

## О МЕТОДЕ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧАХ О КРУГЛЫХ ПЛИТАХ И ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

Б. Г. Коренев

(Москва)

Работы А. Н. Крылова [1,2] положили основание широкому распространению метода начальных параметров. Этот метод дает значительные упрощения в эффективных решениях одномерных задач теории упругости. Сравнивая в своей широко известной работе [1] результаты, полученные с помощью метода начальных параметров, с теми, которые приведены в книге К. Hayashi [3], А. Н. Крылов совершенно справедливо указывает на сложность и громоздкость решения задач об изгибе балки на упругом основании у этого автора.

В настоящей работе метод начальных параметров распространяется на некоторые задачи теории плит и оболочек.

Сравнение приводимых ниже результатов с ранее опубликованными работами проведено для двух частных случаев расчета круглой пластины на упругом основании для центрально симметричной нагрузки и для осесимметричной деформации круговой конической оболочки; для первой задачи подробно разработанные примеры имеются в часто цитируемой работе F. Schleicher [4], формулы которого по своей громоздкости не уступают результатам Хаяси. Результаты Шлейхера использованы С. А. Бернштейном [5], который приводит таблицы произвольных постоянных интегрирования при расчете бесконечной пластины на упругом основании, загруженной равномерно распределенной по кругу нагрузкой<sup>1</sup>; указанные постоянные с точностью до множителя  $k/a$ , где  $k$  — постоянная,  $a$  аргумент, представляют собой значения бесселевых функций. Заметим, что формулы Шлейхера приводятся также П. Ф. Папковичем [7].

Неудачную попытку [применения метода начальных параметров к этой же задаче произвел К. А. Китовер [8]. Его фундаментальные функции включают в себе коэффициенты, вычисляемые как частные от деления двух определителей четвертого порядка, в то время как каждое из этих частных представляет собой одну из бесселевых функций, которые являются элементами этих определителей. Не пользуется теми упрощениями, о которых здесь идет речь, и В. Лева [9], что усложняет проводимый им расчет конических оболочек. Заметим, что развиваемые здесь приемы связаны с методом компенсирующих нагрузок (см. [10])

1. Рассмотрим краевые задачи сначала для однородного уравнения

$$[L_1 + 1][L_2(w) - w] = 0 \quad (1.1)$$

$$L_i(w) = w'' + q_i(x)w' + p_i(x)w \quad (i = 1, 2)$$

<sup>1</sup> Более простые формулы для этого частного случая опубликованы в нашей работе [6].



Это уравнение сводится к системе двух уравнений второго порядка

$$L_1(w) + w = 0, \quad L_2(w) - w = 0 \quad (1.2)$$

Предположим, что функции  $p(x)$  и  $q(x)$  таковы, что особыми точками этих уравнений являются только начало координат и бесконечно удаленная точка. Основными функциями влияния  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  будем называть решения уравнения (1.1), остающиеся конечными вместе с первыми тремя производными в начале координат и имеющие при  $x = a$  особенности

$$\left(\frac{d_n \Gamma_n}{dx^n}\right)_{x=a+0} - \left(\frac{d_n \Gamma_n}{dx^n}\right)_{x=a-0} = 1 \quad (1.3)$$

При  $x = a$  имеют разрывы  $\Gamma_1$ , первая производная  $\Gamma_2$ , вторая производная и операторы  $L_i$  над  $\Gamma_3$ , третья производная и  $L'_i$  над  $\Gamma_4$  (операция  $L_i$  производится над решением  $i$ -го уравнения)<sup>1</sup>.

Обозначим через  $u$  и  $f$  два линейно независимых решения первого из уравнений (1.2). Пусть функция  $u$  не имеет особенностей при  $x = 0$ . Соответственные решения второго уравнения (1.2) обозначим через  $v$  и  $g$ .

Определим функции  $K_n(x, a)$  следующим образом:

	$a \geq x$	$a \leq x$	
$K_1$	$\frac{1}{2W_1} f(a) u(x)$	$\frac{1}{2W_1} u(a) f(x)$	
$K_2$	$\frac{1}{2W_1} f'(a) u(x)$	$\frac{1}{2W_1} u'(a) f(x)$	
$K_3$	$\frac{1}{2W_2} g(a) v(x)$	$\frac{1}{2W_2} v(a) g(x)$	
$K_4$	$\frac{1}{2W_2} g'(a) v(x)$	$\frac{1}{2W_2} v'(a) g(x)$	(1.4)

Здесь через  $W_1, W_2$  обозначены определители Вронского уравнений (1.2).

Легко убедиться, что искомые функции влияния будут иметь вид

$$\Gamma_1 = -K_2 - K_4, \quad \Gamma_2 = K_1 + K_3, \quad \Gamma_3 = K_2 - K_4, \quad \Gamma_4 = -K_1 + K_3 \quad (1.5)$$

Следуя А. Н. Крылову, построим фундаментальные функции  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ , обладающие свойством единичной матрицы. Потребуем, чтобы фундаментальная функция  $Y_n \equiv 0$  при  $x < a$ ; при  $x = a + 0$  эти функции должны удовлетворять таким условиям:

$n$	$Y_n$	$Y_n'$	$L(Y_n)$	$L'(Y_n)$	
1	1	0	0	0	
2	0	1	0	0	
3	0	0	1	0	
4	0	0	0	1	(1.6)

<sup>1</sup> Непрерывность операторов может исключать непрерывность второй и третьей производной функций  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . В работе введены условия, касающиеся только операторов, что упростило формулы и позволило придать им простой механический смысл.



Можно показать, что функции  $Y_n$  выражаются через  $\Gamma_n$ , а именно:

$$Y_n = \Gamma_n - \Gamma_n^* \quad (1.7)$$

где  $\Gamma_n^*$  — аналитическое продолжение левой ветви функции для  $x > a$ .

2. В практических приложениях, например, в теории оболочек, важен частный случай уравнения (1.4)

$$L^2(w) + w = 0 \quad (2.1)$$

Для этого случая функции  $K$  будут комплексными. Пусть

$$U - iV = u, \quad U + iV = v, \quad F - iG = f, \quad F + iG = g$$

В рассматриваемых нами задачах функции влияния можно определить следующим образом:

$$\begin{array}{ll} x \leq a & x \geq a \\ \Gamma_1 & -\frac{1}{W} [F'(a)V(x) + G'(a)U(x)] \quad -\frac{1}{W} [V'(a)F(x) + U'(a)G(x)] \\ \Gamma_2 & -\frac{1}{W} [F(a)V(x) + G(a)U(x)] \quad -\frac{1}{W} [V(a)F(x) + U(a)G(x)] \\ \Gamma_3 & \frac{1}{W} [F'(a)U(x) - G'(a)V(x)] \quad \frac{1}{W} [U'(a)F(x) - V'(a)G(x)] \\ \Gamma_4 & \frac{1}{W} [F(a)U(x) - G(a)V(x)] \quad \frac{1}{W} [U(a)F(x) - U(a)G(x)] \end{array} \quad (2.2)$$

где

$$W = V(a)F'(a) + U(a)G'(a) - U'(a)G(a) - V'(a)F(a)$$

Фундаментальные функции получим с помощью формулы (1.7).

3. Рассмотрим чисто вынужденные изгибные колебания круглой пластины, нагруженной силами  $P(r) \cos n\varphi \cos kt$ , где  $r$ ,  $\varphi$  — полярные координаты,  $n$  — целое положительное число,  $k$  — частота возмущающей силы,  $t$  — время.

Ординаты упругой поверхности представим выражением

$$W(r, \varphi, t) = w(r) \cos n\varphi \cos kt \quad (3.1)$$

где  $w(r)$  удовлетворяет уравнению

$$L^2(w) = \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right)^2 w = \lambda^4 w \quad \left( \lambda = \sqrt[4]{\frac{\gamma h}{Dg} k^2} \right) \quad (3.2)$$

причем  $\gamma$  — объемный вес,  $h$  — толщина,  $D$  — цилиндрическая жесткость.

Построим функции, обладающие свойством единичной матрицы. Предварительно заметим, что в задачах теории пластин функции  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_4$  соответствуют случаю нагрузки моментами и силами, функции  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  — загрузению соответственно линейным или угловым смещением. Это следует из того, что разрыву непрерывности во второй производной функций  $\Gamma$  соответствует разрыв функции  $L(w)$ ; разрыву в третьей производной — разрыв  $dL(w)/dr$ .



Введем обозначение  $\lambda r = x$ . Пусть искомые особенности соответствуют  $x = a$ ; фундаментальные функции<sup>1</sup> будут иметь вид (3.3)

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\pi a}{4} \left[ -J_n'(a) N_n(x) + iJ_n'(ia) H_n(ix) + N_n'(a) J_n(x) - iH_n'(ia) J_n(ix) \right] \\ Y_2 &= \frac{\pi a}{4\lambda} \left[ +J_n(a) N_n(x) - iJ_n(ia) H_n(ix) - N_n(a) J_n(x) + iH_n(ia) J_n(ix) \right] \\ Y_3 &= \frac{\pi a}{4D\lambda^2} \left[ -J_n'(a) N_n(x) + iJ_n'(ia) H_n(ix) - N_n'(a) J_n(x) + iH_n'(ia) J_n(ix) \right] \\ Y_4 &= \frac{\pi a}{4D\lambda^3} \left[ J_n(a) N_n(x) + iJ_n(ia) H_n(ix) - N_n(a) J_n(x) - iH_n(ia) J_n(ix) \right] \end{aligned}$$

где  $J_n(x)$ ,  $N_n(x)$  и  $H_n(x)$  соответственно символы функций Бесселя, Неймана и Ганкеля первого рода, а штрих обозначает дифференцирование по  $x$ .

4. Рассмотрим пластинку, лежащую на упругом основании и нагруженную нагрузками  $q(r) \cos n\varphi$ . Ординаты  $w(r, \varphi)$  удовлетворяют уравнению

$$D\Delta^2 w + k_0 w = q \quad (4.1)$$

Фундаментальные функции имеют вид

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\pi a}{2} \left[ -u_n'(a) g_n(x) + f_n'(a) v_n(x) - v_n'(a) f_n(x) + g_n'(a) u_n(x) \right] \\ Y_2 &= \frac{-\pi a}{2\lambda} \left[ -u_n(a) g_n(x) + f_n(a) v_n(x) - v_n(a) f_n(x) + g_n(a) u_n(x) \right] \\ Y_3 &= \frac{\pi a}{2D\lambda^2} \left[ u_n'(a) f_n(x) - f_n'(a) u_n(x) - v_n'(a) g_n(x) + g_n'(a) v_n(x) \right] \\ Y_4 &= \frac{\pi a}{2D\lambda^3} \left[ u_n(a) f_n(x) - f_n(a) u_n(x) - v_n(a) g_n(x) + g_n(a) v_n(x) \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} x &= \lambda r, & \lambda &= \sqrt[4]{k_0/D}, & u_n(x) + i v_n(x) &= J_n(x \sqrt{i}) \\ f_n(x) + i g_n(x) &= H_n^{(1)}(x \sqrt{i}) \end{aligned}$$

Приведем решение для частного случая  $n=0$ . Пусть круглая пластина радиуса (приведенного)  $b$  нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , приложенной по окружности радиуса  $a$ .

Уравнение упругой поверхности имеет вид:

при  $x \leq a$

$$w = w_k \quad (w_k = c_0 u_0(x) + d_0 v_0(x)) \quad (4.3)$$

при  $x \geq a$

$$w = w_k + \frac{\pi a q}{2D\lambda^3} \left[ u_0(a) f_0(x) - v_0(a) g_0(x) - u_0(x) f_0(a) + v_0(x) g_0(a) \right]$$

Для определения  $c$  и  $d$  составляются два уравнения из условий при  $x = b$ .

<sup>1</sup> Коэффициенты при  $Y_3, Y_4, Y_3, Y_4$  выбраны здесь и далее так, чтобы давать в задачах теории плит разрыв непосредственно в поперечной силе и моменте. Поэтому, начиная с § 2 знаки этих функций изменены на противоположные по сравнению с § 1.

В качестве второго примера приведем решение для круглой пластины радиуса  $b$ , нагруженной нагрузкой  $q$ , равномерно распределенной по площади концентрического контуру кольца, ограниченного окружностями радиусов  $a_1, a_2$  ( $a_2 > a_1$ ):

при  $x \leq a$

$$w = w_k$$

при  $a_1 \leq x \leq a_2$

$$w = w_k + \frac{q}{k_0} - \frac{q}{k_0} Y_1(a_1, x) \quad (4.4)$$

при  $a_2 \leq x \leq b$

$$w = w_k - \frac{q}{k_0} [Y_1(a_1, x) - Y_1(a_2, x)]$$

где

$$w_k = c_1 u_0(x) + c_2 r_0(x)$$

Здесь функция  $Y_1$  определяется по формуле (4.2), постоянные  $c_1$  и  $c_2$  определяются из граничных условий. Заметим, что у F. Schleicher для решения такой задачи составляются десять уравнений.

5. Рассмотрим круговую коническую тонкую оболочку постоянной толщины  $h$  с углом при вершине  $2\gamma$ , нагруженную силами, симметричными относительно оси.

Пусть  $G_1, G_2$  — изгибающие моменты,  $T_1, T_2$  — нормальные силы,  $N$  — поперечная сила (фиг. 1). Индекс 1 относится к сечению, перпендикулярному образующей; индекс 2 — к сечению плоскостью, проходящей через ось.

Обозначим через  $r$  расстояние точки конуса до его вершины.

Для сокращения некоторых промежуточных выкладок [будем полагать, как это часто делается в литературе, коэффициент Пуассона  $\sigma = 0$ ; это допущение не является необходимым, и основная часть результатов этого параграфа сохранится при  $\sigma \neq 0$ ].

По Ляву [11] между перемещениями  $U, W$ , направленными соответственно по образующей и перпендикулярно ей, и усилиями имеют место зависимости

$$t_1 = \frac{dU}{dr} + \sigma \left[ \frac{U}{r} - \frac{W}{r \operatorname{tg} \gamma} \right], \quad t_2 = \sigma \frac{dU}{dr} + \left[ \frac{U}{r} - \frac{W}{r \operatorname{tg} \gamma} \right] \quad (5.1)$$

$$g_1 = -\frac{h^2}{3} \left[ \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dW}{dr} \right], \quad g_2 = -\frac{h^2}{3} \left[ \sigma \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right], \quad n = -t_1 \operatorname{ctg} \gamma$$

где

$$t_1 = \frac{1-\sigma^2}{2Eh} T_1, \quad t_2 = \frac{1-\sigma^2}{2Eh} T_2, \quad g_1 = \frac{1-\sigma^2}{2Eh} G_1, \quad g_2 = \frac{1-\sigma^2}{2Eh} G_2, \quad n = \frac{1-\sigma^2}{2Eh} N$$

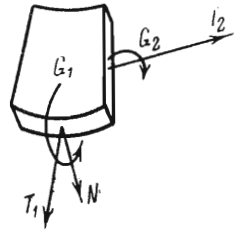
Если обозначить

$$\frac{dW}{dr} = \xi, \quad n = \frac{\eta}{r}, \quad r = \frac{1}{2} \zeta^2 \quad (5.2)$$

то определение функций  $\xi$  и  $\eta$  сводится к интегрированию системы уравнений

$$\frac{d^2 \xi}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d\xi}{d\zeta} - \frac{4}{\zeta^2} \xi + \frac{6}{h^2} \eta = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d\eta}{d\zeta} - \frac{4}{\zeta^2} \eta - \frac{2(1-\sigma^2)}{\operatorname{tg}^2 \gamma} \xi = 0$$



Фиг. 1.



Введем обозначение

$$\frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{h \operatorname{tg} \gamma} = m$$

Ляв приводит решение этой системы:

$$\begin{aligned} \xi &= A_1 J_2 \left( (1+i) (2mr)^{\frac{1}{2}} \right) + B_1 Y_2 \left( (1+i) (2mr)^{\frac{1}{2}} \right) + \\ &\quad + A_2 J_2 \left( (1-i) (2mr)^{\frac{1}{2}} \right) + B_2 Y_2 \left( (1-i) (2mr)^{\frac{1}{2}} \right) \\ \eta &= \frac{1-\sigma^2}{m \operatorname{tg}^2 \gamma} i \left( A_1 J_2 \left( (1+i) (2mr)^{\frac{1}{2}} \right) + B_1 Y_2 \left( (1+i) (2mr)^{\frac{1}{2}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - A_2 J_2 \left( (1-i) (2mr)^{\frac{1}{2}} \right) + B_2 Y_2 \left( (1-i) (2mr)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $Y_2$  — символ функции Неймана второго рода.

Ляв указывает, что постоянные  $A$  и  $B$  должны быть выбраны так, чтобы  $\xi$  и  $\eta$  были действительными. Покажем, как применить метод начальных параметров к этой задаче.

Введем обозначение  $\sqrt{4mr} = x$ . Дифференцирование по этому аргументу будем обозначать штрихом.

В решение входят бесселевы функции комплексного аргумента  $x \sqrt{i}$  и  $x \sqrt{-i}$ ; воспользуемся не неймановыми функциями, а функциями Ганкеля первого рода<sup>1</sup>.

В этом случае функции влияния  $\Gamma$  будут стремиться к нулю при больших значениях аргумента.

Пусть

$$J_2(x \sqrt{i}) = u(x) + v(x), \quad H_2^{(1)}(x \sqrt{i}) = f(x) + ig(x)$$

Заметим, что между функциями  $u$ ,  $v$ ,  $f$ ,  $g$  существуют зависимости

$$\begin{aligned} u(x) f'(x) - v(x) g'(x) - u'(x) f(x) + v'(x) g(x) &= 0 \\ v(x) f'(x) + u(x) g'(x) - u'(x) g(x) - v'(x) f(x) &= \frac{2}{\pi x} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Будем представлять функции  $\xi$  и  $\eta$  в виде линейной комбинации действительных функций  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$ ,  $Y_4$ . Обозначим значение аргумента, соответствующее началу координат, через  $a$ .

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\pi a}{2} \left[ -u'(a) g(x) + f'(a) v(x) - v(a) f(x) + g'(a) u(x) \right] \\ Y_2 &= \frac{-\pi a}{2} \left[ -u(a) g(x) + f(a) v(x) - v(a) f(x) + g(a) u(x) \right] \\ Y_3 &= \frac{-\pi a}{2} \left[ u'(a) f(x) - f'(a) u(x) - v'(a) g(x) + g'(a) v(x) \right] \\ Y_4 &= \frac{\pi a}{2} \left[ u(a) f(x) - f(a) u(x) - v(a) g(x) + g(a) v(x) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

<sup>1</sup> В этом параграфе фундаментальные функции удовлетворяют дифференциальным условиям при  $x=a$ , соответствующим дифференцированию по безразмерной координате.

Пусть

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{4}{x^2}$$

Заметим, что

$$L(Y_1) = Y_3, \quad L(Y_2) = Y_4, \quad L(Y_3) = -Y_1, \quad L(Y_4) = -Y_2$$

Нетрудно проверить, воспользовавшись (5.5), что при  $x = a$

$$Y_1 = Y_2' = -L(Y_3) = -L'(Y_4) = 1,$$

$$Y_2 = Y_3 = Y_4 = Y_1' = Y_3' = Y_4' = 0$$

Приведем расчетные формулы (они по существу совпадают с формулами Лева, полученными при  $\sigma = 0$ ) для усилий на участке, свободном от нагрузки:

$$\begin{aligned} T_1 &= \left[ A_1 Y_1(x) + A_2 Y_2(x) + A_3 Y_3(x) + A_4 Y_4(x) \right] \frac{4h^2}{r} \\ N &= \left[ A_1 Y_1(x) + A_2 Y_2(x) + A_3 Y_3(x) + A_4 Y_4(x) \right] \frac{4h^2}{r} \operatorname{ctg} \gamma \\ T_2 &= \left[ A_1 Y_1'(x) + A_2 Y_2'(x) + A_3 Y_3'(x) + A_4 Y_4'(x) \right] 4h \sqrt{3} \operatorname{ctg} \gamma \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$G_1 = \left[ A_2 Y_1'(x) - A_1 Y_2'(x) + A_4 Y_3'(x) - A_3 Y_4'(x) \right] 4h^2 \operatorname{ctg} \gamma$$

$$G_2 = \left[ A_2 Y_1(x) - A_1 Y_2(x) + A_4 Y_3(x) - A_3 Y_4(x) \right] \frac{4h^3}{r \sqrt{3}}$$

Горизонтальный радиальный сдвиг на этом участке

$$\begin{aligned} u^* = U \sin \gamma + W \cos \gamma = \frac{2h}{E} \frac{1}{4} x^2 \sin \gamma \left[ A_1 Y_1'(x) + A_2 Y_2'(x) + \right. \\ \left. + A_3 Y_3'(x) + A_4 Y_4'(x) \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

Угол деформированной образующей с первоначальным направлением

$$\frac{dW}{dr} = \frac{2\sqrt{3}}{E} \left[ A_2 Y_1(x) - A_1 Y_2(x) + A_4 Y_3(x) - A_3 Y_4(x) \right] \quad (5.9)$$

Рассмотрим задачу о расчете оболочки, изображенной на фиг. 2.

Значения  $x$  в точках  $A, B, C, D$ , обозначим соответственно через  $a, a_1, a_2, b$ .

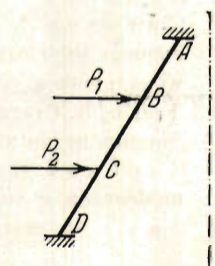
При  $x = a$  вследствие того, что оболочка зажата на концах:

$$u^* = 0, \quad \frac{dW}{dr} = 0$$

Поэтому при  $a < x < a_1$  решение будет иметь вид, представленный формулой (5.7) при  $A_1 = A_2 = 0$ .

Приведем формулы только для  $T_1$ :

$$T_1 = \frac{4h^2}{r} \left[ A_2 Y_2(a, x) + A_4 Y_4(a, x) \right]$$



Фиг. 2



При  $a_1 < x < a_2$  к этому решению нужно прибавить такое, которое дает разрыв в комбинации  $N, T_1$ , соответствующий нагрузке, приложенной на границе участков; таким образом

$$T_1 = \frac{4h^2}{r} \left[ A_3 Y_3(a, x) + A_4 Y_4(a, x) - P_1 \frac{r \sin \gamma}{4h^2} Y_1(a_1, x) \right]$$

При  $a_2 < x < b$

$$T_1 = \frac{4h^2}{r} \left[ A_3 Y_3(a, x) + A_4 Y_4(a, x) - P_1 \frac{r \sin \gamma}{4h^2} Y_1(a_1, x) - P_2 \frac{r \sin \gamma}{4h^2} Y_1(a_2, x) \right]$$

Постоянные  $A_3, A_4$  определяются из условий при  $x = b$ .

Следуя обычным приемам, т. е. по Леве [9], пришлось бы решать 12 уравнений вместо двух.

Поступила в редакцию

14 XII 1943

#### B. G. KORENEV. — METHOD OF INITIAL PARAMETERS IN PROBLEMS OF CIRCULAR PLATES AND SHELLS OF REVOLUTION

Krylov's work [1,2] laid the basis for the wide application of the method of initial parameters in one dimension problems of the theory of elasticity. In the present paper the author extends the method to a number of problems of the theory of shells and plates.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. 1930.
2. Крылов А. Н. Вибрация судов. 1936.
3. Хаяси К. Теория расчета балки на упругом основании в приложении к фундаментостроению. 1930.
4. Schleicher F. Die Kreisplatten auf elastischer Unterlage. 1926.
5. Бернштейн С. А. Ледяные переправы. 18-й сборник НТК НКПС. 1929.
6. Корнев Б. Г. Приложение функций Грина к расчету конструкций на упругом основании. Труды Днепропетровского инж.-строительного института. 1936.
7. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. 1941. Т. II.
8. Китовер К. А. Определение расчетных усилий и деформаций в симметрично нагруженных круглых и кольцевых пластинках. Труды Одесского института инженеров коммунального и гражданского строительства. 1934. Вып. 1.
9. Леве В. Статический расчет резервуаров для жидкостей. Железобетонные резервуары. Энциклопедия железобетонного строительства под ред. Ф. Эмпергера. 1933. Т. V.
10. Корнев Б. Г. Статическая интерпретация метода начальных параметров. Вестник инженеров и техников. 1940. № 10.
11. Ляв. Математическая теория упругости. 1935.