а функции  $x(\alpha)$ ,  $y(\alpha)$  — непрерывные вторые производные. Кроме того, эти функции периодические с периодом  $2\pi$ .

В целях простоты изложения наложим на функцию дополнительное ограничение<sup>1</sup>

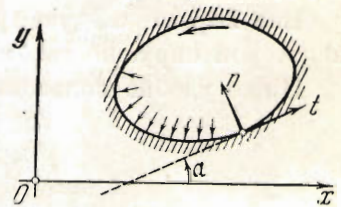
$$|q'(\alpha)| < 1$$

При пластическом напряженном состоянии пластинки, как это следует из аналогии с полярно-симметричной задачей, будут иметь место две зоны. В некоторой зоне I вблизи отверстия  $\sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$  и напряженное состояние описывается уравнениями (1.2), (1.4a), во внешней зоне II вдали от отверстия  $\sigma_x \sigma_y \geq \tau_{xy}^2$  и напряженное состояние определяется уравнениями (1.2), (1.4b).

<sup>1</sup> Это ограничение выполняется, например, в случае равномерного давления  $q = \text{const}$ ; впрочем, оно может быть легко снято.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Контурные значения  $\omega$  и  $\varphi$  находятся по формулам (1.16) при  $\sigma_n = -\sigma_s q(x)$ ,  $\Delta = -\sigma_s q(0)$  в виде

$$\varphi = \alpha, \quad \omega = \omega(x) = q(0) - q(x) + \frac{1}{2} \tag{3.1}$$

Знак  $\alpha$  выбран положительным:  $\alpha = +1$ , а произвольное число  $n = 0$ .

Контурные значения  $\xi$  и  $\eta$  будут в силу формул (1.7) определены в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(x) \\ \eta &= \eta(x) \end{aligned} \right\} = q(0) - q(x) + \frac{1}{2} \pm \alpha \tag{3.2}$$

Эти функции допускают непрерывные первые производные; в силу условия  $|q'(x)| < 1$  они монотонны, причем  $\xi'(x) > 0$ ,  $\eta'(x) < 0$ ; при обходе вокруг контура  $\xi(x)$  получает приращение  $+2\pi$ , а  $\eta(x)$  приращение  $-2\pi$ .

Нахождение пластического плоского напряженного состояния в зоне I, где  $\sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$ , аналогично определению напряжений в условиях плоского деформированного состояния, выполненному С. А. Христиановичем<sup>[2]</sup>. Оно сводится к построению решения  $\omega = \omega(x, y)$ ,  $\varphi = \varphi(x, y)$  уравнений (1.6), удовлетворяющего условиям (3.1) на кривой  $x = x(\alpha)$ ,  $y = y(\alpha)$ . Так как  $\xi(x)$  и  $\eta(x)$  не равны постоянным, то поставленная задача может быть сведена к определению решения  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$  уравнений (1.9) при условии соблюдения равенств  $x = x(\alpha)$ ,  $y = y(\alpha)$  на кривой (3.2).

Введем в рассмотрение плоскость  $\xi\eta$ .

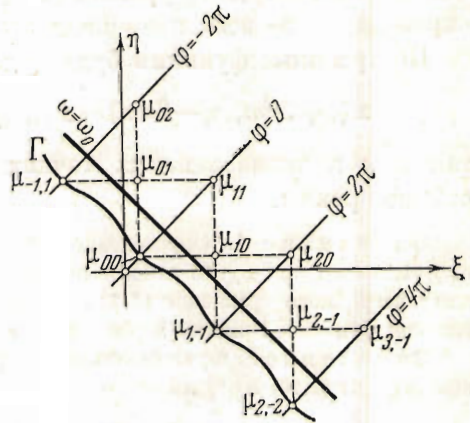
Характеристики  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$  изображаются в этой плоскости прямыми, параллельными координатным осям; линии  $\varphi = \text{const}$  и  $\omega = \text{const}$  изображаются прямыми, параллельными биссектрисам соответственно первого и второго координатного углов.

Как уравнения (1.9), так и граничные условия не изменяются при замене  $\varphi$  на  $\varphi + 2\pi m$ , если  $m$  — целое число. Добавление к  $\varphi$  величины  $2\pi m$  соответствует перемещению в плоскости  $\xi\eta$  в направлении  $\omega = \text{const}$  на расстояние  $2\sqrt{2}\pi m$ .

Условимся, следуя С. Г. Михлину, называть два геометрических образа в плоскости  $\xi\eta$  эквивалентными, если их можно совместить переносом одного из них в направлении  $\omega = \text{const}$  на расстояние  $2\sqrt{2}\pi m$ .

Нанесем в плоскости  $\xi\eta$  (фиг. 4) кривую (3.2) для  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ . Пусть это будет линия  $\mu_{00}\mu_{1,-1}$ . Через точки  $\mu_{00}$  и  $\mu_{1,-1}$  проведем прямые, параллельные осям координат (фиг. 4); таким образом будет получен прямоугольный треугольник  $\mu_{00}\mu_{10}\mu_{1,-1}$  (с криволинейной гипотенузой), катеты которого равны  $2\pi$ . Отрезки кривых, эквивалентных  $\mu_{00}\mu_{1,-1}$ , составляют непрерывную линию  $\Gamma$ , простирающуюся бесконечно в обе стороны.

Около каждого из этих отрезков также построим прямоугольные треугольники, проводя прямые, параллельные осям координат. К линии  $\Gamma$  будет примыкать цепь треугольников, эквивалентных треугольникам  $\mu_{00}\mu_{10}\mu_{1,-1}$ .



Фиг. 4.

Функции  $x = x(\alpha)$ ,  $y = y(\alpha)$  определяют  $x$  и  $y$  вдоль отрезка  $\mu_{00}\mu_{1,-1}$ , являющегося изображением контура. Используя уравнения (1.9) и (3.4), нетрудно вдоль того же отрезка  $\mu_{00}\mu_{1,-1}$  найти также производные

$$\left. \begin{array}{l} \partial x / \partial \xi \\ \partial y / \partial \xi \end{array} \right\} = \frac{r}{\sqrt{2\xi'}(\alpha)} \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right), \quad \left. \begin{array}{l} \partial x / \partial \eta \\ \partial y / \partial \eta \end{array} \right\} = \frac{r}{\sqrt{2\eta'}(\alpha)} \cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right) \quad (*)$$

где  $r$  — радиус кривизны контура в плоскости  $xu$ .

Таким образом вдоль  $\mu_{00}\mu_{1,-1}$  известны значения функций  $x$ ,  $y$  и производных  $\partial x / \partial \xi$ ,  $\partial x / \partial \eta$ ,  $\partial y / \partial \xi$ ,  $\partial y / \partial \eta$ . Чтобы найти  $x = x(\xi, \eta)$  и  $y = y(\xi, \eta)$  в треугольнике  $\mu_{00}\mu_{10}\mu_{1,-1}$ , достаточно решить задачу Коши для уравнений (1.9). Очевидно, что найденные таким образом решения имеют силу во всей цепи треугольников, эквивалентных треугольнику  $\mu_{00}\mu_{10}\mu_{1,-1}$ .

Далее, строится квадрат  $\mu_{00}\mu_{10}\mu_{11}\mu_{01}$ , а также цепь квадратов, ему эквивалентных. В каждом из них можно определить функции  $x$  и  $y$ . Рассмотрим, например, квадрат  $\mu_{00}\mu_{10}\mu_{11}\mu_{01}$ ; стороны его суть характеристики различных семейств уравнений (1.9). Вдоль двух отрезков  $\mu_{00}\mu_{10}$  и  $\mu_{00}\mu_{01}$  характеристик значения  $x$  и  $y$  известны, так как они были получены при определении этих величин в треугольниках  $\mu_{00}\mu_{10}\mu_{1,-1}$  и  $\mu_{00}\mu_{01}\mu_{-1,1}$ . Чтобы найти  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$  в квадрате  $\mu_{00}\mu_{10}\mu_{11}\mu_{01}$ , достаточно решить задачу Римана для уравнений (1.9). Очевидно, что найденное решение справедливо во всей цепи квадратов, эквивалентных квадрату  $\mu_{00}\mu_{10}\mu_{11}\mu_{01}$ .

Построенные функции будут удовлетворять равенствам

$$x(\xi + 2\pi m, \eta - 2\pi m) = x(\xi, \eta), \quad y(\xi + 2\pi m, \eta - 2\pi m) = y(\xi, \eta)$$

так как в эквивалентных точках значения  $x$  и  $y$  должны быть соответственно равны.

Замечание 1. Определение решений краевых задач Коши и Римана для уравнений (1.9) сводится путем замены переменных (1.11) к нахождению решений тех же задач для телеграфного уравнения (1.12). Последние могут быть получены в замкнутом виде при помощи функции Римана, хорошо известной для телеграфного уравнения.

Замечание 2. Функциональный определитель преобразования  $\Delta$  на линии  $\Gamma$  на основании формул (1.10) и (\*) имеет вид

$$\Delta^* = \frac{r^2}{2\xi'(\alpha)\eta'(\alpha)} < 0$$

Таким образом вдоль линии  $\Gamma$ , а следовательно, и в ее окрестности определитель  $\Delta$  отрицателен, поэтому при отображении областей с плоскости  $xu$  на плоскость  $\xi\eta$  направления обходов соответствующих кривых становятся противоположными. Отсюда ясно, что в плоскости  $xu$  области вне контура соответствует в плоскости  $\xi\eta$  область, расположенная над линией  $\Gamma$ .

Функции  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$ , обратные по отношению к найденным функциям  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ , на основании формул (1.7) дают искомого решение  $\omega = \omega(x, y)$ ,  $\varphi = \varphi(x, y)$  уравнений (1.6), удовлетворяющее условиям (3.1) на кривой  $x = x(\alpha)$ ,  $y = y(\alpha)$ .

Проведем в плоскости  $\xi\eta$  прямую

$$\omega = \omega_0 = q(0) + \frac{1}{2}$$

которая на основании формул (1.18) соответствует границе зон I и II.



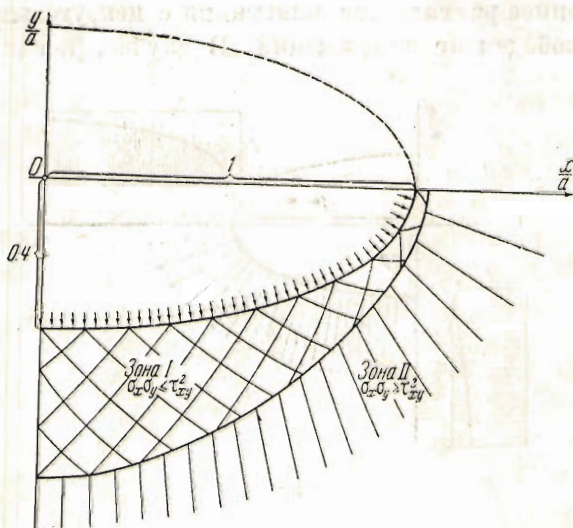
В отличие от задачи Христиановича о распределении напряжений вокруг отверстий при плоском деформированном состоянии, в котором использовалась вся полуплоскость  $\xi\eta$  над линией  $\Gamma$ , в рассматриваемой здесь задаче построенное решение имеет смысл лишь в полосе  $\omega(x) \leq \omega \leq \omega_0$ .

Уравнения границы зон I и II в плоскости  $x\eta$ , принимая во внимание (1.7), могут быть получены путем подстановки  $\xi = \omega_0 + \varphi$ ,  $\eta = \omega_0 - \varphi$  в функции от  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  в виде

$$x = x_*(\varphi) = x(\omega_0 + \varphi, \omega_0 - \varphi), \quad y = y_*(\varphi) = y(\omega_0 + \varphi, \omega_0 - \varphi)$$

Эта линия является границей области существования построенного решения, т. е. границей между зоной, где  $\sigma_x \sigma_y < \tau_{xy}^2$ , и зоной, где  $\sigma_x \sigma_y > \tau_{xy}^2$ .

Нахождение пластического плоского напряженного состояния в зоне II, где



Фиг. 5.

$\sigma_x \sigma_y > \tau_{xy}^2$ , сводится к определению произвольных функций  $\Phi(\varphi)$  и  $\Psi(\varphi)$ , входящих в интегралы (1.15), из условий (1.17):

$$2\chi = 1, \quad x = x_*(\varphi), \quad y = y_*(\varphi)$$

Интегралы (1.15) приводят к уравнениям

$$y + x \operatorname{ctg} \varphi = y_*(\varphi) + x_*(\varphi) \operatorname{ctg} \varphi \tag{3.3}$$

$$2\chi = \frac{x'_*(\varphi) \operatorname{tg} \varphi}{x - x_*(\varphi) + x'_*(\varphi) \operatorname{tg} \varphi} \tag{3.4}$$

Характеристиками в плоскости  $x\eta$  являются прямые  $\varphi = \text{const}$ . Компоненты напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  определяются формулами (1.13)

Для создания рассмотренного напряженного состояния на бесконечности должно действовать гидростатическое напряжение

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_s, \quad \tau_{xy} = 0$$

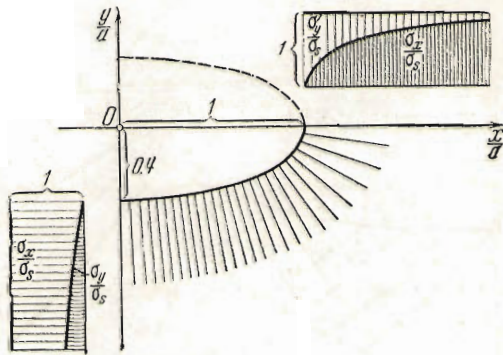
что следует из формул (1.13) и (3.4) при  $x = \infty$ .

В качестве примера рассмотрено распределение напряжений вокруг отверстия, ограниченного эллипсом  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  (причем  $b/a = 0.4$ ), по контуру которого действует равномерное давление  $\sigma_n = -0.15\sigma_s$ .

Во внутренней зоне  $I$  решение задачи проведено приближенным методом Массо, состоящим в замене отыскания решения краевых задач уравнения (1.9) определением  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $x$ ,  $y$  в конечном числе узловых точек сетки характеристик. Значения  $x$ ,  $y$ , соответствующие  $\omega = \omega_0 = 0.65$ , определяют координаты  $x_*$ ,  $y_*$  точек границы между  $I$  и  $II$  зонами. Во внешней зоне  $II$  напряженное состояние определяется формулами (1.5) и (3.4).

На фиг. 5 нанесена граница между указанными зонами  $I$  и  $II$ , а также изображены сетка криволинейных характеристик  $\xi = \text{const}$ ,  $\eta = \text{const}$  в зоне  $I$  и прямолинейные характеристики  $\varphi = \text{const}$  в зоне  $II$ .

§ 4. Всестороннее растяжение пластинки с некруговым отверстием; контур отверстия свободен от напряжений. В случае, когда контур  $x = x(\varphi)$ ,



Фиг. 6.

$y = y(x)$  свободен от напряжений, зона  $I$ , где  $\sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$ , пропадает, а зона  $II$ , где  $\sigma_x \sigma_y > \tau_{xy}^2$ , заполняет всю плоскость вне выреза. Задача сводится к нахождению произвольных функций  $\Phi(\varphi)$  и  $\Psi(\varphi)$ , входящих в интегралы (1.15), из условий на контуре

$$2\chi = 1, \quad \varphi = x$$

которые следуют из формул (1.17) при  $\sigma_n = 0$ ,  $n = 0$ ,  $x = +1$ .

Интегралы (1.15) приводят к уравнениям

$$2\chi = \frac{x'(\varphi) \operatorname{tg} \varphi}{x - x(\varphi) + x'(\varphi) \operatorname{tg} \varphi}$$

$$y + x \operatorname{ctg} \varphi = y(\varphi) + x(\varphi) \operatorname{ctg} \varphi \quad (4.1)$$

Компоненты напряжения будут

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \sigma_s \left[ 1 - \frac{x'(\varphi) \operatorname{tg} \varphi}{2[x - x(\varphi) + x'(\varphi) \operatorname{tg} \varphi]} (1 \mp \cos 2\varphi) \right]$$

$$\tau_{xy} = \sigma_s \frac{x'(\varphi) \operatorname{tg} \varphi}{2[x - x(\varphi) + x'(\varphi) \operatorname{tg} \varphi]} \sin 2\varphi \quad (4.2)$$

причем  $\varphi$  определена как функция  $x$  и  $y$  уравнением (4.1). Характеристиками  $\varphi = \text{const}$  являются прямые, нормальные к контуру.

Для создания рассматриваемого напряженного состояния на бесконечности должно действовать гидростатическое напряжение

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_s, \quad \tau_{xy} = 0$$

что следует из формул (4.2) при  $x = \infty$ .

Поясним изложенное на примере пластинки с эллиптическим отверстием  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ . При этом

$$x(\varphi) = \frac{+a^2 \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}, \quad y(\varphi) = \frac{-b^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}$$

Ниже удобно пользоваться безразмерными величинами

$$\bar{x} = x/a, \quad \bar{y} = y/a, \quad \beta = b/a$$

Компоненты напряжения будут

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} = \sigma_s \left[ 1 - \frac{\beta^2 \sin \varphi (1 \mp \cos 2\varphi)}{2 [\bar{x} (\sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi)^{3/2} - (1 - \beta^2) \sin^3 \varphi]} \right] \quad (4.3)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_s \frac{\beta^2 \sin \varphi \sin 2\varphi}{2 [\bar{x} (\sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi)^{3/2} - (1 - \beta^2) \sin^3 \varphi]}$$

причем  $\varphi$  определена как функция  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  уравнением

$$\bar{y} + \bar{x} \operatorname{ctg} \varphi = \frac{(1 - \beta^2) \cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi}} \quad (4.4)$$

Нетрудно найти, например, компоненты напряжения вдоль осей  $x$  и  $y$ . Имеем

вдоль оси  $x$  (для  $|\bar{x}| \geq 1$ )

$$\sigma_x = \sigma_s \left( 1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2 - |\bar{x}|} \right), \quad \sigma_y = \sigma_s, \quad \tau_{xy} = 0$$

вдоль оси  $y$  (для  $|\bar{y}| \geq \beta$ )

$$\sigma_x = \sigma_s, \quad \sigma_y = \sigma_s \left( 1 - \frac{1}{1 - \beta^2 + \beta |\bar{y}|} \right), \quad \tau_{xy} = 0$$

На фиг. 6 изображены эпюры распределения компонент напряжения и расположение характеристик при  $\beta = 0.4$ .

Поступила в редакцию  
10 XII 1945

Институт механики  
Академии Наук СССР

## W. W. SOKOLOVSKY. — PLASTIC EQUILIBRIUM OF A PLANE STRESSED STATE

Paragraph 1 contains an investigation of plastic equilibrium in plane stressed states. The Saint Venant conditions are taken as conditions of plasticity, and are presented in two forms (1.4a) and (1.4b).

The system of equations (1.2), (1.4a) coinciding with the system of equations of plane plastic deformed states is reduced to the system of equations (1.6) by introducing new variables  $\omega$  and  $\varphi$  according to formulae (1.5).

System (1.6) is of the hyperbolic type and has two families of curvilinear orthogonal characteristics in the  $xy$ -plane and may be reduced to the form (1.9).

The system of equations (1.2), (1.4b) is reduced to the system of equations (1.14) by introducing the variables  $\varphi$  and  $\chi$  according to formulae (1.13). The system (1.14) has integrals (1.15), the characteristics being a family of straight lines in the  $xy$ -plane.

Paragraph 2 takes up the plastic stressed state in a plate with a circular aperture. The state is caused by polar-symmetrical extension due to stresses  $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_s$ ,  $\tau_{r\theta} = 0$  at infinity. The normal pressure  $\sigma_r = -\sigma_s q$  where  $0 \leq q \leq 1$  is applied along the contour of the aperture. Two concentric circular zones about the aperture are investigated, in which the components of stresses are determined by formulae (2.1) and (2.2) respectively. Figs. 1 and 2 give the distribution of the characteristics when  $q = 1$  and  $q = 0$ .

Paragraph 3 takes up the plastic stressed state in a plate with an aperture of arbitrary smooth contour. The state is caused by stresses  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_s$ ,  $\tau_{xy} = 0$  at infinity. The normal pressure  $\sigma_n = -\sigma_s q(\alpha)$  where  $0 \leq q \leq 1$  is applied along the contour. In zone *I* adjacent to the aperture  $\sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$  and the stressed state is described by equations (1.2), (1.4a). In zone *II* beyond *I* the inequality  $\sigma_x \sigma_y \geq \tau_{xy}^2$  holds, and the stressed state is described by equations (1.2) (1.4b). The boundary between the zones is found from the conditions of continuity of all components of stresses.

As an example, an elliptic aperture is considered, along whose contour pressure  $\sigma_n = -0.15\sigma_s$  is applied. The boundary between zones *I* and *II* and the distribution of characteristics in these zones are given in fig. 5.

Paragraph 4 takes up a particular case of the above problem, namely, when the contour of the aperture is free of pressure. In this case, zone *I* where  $\sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$ , disappears, and zone *II*, where  $\sigma_x \sigma_y \geq \tau_{xy}^2$  extends throughout the entire plate. The stress components are given by formulae (4.1), (4.2). As an illustration, the distribution of characteristics and distribution of stresses along the  $x$ - and  $y$ -axes for an elliptic aperture are given (fig. 6).

This work is outlined in part in an article called «Plane Plastic Stressed State according to Saint-Venant» in vol. LI, No. 6 of Comptes Rendus URSS (1946).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Пластическое плоское напряженное состояние по Сен-Венану. Доклады Академии Наук СССР. 1946. Т. LI. № 6.
2. Христианович С. А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре. Математический сборник. Т. I. (43) № 4. 1936.