Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том X, 1946

ОБ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ ПРИ СОПРОТИВЛЕНИИ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ СКОРОСТИ

И. М. Волк

(Свердловск)

1. Постановка задачи. В настоящей работе рассматривается движение системы с одной степенью свободы, которое в каждом (вообще говоря, неизвестном) промежутке $0 \leqslant t \leqslant T$ времени, пока скорость сохраняет неизменное направление, задается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d\dot{x}}{dt} + q^2 x + p\dot{x}^n = 0 \tag{1.1}$$

при начальных условиях вида

$$x(0) = -a, \qquad \dot{x}(0) = 0 \tag{1.2}$$

где p, q, n, a — некоторые положительные постоянные величины, а через $\dot{x}$ обозначено dx/dt.

Обусловлено, что всякий раз отсчет любого из указанных промежутков времени производится от нуля, а отсчет положительных величин обобщенной координаты x — в направлении движения, и предполагается, что величина $\dot{x}^n$ в интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ неотрицательна, каким бы ни было число n.

Простейшую схему решаемой здесь задачи представляют свободные колебания груза на «невесомой» пружине в среде с сопротивлением, пропорциональным некоторой степени скорости; тогда x — расстояние какой-либо точки груза от ее положения при статическом равновесии, q^2 — жесткость пружины, отнесенная к единице массы груза, p — коэффициент сопротивления среды, отнесенный к единице той же массы. Если, кроме того, условиться, что началу движения на любом размахе соответствует значение $t = 0$, то на каждом следующем размахе роль a в начальных условиях (1.2) выполняет численное значение x в конце предыдущего размаха, T — продолжительность рассматриваемого размаха.

К решению дифференциального уравнения (1.1) приводят многие задачи[1]. Ясно, что в каждой из них величины x, q, p, n, a имеют свой особый физический смысл, но для удобства изложения в соответствии с приведен-

---

[1] Число таких задач значительно увеличится, если полагать, что в уравнении (1.1) роль независимой переменной выполняет не обязательно время. Например, во многих астрономических задачах, сводящихся к решению дифференциального уравнения вида (1.1), роль независимой переменной выполняет некоторая угловая величина.

ной выше схемой придерживаемся следующих терминов: q^2 — жесткость пружины, p — коэффициент сопротивления, n — показатель сопротивления, a — начальная амплитуда, $A = x(T)$ — конечная амплитуда, T — продолжительность размаха и $\alpha = A / a$ — декремент затухания.

Из задач, решавшихся ранее и математически близких к задаче, поставленной здесь, можно указать на решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\dot{x}}{dt} + q^2 x + F(\dot{x}) = 0 \qquad \left(x(0) = -a\,,\ \dot{x}(0) = 0\right) \tag{1.3}$$

где $F(\dot{x})$ — функция, разлагающаяся в ряд по целым положительным степеням своего аргумента. Этой задаче посвящено много работ[1]. Но дифференциальное уравнение (1.1) представляет частный случай уравнения (1.3) лишь при целых значениях показателя сопротивления, а между тем последний практически может оказаться не только целым, но и дробным и даже не рациональным числом.

2. Построение решения. Введем переменные r и ϑ, связанные с переменными x и t соотношениями

$$x = -aCr^{\lambda}\cos\vartheta\,, \qquad \frac{dx}{dt} = qaCr^{\lambda}\sin\vartheta \qquad \left(\vartheta\,|_{t=0} = 0\right) \tag{2.1}$$

где C и λ — некоторые постоянные, которыми соответствующим образом распорядимся в дальнейшем.

Новые переменные в силу дифференциального уравнения (1.1) и начальных условий (1.2), кроме того, должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\vartheta} &= -\frac{1}{\lambda}\,\frac{pC^{n-1}q^{n-2}a^{n-1}r^{\lambda(n-1)+1}\sin^{n+1}\vartheta}{1 - C^{n-1}pq^{n-2}a^{n-1}r^{\lambda(n-1)}\sin^n\vartheta\cos\vartheta} \\ \frac{dt}{d\vartheta} &= \frac{1}{q}\,\frac{1}{1 - C^{n-1}pq^{n-2}a^{n-1}r^{\lambda(n-1)}\sin^n\vartheta\cos\vartheta} \end{aligned} \qquad \left(r\,|_{\vartheta=0} = C^{-\lambda}\right) \tag{2.2}$$

Предполагая в дальнейшем, что $n \neq 1$, положим

$$\lambda(n-1) = 1\,, \qquad C^{n-1}pa^{n-1}q^{n-2} = 1 \tag{2.3}$$

Тогда решение дифференциального уравнения (1.1) при начальных условиях (1.2) эквивалентно решению системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{S}{1 - Rr}\,r^2\,, \qquad q\,\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{1}{1 - Rr} \tag{2.4}$$

при начальных условиях

$$r\,|_{\vartheta=0} = \mu\,, \qquad t\,|_{\vartheta=0} = 0 \tag{2.5}$$

где

$$S = -(n-1)\sin^{n+1}\vartheta\,, \qquad R = \sin^n\vartheta\cos\vartheta\,, \qquad \mu = pa^{n-1}q^{n-2} \tag{2.6}$$

[1] Изложение истории вопроса и обычных методов решения уравнения (1.3) имеется в статье А. Н. Крылова «О применении последовательных приближений к нахождению решения некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения». Известия Академии Наук СССР, 1933.

причем величины x и dx/dt выражаются через переменные r и ϑ равенствами

$$x = -a\left(\frac{r}{\mu}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cos\vartheta\,, \qquad \frac{dx}{dt} = qa\left(\frac{r}{\mu}\right)^{\frac{1}{n-1}} \sin\vartheta \tag{2.7}$$

Примененной выше заменой переменных (2.1) и последующим выбором величин C и λ обеспечены принципиально важные обстоятельства.

1. Из того, что при любом значении величины n, как установлено ранее, $\dot{x} \geqslant 0$ и $\dot{x}^n \geqslant 0$ в интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, следует, что, каким бы ни было число n, в интервале $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ выполняются условия

$$r^{\frac{1}{n-1}} > 0\,, \qquad r > 0\,, \qquad \sin^n\vartheta \geqslant 0$$

Эти условия непосредственно устанавливаются из второго из равенств (2.7). При этом учтено, что равенство нулю величины r возможно лишь при одновременном равенстве нулю величин x и $\dot{x}$.

Эти условия обеспечивают на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ или, что то же, на интервале $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ взаимно однозначное соответствие между новыми и старыми переменными. При этом вещественным значениям одной системы переменных при любом показателе сопротивления будут соответствовать вещественные же значения другой системы переменных.

2. Дифференциальные уравнения (2.4) в отличие от дифференциального уравнения (1.1) заданы уже на вполне определенном интервале изменения независимой переменной, а именно на интервале $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, что соответствует одному размаху.

3. Правые части указанных уравнений при любом показателе сопротивления суть голоморфные функции величины r при всех ее значениях, удовлетворяющих условию

$$|r| < \frac{1}{|R_{\max}|} = \sqrt{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}} \tag{2.8}$$

и любых вещественных значениях ϑ. В эти части, кроме того, не входит ни один из параметров p и q, параметр n входит лишь в коэффициенты разложения их в ряды по целым положительным степеням величины r.

4. Если закон сопротивления на всех размахах один и тот же, то при переходе от одного размаха к другому дифференциальные уравнения (2.4) остаются неизменными, меняется лишь первое из начальных условий (2.5). В этом начальном условии на размахе номера k роль величины μ выполняет величина μ_{k-1}, определяемая равенством

$$\mu_{k-1} = A_{k-1}^{n-1} p q^{n-2} \tag{2.9}$$

где A_{k-1} — конечная амплитуда на размахе номера $(k-1)$.

5. Первое из уравнений (2.4) интегрируется независимо от второго.

Заметив, что в интервале (2.8) дифференциальные уравнения (2.4) можно представить соответственно в виде

$$\frac{dr}{d\vartheta} = S\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} R^k r^k\right) r^2, \qquad \frac{dt}{d\vartheta} = \frac{1}{q}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} R^k r^k\right) \tag{2.10}$$

решение первого из них при первом из условий (2.5) будем искать в виде ряда

$$r = \mu + r_1\mu^2 + r_2\mu^3 + \ldots \tag{2.11}$$

в котором коэффициенты $r_1, r_2, r_3 \ldots$ — суть функции величины ϑ, обращающиеся в нуль при $\vartheta = 0$.

Первое из уравнений (2.4) и соответствующее начальное условие формально будут удовлетворены, если коэффициенты ряда (2.11) определять из соотношений

$$r_n = \int_0^\vartheta SR_n\,d\vartheta \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots) \tag{2.12}$$

где R_n — коэффициент при μ^{n+1} в выражении

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu^{i+2}(1 + r_1\mu + r_2\mu^2 + \ldots)^{i+2}R^i \tag{2.13}$$

В частности,

$$R_1 = 1, \qquad R_2 = R + 2r_1, \qquad R_3 = R^2 + 3Rr_1 + r_1{}^2 + 2r_2$$

и вообще R_k — целая рациональная функция с известными положительными коэффициентами от R и r_i, для которых $i < k$.

Докажем, что ряд (2.11) при $|\mu|$ достаточно малых абсолютно сходится равномерно относительно всех вещественных значений ϑ в интервале $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$.

С этой целью рассмотрим функцию

$$F(r) = \frac{1}{1 - Hr} r^2, \quad \text{где} \quad H = |R_{\max}| = \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}.$$

Эта функция при всех r, удовлетворяющих условию $|r| < 1/H$, может быть представлена в виде ряда

$$F(r) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} H^k r^k\right) r^2 \tag{2.14}$$

Введем еще в рассмотрение ряд вида

$$\mu + a_1\mu^2 + a_2\mu^3 + \ldots \tag{2.15}$$

в котором коэффициенты определены указанным ниже способом.

После подстановки ряда (2.15) вместо величины r в (2.14) и последующей группировки членов с одинаковыми степенями величины μ получим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k \mu^{k+1} \tag{2.16}$$

в котором $F_k\,(k = 1, 2, 3, \ldots)$ — коэффициент при μ^{k+1} в выражении

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu^{i+2}(1 + a_1\mu + a_2\mu^2 + \ldots)^{i+2} H^i \tag{2.17}$$

Из (2.12), (2.13) и (2.16), (2.17) следует, что если коэффициенты ряда (2.15) определять по формулам

$$a_k = \pi F_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.18}$$

то при любых значениях ϑ в интервале $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ будут удовлетворены условия

$$|r_k| \leqslant a_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

а, следовательно, доказательством сходимости указанного ряда в некотором круге $|\mu| < \rho$ будет доказана и подавно абсолютная сходимость ряда (2.11) в том же круге равномерно относительно всех вещественных значений ϑ в интервале $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$.

Рассмотрим переменную $\sigma = \sigma(\mu)$, определяемую равенством

$$\sigma = \mu + \pi F(\sigma) \tag{2.19}$$

Правая часть последнего соотношения обращается в нуль при $\sigma = \mu = 0$, причем функция $F(\sigma)$ может быть разложена в ряд по целым положительным степеням σ, не содержащий членов ниже второго измерения. Согласно известной теореме анализа (см., например, Гурса «Курс математического анализа», т. I, гл. IX), переменная σ из соотношения (2.19) единственным образом выражается как голоморфная функция μ, обращающаяся в нуль при $\mu = 0$. Легко проверить, что разложение переменной σ в ряд по степеням параметра μ имеет вид $\sigma = \mu + a_1\mu^2 + a_2\mu^3 + \ldots$, где коэффициенты $a_1, a_2, a_3, \ldots$ определяются соотношениями (2.18) Этим доказано, что ряд (2.15) при $|\mu|$, достаточно малых, сходится. Определим радиус сходимости этого ряда.

Разрешив равенство (2.19) относительно σ и учитывая при этом, что последняя должна обратиться в нуль, когда величина μ становится равной нулю, получим

$$\sigma = \frac{1 + \mu H}{2(\pi + H)} \left[1 - \sqrt{\frac{4\mu(\pi + H)}{1 - (1 + \mu H)^2}} \right]$$

Отсюда следует, что разложение величины σ в ряд по целым положительным степеням величины μ абсолютно сходится при всех значениях последней, удовлетворяющих условиям:

$$0 < \mu < \frac{1}{H}, \qquad \frac{4\mu(\pi + H)}{(1 + \mu H]^2} < 1$$

Разрешив последнее из неравенств и учитывая при этом первое из них, устанавливаем, что радиусом сходимости ряда (2.15) есть величина

$$\rho = \left(\frac{\sqrt{\pi + H} - \sqrt{\pi}}{H} \right)^2$$

Итак, ряд (2.11) при всех μ, удовлетворяющих условию

$$|\mu| < \left(\frac{\sqrt{\pi + H} - \sqrt{\pi}}{H} \right)^2$$

абсолютно сходится равномерно относительно всех вещественных значений величины ϑ в интервале $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$. Из этого следует, что при любых значениях величины μ, удовлетворяющих указанному условию, рядом (2.11) действительно представляется решение первого из уравнений (2.4) при первом из начальных условий (2.5). Решение второго уравнения (2.4) при втором из начальных уравнений (2.5) будет

$$t = \frac{1}{q}\left(\vartheta + \vartheta_1\mu + \vartheta_2\mu^2 + \ldots\right), \tag{2.20}$$

где

$$\vartheta_\lambda = \int\limits_0^\vartheta \theta_\lambda \, d\vartheta \qquad (\lambda = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \tag{2.21}$$

и θ_λ — коэффициент при μ^λ в ряде

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^i (1 + r_1\mu + r_2\mu^2 + \ldots)^i R^i \tag{2.22}$$

Таким образом, если $n \neq 1$ и величина μ, равная $pa^{n-1}q^{n-2}$, удовлетворяет условию

$$\mu < \left(\frac{\sqrt{\pi + H} - \sqrt{\pi}}{H}\right)^2, \qquad \text{где} \quad H = \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} \tag{2.23}$$

то решением уравнения (1.1) при начальных условиях (1.2) является выражение

$$x = -a\,(1 + r_1\mu + r_2\mu^2 + \ldots)^{\frac{1}{n-1}} \cos\vartheta \tag{2.24}$$

где переменная ϑ связана с t соотношением

$$t = \frac{1}{q}\left(\vartheta + \vartheta_1\mu + \vartheta_2\mu^2 + \ldots\right) \tag{2.25}$$

и величины $r_1,\ r_2,\ r_3, \ldots, \vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3, \ldots$ определяются по формулам

$$r_1 = -(n+1)\int\limits_0^\vartheta \sin^{n+1}\vartheta \, d\vartheta, \quad r_k = -(n+1)\int\limits_0^\vartheta R_k \sin^{n+1}\vartheta \, d\vartheta \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots) \tag{2.26}$$

$$\vartheta_\lambda = \int\limits_0^\vartheta \theta_\lambda d\vartheta \qquad (\lambda = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{2.27}$$

в которых R_k — коэффициент при μ^{k+1} в ряде

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu^{i+2} (1 + r_1\mu + r_2\mu^2 + \ldots)^{i+2} \sin^{in}\vartheta \cos^i\vartheta \tag{2.28}$$

и θ_λ = коэффициент при μ^λ в ряде

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^i (1 + r_1\mu + r_2\mu^2 + \ldots)^i \sin^{in}\vartheta \cos^i\vartheta$$

Величина $\dot{x} = dx\,/\,dt$ определяется по формуле

$$\frac{dx}{dt} = aq\,(1 + r_1\mu + r_2\mu^2 + \ldots)^{\frac{1}{n-1}} \sin\vartheta \tag{2.29}$$

Конечная амплитуда и продолжительность размаха определяются по формулам

$$A = a\left(1 + A_1\mu + A_2\mu^2 + \ldots\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad T = \frac{1}{q}\left(\pi + T_1\mu + T_2\mu^2 + \ldots\right) \qquad (2.30)$$

где

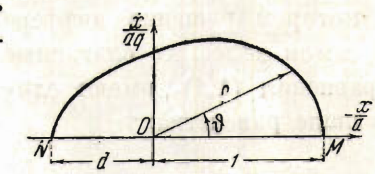
$$A_1 = -(n-1)\int_0^\pi \sin^{n+1}\vartheta\, d\vartheta, \quad A_k = -(n-1)\int_0^\pi R_k \sin^{n+1}\vartheta\, d\vartheta, \quad T_\sigma = \int_0^\pi \theta_\sigma\, d\vartheta$$

$$(k = 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ \sigma = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

Если закон сопротивления на всех размахах один и тот же, то при переходе от одного размаха к другому (следующему) коэффициенты при различных степенях μ в скобках формул, определяющих величины x, dx/dt, t, A и T не меняются, изменяется лишь величина a (а следовательно, и величина μ), численно равная конечной амплитуде на предыдущем размахе.

Полученное решение удобно интерпретировать геометрически. Пусть ρ и ϑ — полярные координаты точки, связанные соотношением

$$\rho = \left(1 + r_1\mu + r_2\mu^2 + \ldots\right)^{\frac{1}{n-1}}$$



Фиг. 1.

Тогда $\dot{x}/(aq)$ и $-x/a$ суть соответственно ордината и абсцисса этой точки. Если вдоль кривой (фиг. 1), изображающей указанную зависимость величины ρ от ϑ, разметить величину t, определяемую по формуле (2.25), то получим представление о движении на данном размахе. Упомянутую кривую можно назвать полярой колебаний, а величины t, размеченные вдоль нее, — долготами колебаний. У поляры колебаний отрезки OM и ON численно равны соответственно единице и декременту затухания.

3. Подобные колебания. Число μ. Два колебания, заданные соответственно дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt_1} + q_1^2 x_1 + p_1 \dot{x}_1^{n_1} = 0, \qquad \frac{d\dot{x}_2}{dt_2} + q_1^2 x_2 + p_2 \dot{x}_2^{n_2} = 0 \qquad (3.1)$$

при начальных условиях

$$x_1\Big|_{t_1=0} = -a_1, \quad \frac{dx_1}{dt_1}\Big|_{t_1=0} = 0, \quad x_2\Big|_{t_2=0} = -a_2, \quad \frac{dx_2}{dt_2}\Big|_{t_2=0} = 0 \qquad (3.2)$$

где x_1 и x_2, t_1 и t_2 суть попарно однородные величины, называются подобными, если существует такое число k, что при всех значениях независимых переменных, удовлетворяющих условию

$$\frac{t_1}{t_2} = k \qquad (3.3)$$

будет выполняться условие

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2} \qquad (3.4)$$

Из формул (2.24) и (2.25) видно, что необходимым и достаточным условием подобия двух колебаний является равенство величин

$$\rho=(1+r_1\mu+r_2\mu^2+\ldots)^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{и} \quad \vartheta_1\mu+\vartheta_2\mu^2+\vartheta_3\mu^3+\ldots$$

при любом значении ϑ соответственно у того и другого колебаний. У подобных колебаний и только у подобных колебаний поляры одинаковы, а соответственные[1] долготы обратно пропорциональны корням квадратным из жесткостей пружин. Отсюда, в частности, следует, что у подобных колебаний декременты затухания на соответственных размахах одинаковы, а продолжительности размахов обратно пропорциональны корням квадратным из жесткостей пружин.

Из сформулированного выше условия подобия колебаний, в частности, следует, что при одинаковых показателях сопротивления колебания подобны тогда и только тогда, когда у них одинаковы числа μ.

Последнее свойство подобных колебаний легко установить и способом, в котором решение дифференциального уравнения (1.1) не используется. В самом деле, все слагаемые, входящие в левую часть дифференциального уравнения (1.1), имеют одну и ту же размерность, т. е. имеют место следующие равенства:

$$\left[\frac{d\dot{x}}{dt}\right]=[q]^2[x]=[p][\dot{x}]^n \tag{3.5}$$

Если в качестве основных единиц измерения принять $[x]$ и $[t]$, то

$$[\dot{x}]=\frac{[x]}{[t]}, \qquad \left[\frac{d\dot{x}}{dt}\right]=\frac{[x]}{[t]^2}, \qquad [a]=[x]$$

и из равенств (3.5) следует, что

$$[q]=\frac{1}{[t]}, \qquad [p]=\frac{[t]^{n-2}}{[x]^{n-1}}$$

Пусть $n_1=n_2=n$. Тогда все величины, входящие в дифференциальные уравнения (3.1), обозначения которых отличаются только индексом, попарно однородны. Если, кроме того, колебания подобны, то, учитывая известную теорему о том, что масштабы однородных физических величин у подобных явлений выражаются через основные масштабы по тем же формулам, что и их размерности через основные размерности, получим

$$\frac{q_1}{q_2}=\frac{t_2}{t_1}, \qquad \frac{p_1}{p_2}=\frac{(t_1\,/\,t_2)^{n-2}}{(a_1\,/\,a_2)^{n-1}}$$

откуда следует, что

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{n-2}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)=1 \qquad \text{или} \qquad \mu_1=\mu_2$$

где μ_1 и μ_2 — числа μ соответственно для первого и второго колебаний. Этим доказана необходимость условия равенства числа μ для подобия коле-

---

[1] То есть долготы, соответствующие одному и тому же значению полярного угла.

баний при одинаковых показателях сопротивления. Достаточность этого условия будет доказана, если, сделав во втором из дифференциальных уравнений (3.1) замену переменных по формулам

$$t_2 = \frac{q_1}{q_2} t_1, \qquad x_2 = \frac{a_2}{a_1} x_1 \tag{3.6}$$

преобразуем последнее в первое дифференциальное уравнение (3.1), так как из этого будет следовать, что если x_1 есть решение первого дифференциального уравнения (3.1) при соответствующих начальных условиях (3.2), то $x_2 = a_2 x_1 / a_1$ есть решение второго дифференциального уравнения (3.1) тоже при соответствующих начальных условиях (3.2), если только независимые переменные связаны первым из соотношений (3.6). Непосредственной подстановкой соотношений (3.6) во второе дифференциальное уравнение (3.1) убеждаемся, что указанное выше действительно имеет место.

Не вдаваясь в подробности, заметим, что второй способ проведенного выше исследования вместе с результатами этого исследования дает возможность физически обосновать метод построенного в § 2 решения.

Число μ, от которого столь существенно зависит колебание, есть число безразмерное. Это непосредственно следует из определения числа μ и из размерности величин q и p, установленных выше.

При квадратичном законе сопротивления и только при этом законе сопротивления число μ не зависит от жесткости пружины и равно произведению начальной амплитуды на коэффициент сопротивления. Отсюда следует, что при указанном законе сопротивления все колебания, у которых произведения начальной амплитуды на коэффициент сопротивления одинаковы, подобны, какой бы ни была жесткость пружины.

Поскольку условие (2.23), требующее достаточную малость числа μ, ограничивает диапазон применения полученного в § 2 решения, важно оценить серьезность этого ограничения при реальных условиях движения. Можно показать, что применительно к задаче об упругих колебаниях в сопротивляющейся среде ограничение (2.23) практически не существенно. При доказательстве этого положения учитывается то обстоятельство, что, как показывает опыт, при колебаниях тела данных формы, размера и плотности в среде, обладающей определенными свойствами (плотность, вязкость, степень начальной турбулентности), величины p, q, a и n, определяющие число μ, не могут быть изменяемы независимо друг от друга сколь угодно произвольно.

В заключение заметим, что решение, построенное в § 2, и установленные в настоящем параграфе законы подобия колебаний могут быть использованы при экспериментальном изучении законов сопротивления среды в случае колебательного режима движения.

4. Приближенные формулы для определения конечной амплитуды и продолжительности размаха. С точностью до величин третьего порядка малости относительно числа μ конечная амплитуда и продолжительность размаха вычисляются соответственно по формулам

$$A = a\,(1 + A_1\mu + A_2\mu^2)^{\frac{1}{n-1}}, \qquad T = \frac{1}{q}\,(\pi + T_1\mu + T_2\mu^2) \tag{4.1}$$

где

$$A_1 = -(n-1)\int\limits_0^\pi \sin^{n+1}\vartheta\, d\vartheta,\quad A_2 = -(n-1)\int\limits_0^\pi \sin^{n+1}\vartheta\,(\sin^n\vartheta\cos\vartheta + 2r_1)\, d\vartheta$$

$$T_1 = \int\limits_0^\pi \sin^n\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta,\quad T_2 = \int\limits_0^\pi (\sin^{2n}\vartheta\cos^2\vartheta + r_1\sin^n\vartheta\cos\vartheta)\, d\vartheta \tag{4.2}$$

примем

$$r_1 = -(n-1)\int\limits_0^\vartheta \sin^{n+1}\vartheta\, d\vartheta \tag{4.3}$$

Заметив, что

$$\int\limits_0^\pi \sin^{2n+1}\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta = 0,\quad \int\limits_0^\pi r_1\sin^{n+1}\vartheta\, d\vartheta = -\frac{1}{2(n-1)}A_1^2$$

$$\int\limits_0^\pi \sin^n\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta = 0,\quad \int\limits_0^\pi r_1\sin^n\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{n-1}{n+1}\int\limits_0^\pi \sin^{2(n+1)}\vartheta\, d\vartheta$$

получаем

$$A_2 = A_1^2,\quad T_1 = 0,\quad T_2 = \frac{1}{n+1}\int\limits_0^\pi [(n+1)\sin^{2n}\vartheta - 2\sin^{2(n+1)}\vartheta]\, d\vartheta$$

При целых показателях сопротивления вычисление величин A_2 и T_2 не вызывает никаких затруднений и может быть осуществлено в элементарных функциях. При нецелых показателях сопротивления вычисление указанных величин приводит к гамма-функциям от аргумента n. После несложного счета получаем

$$A_1 = -\frac{n(n-1)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}}{(n+1)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},\quad T_2 = \frac{n\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{(n+1)^2\Gamma(n)} \tag{4.4}$$

где символом $\Gamma(\alpha)$ обозначена гамма-функция аргумента α.

Таким образом формулы (2.30) преобразуется соответственно к виду

$$A = a(1 - K\mu + K^2\mu^2)^{\frac{1}{n-1}},\quad T = \frac{1}{q}(\pi + N\mu^2) \tag{4.5}$$

где

$$K = \frac{n(n-1)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}}{(n+1)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},\quad N = \frac{n\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{(n+1)^2\Gamma(n)} \tag{4.6}$$

Коэффициенты K и N для любого значения показателя сопротивления вычисляются при помощи известных таблиц гамма-функций.

Поступила в редакцию
20 XII 1944

Уральский индустриальный
институт им. С. М. Кирова

I. M. VOLK. — ELASTIC OSCILLATIONS WITH DAMPING PROPORTIONAL TO A POWER OF VELOCITY

The paper deals with the motion of a system with one degree of freedom, described by a differential equation

$$\frac{d\dot{x}}{dt} + q^2x + p\dot{x}^n = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

with initial conditions $x(0) = -a,\ \dot{x}(0) = 0$