

МНОГОГИРОСКОПНАЯ ВЕРТИКАЛЬ

И. Н. Ройтенберг

(Москва)

В развитии современных гироскопических приборов наблюдается постепенный переход от одогироскопных систем к многогироскопным.

Первые образцы гироскопических компасов (1908—1909 гг.) Anschütz и Sperry были одогироскопными. Однако очень скоро было установлено, что точность показаний одогироскопных компасов сильно снижается в условиях качки и маневрирования корабля.

Более совершенными оказались многогироскопные компасы. В 1912 г. появился трехгироскопный компас Anschütz, а в 1925—1926 гг. при участии Эйнштейна был построен двухгироскопный компас «Новый Аншютц». Последний является высоко прецизионным прибором и завоевал всеобщее признание.

Образцами многогироскопных компасов являются также гироскопные компасы Arma (Америка), Carpentier (Франция), Martiensen-Galileo (Италия).

Гироскопическая вертикаль, или гироскопический горизонт, представляет собой прибор, предназначенный для получения горизонтальной площадки на движущемся корабле. Этот прибор начал свое развитие позднее гироскопического компаса если не считать первого гироскопического горизонта для секстана адмирала Fleurbaey, построенного им в 1886 г.

Пока еще большинство известных конструкций гироскопической вертикали являются одогироскопными. Однако тенденция к переходу к многогироскопным системам намечается и здесь, как об этом свидетельствуют многочисленные патенты на изобретения (M. Schuler, Boukow и др.), а также некоторые выполненные образцы приборов.

Указанное обстоятельство особенно подчеркнуто в трудах А. Н. Крылова. В своей известной книге «Общая теория гироскопов и некоторых их технических применений» А. Н. Крылов указывает (стр. 265), что стабилизация платформы на корабле может быть достигнута таким способом: «Платформа подвешена на кардановском подвесе и прикреплена к внутреннему его кольцу, на платформу же поставлено два гироскопических стабилизатора, из которых один уничтожает килевые качания платформы, другой—боковые».

Развитию этой мысли А. Н. Крылова и посвящена настоящая работа.

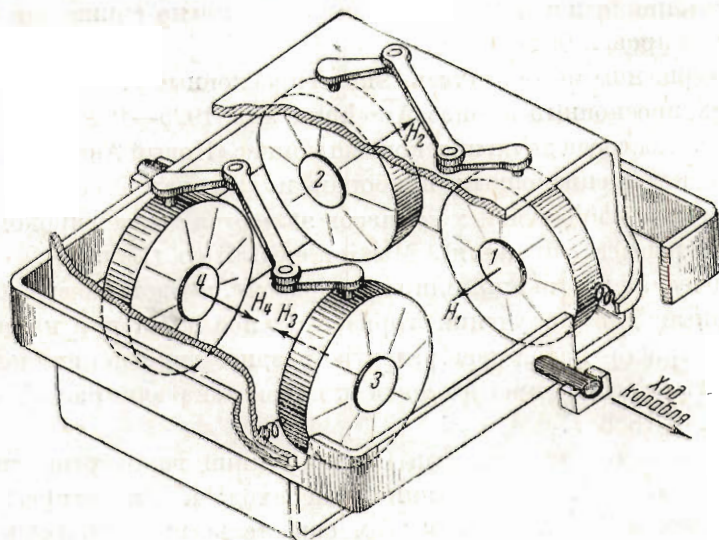
В п. 1 приводится краткое описание многогироскопной вертикали. В п. 2 выводятся дифференциальные уравнения движения прибора. В п. 3 изучается движение прибора на неподвижной опоре. В п. 4 и 5 рассматривается влияние качки и ускорений движущегося корабля. Здесь устанавливается, что показания многогироскопной вертикали на качке намного точнее показаний гироскопического маятника с одним гироскопом. В п. 6 изучается движение много-

гироскопной вертикали с периодом свободных колебаний, равным периоду, указанному М. Schuler, $T=84.4$ мин.; п. 7 посвящен вопросу о накоплении ошибок гировертикали при длительном маневрировании корабля. В п. 8 рассматривается вопрос о баллистических девиациях при кратковременном маневрировании корабля. В последнем п. 9 изучаются баллистические девиации многогироскопной вертикали с малым периодом свободных колебаний.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что точность многогироскопной вертикали в условиях качки и маневрирования корабля значительно выше точности гироскопического маятника с одним гироскопом. Этого и естественно было ожидать по аналогии с многогироскопными компасами.

Настоящая работа выполнена методами, развитыми Б. В. Булгаковым. Автор пользуется случаем принести своему учителю Б. В. Булгакову глубокую благодарность за ценные советы при выполнении настоящей работы.

1. Рассматриваемая система представляет собой сферический маятник, на внутреннем кардановом кольце которого установлены четыре гироскопа с



Фиг. 1.

горизонтальными осями собственного вращения. Оси кардановых колец сферического маятника ориентированы по кораблю. Ось внешнего карданова кольца параллельна продольной оси корабля, а ось внутреннего карданова кольца параллельна поперечной оси корабля. Схема гировертикали изображена на фиг. 1, а вид в плане на фиг. 2.

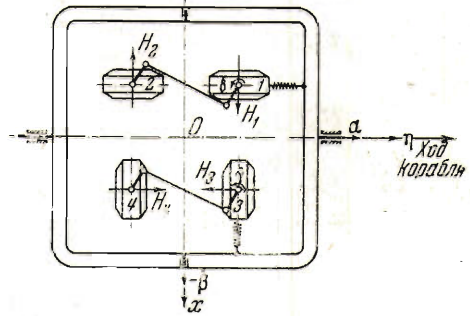
Гироскопы 1 и 2 связаны между собой антипараллелограммом. Они могут поворачиваться вокруг вертикальных осей своих кожухов, подшипники которых несет внутреннее карданово кольцо сферического маятника. Благодаря наличию антипараллелограмма этот поворот гироскопов происходит в разные стороны. При малом значении углов поворота гироскопов эти углы могут считаться равными. Собственное вращение гироскопов 1 и 2 происходит в разные стороны. Векторы H собственных моментов этих гироскопов указаны на схеме. Гироскоп 1 соединен с внутренним кардановым кольцом сферического маятника пружиной. В положении равновесия ось собственного

вращения гироскопов 1 и 2 параллельны оси внутреннего кольца сферического маятника.

Гироскопы 3 и 4 также связаны между собой антипараллелограммом. Гироскоп 3 соединен пружиной с внутренним кардановым кольцом сферического маятника. В положении равновесия оси собственного вращения гироскопов 3 и 4 параллельны оси внешнего карданова кольца сферического маятника. Собственное вращение гироскопов 3 и 4 происходит в разные стороны.

Центр тяжести всей системы расположен ниже ее точки опоры (точки пересечения осей кардановых колец сферического маятника).

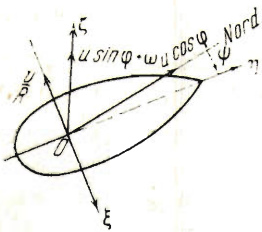
Система имеет устройство для радиальной коррекции, не показанное на фиг. 1. Работа его заключается в следующем. При повороте гироскопа 1 вокруг оси кожуха на угол δ корректирующее устройство накладывает на ось внешнего карданова кольца момент, равный $-S\delta$, где S —постоянный коэффициент. При повороте гироскопа 3 вокруг оси его кожуха на угол γ корректирующее устройство накладывает на ось внутреннего карданова кольца момент, равный $-S\gamma$.



Фиг. 2.

Конструкция корректирующего устройства и его принцип действия могут быть различными; оно может быть электрическим, пневматическим и др.

2. Движение гировертикали будем изучать по отношению к координатной системе $\xi\eta\zeta$, связанной с траекторией корабля (фиг. 3). Начало координат O возьмем в точке опоры прибора. Оси ξ и η расположим в горизонтальной плоскости и направим их так: ось ξ —по нормали к траектории корабля, а ось η —по касательной к траектории корабля. Ось ζ направим по вертикали, вверх.



Фиг. 3.

Положение сферического маятника определим следующим образом (фиг. 4).

Расположим две взаимно перпендикулярных оси x' и y' в экваториальной плоскости сферического маятника, а ось z направим перпендикулярно к ним. При этом ось x' совместим с линией пересечения экваториальной плоскости сферического маятника с плоскостью $\xi\zeta$.

В начальном положении координатный трехгранник $x'y'z$ совпадает с трехгранником $\xi\eta\zeta$.

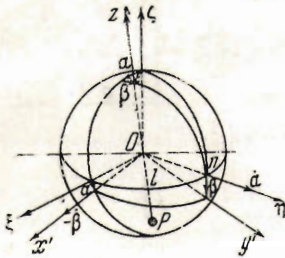
Центр тяжести системы расположен на оси z , ниже точки опоры O .

Вершиной сферического маятника назовем, по аналогии с гироскопическим маятником, точку E пересечения оси z с единичной сферой, описанной из начала координат O . Тогда углы α и β , показанные на фиг. 4, будут определять положение вершины E сферического маятника на единичной сфере. Если считать плоскость $\xi\zeta$ экватором сферы, точку n пересечения сферы с осью η ее северным полюсом, а плоскость $\eta\zeta$ плоскостью первого меридиана, то угол α будет долготой, а угол β —широтой вершины E сфери-

ческого маятника на единичной сфере. Оси x' и y' носят название осей Резаля и именуются: ось x' —линией узлов, а ось y' —поперечной осью.

Положение гироскопов 1 и 2 относительно сферического маятника определим углом δ поворота гироскопа 1 вокруг оси его кожуха z_1 , параллельной оси z . Точно так же положение гироскопов 3 и 4 относительно сферического маятника определим углом γ поворота гироскопа 3 вокруг оси его кожуха z_2 . Углы α , β , γ и δ примем за обобщенные координаты системы.

Мы будем изучать малые колебания оси z сферического маятника относительно направления истинной вертикали ζ , т. е. будем считать углы α , β , γ и δ малыми. Ниже нам потребуются косинусы углов, образуемых осями x' , y' , z с осями ξ , η , ζ . Они приводятся в следующей таблице:



Фиг. 4.

	ξ	η	ζ
x'	1	0	$-\alpha$
y'	0	1	$-\beta$
z	α	β	1

Уравнения движения системы можно представить в виде [1]

$$A\ddot{\alpha} = M_{y'} + \Gamma_{y'}, \quad B\ddot{\beta} = -M_{x'} - \Gamma_{x'}, \quad C_1\ddot{\gamma} = M_{z_1} + \Gamma_{z_1}, \quad C_2\ddot{\delta} = M_{z_2} + \Gamma_{z_2} \quad (2.1)$$

Здесь через A и B обозначены моменты инерции сферического маятника (со всеми установленными на нем деталями) относительно осей x' и y' соответственно; C_1 — момент инерции гироскопов 1 и 2 относительно осей их кожухов; C_2 — то же для гироскопов 3 и 4; $M_{x'}$, $M_{y'}$, M_{z_1} , M_{z_2} — проекции моментов внешних сил на оси x' , y' , z_1 , z_2 ; наконец, $\Gamma_{x'}$, $\Gamma_{y'}$ — проекции на оси x' и y' гироскопического момента \mathbf{l} , который для рассматриваемой системы имеет вид

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{H}_i \times \mathbf{\Omega}_i \quad (2.2)$$

где \mathbf{H}_i — собственный момент i -го гироскопа, а $\mathbf{\Omega}_i$ — его абсолютная угловая скорость. Значения Γ_{z_1} и Γ_{z_2} приведены ниже (2.9).

Проекции моментов внешних сил на оси x' и y' будут равны

$$M_{x'} = lP\dot{\beta} - lP \frac{v}{g} - S\dot{\gamma}, \quad M_{y'} = -lP\dot{\alpha} - lP \frac{v\omega}{g} - S\dot{\delta} \quad (2.3)$$

где P — вес сферического маятника (со всеми установленными на нем деталями), l — расстояние от центра тяжести системы до ее точки опоры, v — линейная скорость корабля, ω — угловая скорость циркуляции корабля и g — ускорение силы тяжести.

Проекции моментов внешних сил на оси z_1 и z_2 равны моментам, развиваемым пружинами, и для малых углов γ и δ могут быть приняты равными

$$M_{z_1} = -R_1\delta, \quad M_{z_2} = -R_2\gamma \quad (2.4)$$

К числу моментов внешних сил следует также отнести моменты сил тре-

ния в опорах осей кардановых колец сферического маятника и осей кожухов гироскопов; мы этих моментов учитывать не будем.

Для определения гироскопического момента Γ надо найти абсолютную угловую скорость каждого из гироскопов. Проекции абсолютной угловой скорости Ω_1 гироскопа I на оси x' , y' , z будут равны

$$\begin{aligned}\Omega_{1x'} &= -U \cos \varphi \sin \psi - \frac{v}{R} - (U \sin \varphi + \omega) \alpha - \dot{\beta} \\ \Omega_{1y'} &= U \cos \varphi \cos \psi - (U \sin \varphi + \omega) \beta + \dot{\alpha}, \\ \Omega_{1z} &= U \sin \varphi + \omega + \dot{\delta}\end{aligned}\quad (2.5)$$

где U — угловая скорость вращения земли, ψ — курс корабля, φ — широта места наблюдения, R — радиус земного шара.

Проекции собственного момента \mathbf{H}_1 гироскопа I на оси x' , y' , z равны

$$H_{1x'} = H, \quad H_{1y'} = H\delta, \quad H_{1z} = 0 \quad (2.6)$$

где через H обозначена абсолютная величина собственного момента гироскопа, которую будем считать равной для всех четырех гироскопов.

Обозначая через

$$\Gamma_1 = \mathbf{H}_1 \times \Omega_1 \quad (2.7)$$

гироскопический момент, создаваемый гироскопом I , найдем проекции Γ_1 на оси x' , y' , z в таком виде:

$$\begin{aligned}\Gamma_{1x'} &= H\delta(U \sin \varphi + \omega + \dot{\delta}), & \Gamma_{1y'} &= -H(U \sin \varphi + \omega + \dot{\delta}), \\ \Gamma_{1z} &= H(U \cos \varphi \cos \psi + \dot{\alpha}) + H\delta \left(U \cos \varphi \sin \psi + \frac{v}{R} + \dot{\beta} \right) - H(U \sin \varphi + \omega) \beta\end{aligned}\quad (2.8)$$

Аналогичные выражения получим для остальных трех гироскопов. Выражения $\Gamma_{x'}$ и $\Gamma_{y'}$ получим, складывая алгебраические проекции гироскопических моментов всех четырех гироскопов на оси x' и y' соответственно. Что касается выражений для Γ_{z_1} и Γ_{z_2} , то благодаря наличию антипараллелограммов они будут равны

$$\Gamma_{z_1} = \Gamma_{1z_1} - \Gamma_{2z_1}, \quad \Gamma_{z_2} = \Gamma_{3z_2} - \Gamma_{4z_2} \quad (2.9)$$

Проделав указанные вычисления и отбрасывая члены второго и высших порядков относительно координат и их производных, получим

$$\begin{aligned}\Gamma_{x'} &= 2H\delta(U \sin \varphi + \omega) - 2H\dot{\gamma} \\ \Gamma_{y'} &= -2H\gamma(U \sin \varphi + \omega) - 2H\dot{\delta} \\ \Gamma_{z_1} &= 2H[U \cos \varphi \cos \psi + \dot{\alpha} - (U \sin \varphi + \omega) \beta] \\ \Gamma_{z_2} &= -2H \left[U \cos \varphi \sin \psi + \frac{v}{R} + \dot{\beta} + (U \sin \varphi + \omega) \alpha \right]\end{aligned}\quad (2.10)$$

Подставляя выражения (2.3), (2.4) и (2.10) в уравнения (2.1), найдем

$$\begin{aligned}A\ddot{z} &= -2H(U \sin \varphi + \omega)\gamma - 2H\dot{\delta} - S\delta - lP\alpha - lP\frac{v\omega}{g} \\ -B\ddot{\beta} &= 2H(U \sin \varphi + \omega)\delta - 2H\dot{\gamma} - S\gamma + lP\beta - lP\frac{v}{g} \\ C_1\ddot{\delta} &= 2H[U \cos \varphi \cos \psi + \dot{\alpha} - (U \sin \varphi + \omega)\beta] - R_1\delta \\ C_2\ddot{\gamma} &= -2H \left[U \cos \varphi \sin \psi + \frac{v}{R} + \dot{\beta} + (U \sin \varphi + \omega) \alpha \right] - R_2\gamma\end{aligned}\quad (2.11)$$

В дальнейшем анализе пренебрежем нутационным движением гироскопов и на этом основании отбросим в уравнениях (2.11) инерционные члены $A\ddot{\alpha}$, $B\ddot{\beta}$, $C_1\ddot{\delta}$ и $C_2\ddot{\gamma}$. Величину $U \sin \varphi$, как малую по сравнению с ω , также отбросим. Разделив на $2H$ все члены в уравнениях (2.11), получим

$$\begin{aligned} \dot{\delta} + s\delta + kz + \omega\gamma &= -k \frac{r\omega}{g}, & \dot{\alpha} - r\dot{\delta} - \omega\beta &= -U \cos \varphi \cos \psi \\ \dot{\gamma} + s\gamma - k\beta - \omega\delta &= -k \frac{v}{g}, & \dot{\beta} + r\gamma + \omega\alpha &= -U \cos \varphi \sin \psi - \frac{v}{R} \end{aligned} \quad (2.12)$$

где обозначено

$$\frac{S}{2H} = s, \quad \frac{lP}{2H} = k, \quad \frac{R_1}{2H} = \frac{R_2}{H} = r \quad (2.13)$$

Система уравнений (2.12) и представляет собой уравнения движения гировертикали на движущемся корабле. Эти уравнения содержат в левой своей части члены с коэффициентом ω , являющимся, вообще говоря, некоторой функцией t , так как $\omega = \omega(t)$ есть угловая скорость циркуляции корабля. В общем случае исследование уравнений (2.12) будет затруднительно. Ниже мы покажем, что переходом к другой системе координат можно получить уравнения движения гировертикали в виде неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами. Однако для исследования частных случаев (когда $\omega = \text{const.}$) из уравнений (2.12) легко получить физическую интерпретацию решений.

3. Рассмотрим гировертикаль на неподвижной опоре. В этом случае в уравнениях (2.12) надо положить

$$v = \omega = 0 \quad (3.1)$$

При этом система (2.12) разбивается на две независимых системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\delta} + s\delta + kz = 0, \quad \dot{\alpha} - r\dot{\delta} = -U \cos \varphi \cos \psi \quad (3.2)$$

$$\dot{\gamma} + s\gamma - k\beta = 0, \quad \dot{\beta} + r\gamma = -U \cos \varphi \sin \psi \quad (3.3)$$

Здесь угол ψ есть угол, под которым ось внешнего карданова кольца сферического маятника направлена к меридиану.

Интегралы этих уравнений будут

$$\begin{aligned} z &= \exp -\frac{st}{2} \left\{ (z_0 - z^*) \cos qt + \left[\frac{r}{q} (\delta_0 - \delta^*) + \frac{s}{2q} (z_0 - z^*) \right] \sin qt \right\} + z^* \\ \delta &= \exp -\frac{st}{2} \left[\left\{ (\delta_0 - \delta^*) \cos qt - \left[\frac{s}{2q} (\delta_0 - \delta^*) + \frac{k}{q} (z_0 - z^*) \right] \sin qt \right\} + \delta^* \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

и

$$\begin{aligned} \beta &= \exp -\frac{st}{2} \left\{ (\beta_0 - \beta^*) \cos qt - \left[\frac{r}{q} (\gamma_0 - \gamma^*) - \frac{s}{2q} (\beta_0 - \beta^*) \right] \sin qt \right\} + \beta^* \\ \gamma &= \exp -\frac{st}{2} \left\{ (\gamma_0 - \gamma^*) \cos qt - \left[\frac{s}{2q} (\gamma_0 - \gamma^*) - \frac{k}{q} (\beta_0 - \beta^*) \right] \sin qt \right\} + \gamma^* \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$q = \sqrt{kr - \frac{s^2}{4}} \quad (3.6)$$

через $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ обозначены отклонения системы в начальный момент времени, а $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*$ являются отклонениями системы под влиянием вращения

земли, называемые скоростными девиациями, и определяются формулами

$$\begin{aligned} \alpha^* &= -\frac{s}{kr} U \cos \varphi \cos \psi, & \delta^* &= \frac{1}{r} U \cos \varphi \cos \psi \\ \beta^* &= -\frac{s}{kr} U \cos \varphi \sin \psi, & \gamma^* &= -\frac{1}{r} U \cos \varphi \sin \psi \end{aligned} \quad (3.7)$$

Как нетрудно видеть из (3.4), вершина гироскопа I , которой назовем точку пересечения оси его собственного вращения с вертикальной плоскостью $\eta\zeta$, описывает сходящуюся спираль. Равным образом вершина гироскопа 3 описывает сходящуюся спираль на вертикальной плоскости $\xi\zeta$.

В случае прямолинейного равномерного движения корабля движение гировертикали сохраняет тот же характер. Интегралы (3.4) и (3.5) уравнений движения будут иметь тот же вид, изменятся только скоростные девиации β^* и γ^* . Они будут

$$\beta^* = -\frac{s}{kr} \left(U \cos \varphi \sin \psi + \frac{v}{R} \right), \quad \gamma^* = -\frac{1}{r} \left(U \cos \varphi \sin \psi + \frac{v}{R} \right) \quad (3.8)$$

4. Переходя к влиянию качки корабля, заметим, что качка корабля сопровождается орбитальным движением его центра тяжести [2]. Обычно гировертикаль устанавливается вблизи центра тяжести корабля, и поэтому при определении действующих на гировертикаль сил инерции переносного движения корабля можно ограничиться лишь силами инерции в орбитальном движении центра тяжести корабля.

Пусть плоскостью орбитального движения является плоскость $\xi\zeta$, т. е. вертикальная плоскость, проходящая через поперечную ось корабля. Уравнения (2.12) разбиваются и в этом случае на две независимых системы

$$\dot{\delta} + s\delta + kx = k \frac{\vartheta}{g} \sin mt, \quad \dot{x} - r\delta = -U \cos \varphi \cos \psi \quad (4.1)$$

и

$$\dot{\gamma} + s\gamma - k\beta = 0, \quad \dot{\beta} + r\gamma = -U \cos \varphi \sin \psi - \frac{v}{R} \quad (4.2)$$

где m — угловая частота орбитального движения, а ϑ — горизонтальная проекция отнесенной к единице массы сферического маятника центробежной силы, возникающей при орбитальном движении.

Частные решения системы уравнений (4.1), определяющие вынужденные колебания гировертикали, будут

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{k^2 r^2 - m^2 k r}{m^4 + m^2 (s^2 - 2kr) + k^2 r^2} \frac{\vartheta}{g} \sin mt - \frac{mskr}{m^4 + m^2 (s^2 - 2kr) + k^2 r^2} \frac{\vartheta}{g} \cos mt \\ \delta &= \frac{m^2 s k}{m^4 + m^2 (s^2 - 2kr) + k^2 r^2} \frac{\vartheta}{g} \sin mt + \frac{mk^2 r - m^2 k}{m^4 + m^2 (s^2 - 2kr) + k^2 r^2} \frac{\vartheta}{g} \cos mt \end{aligned} \quad (4.3)$$

Упростим выражения (4.3). Здесь, m — угловая частота орбитального движения корабля. Период волн — около 10 сек. и $m = 2\pi/T \approx 0.6 \text{ сек}^{-1}$. Для гировертикали даже с невысоким периодом свободных колебаний порядка 5 минут $k = r \approx 0.02 \text{ сек}^{-1}$, $s \approx 0.01 \text{ сек}^{-1}$. Таким образом $m \gg k, r, s$. Поэтому с большой степенью точности можно решения (4.3) представить в виде

$$\alpha = -\frac{kr}{m^2} \frac{\vartheta}{g} \sin mt, \quad \delta = -\frac{k}{m} \frac{\vartheta}{g} \cos mt \quad (4.4)$$

Траектория, описываемая вершиной гироскопа I на вертикальной плоскости $\eta\zeta$, представляет собой вытянутый эллипс, отношение полуосей которого равно m/r (фиг. 5). Для параметров, приведенных выше, $m/r \approx 30$.

Здесь выявляется одна из интересных особенностей многогироскопной вертикали. На качке колебания с большой амплитудой происходят вокруг вертикальных осей кожухов гироскопов. Амплитуда колебаний сферического маятника ничтожна.

Указывающей частью прибора, определяющей вертикаль, является сферический маятник; поэтому преимущество многогироскопной вертикали перед обыкновенным гиромайником на качке очевидно.

Пример. Рассмотрим четырехгироскопную вертикаль с периодом свободных колебаний, равным при отсутствии затухания $T = 300$ сек. Тогда

$$\sqrt{kr} = 2\pi/T = 0.02 \text{ сек.}^{-1}, \quad k = r = 0.02 \text{ сек.}^{-1}$$

Период орбитального движения корабля $T_1 = 10$ сек. Угловая частота

$m = 2\pi/T_1 = 0.63 \text{ сек.}^{-1}$. Для величины отношения ϑ/g примем значение $\vartheta/g = 0.123$ радиана, что соответствует углу волнового склона 7° .



Фиг. 5.

При этих данных из формул (4.4) найдем

$$\alpha = -25'' \sin mt, \quad \delta = -13.4' \cos mt$$

Амплитуда колебаний сферического маятника равна 25 угловым секундам, что является практически ничтожной величиной.

При тех же значениях параметров амплитуда колебаний обыкновенного гиромайника с вертикальным гироскопом будет равна δ_{\max} , т. е. 13.4 угловой минуты. Такая ошибка уже является существенной в практических вопросах.

5. Влияние ускорений движущегося корабля. Имея в виду, что подробно вопрос об ошибках гировертикали при маневрировании корабля будет изучен ниже, рассмотрим здесь два частных, но очень важных случая движения корабля. При этом влияние вращения земли и собственной скорости корабля, определяющих скоростную девиацию прибора, учитывать не будем.

а) *Прямолинейный равнопеременный ход корабля.* В этом случае

$$\omega = 0, \quad v = v_0 + jt \quad (5.1)$$

где $j = \text{const}$.

Уравнения движения (2.12) разбиваются на две независимых системы:

$$\dot{\gamma} + s\gamma - k\beta = -\frac{kj}{g}, \quad \dot{\beta} + r\gamma = 0 \quad (5.2)$$

и

$$\dot{\delta} + s\delta + k\alpha = 0, \quad \dot{\alpha} - r\delta = 0 \quad (5.3)$$

Решение системы уравнений (5.2) при начальных условиях

$$\alpha = \gamma = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (5.4)$$

будет

$$\begin{aligned} \beta &= -\exp\left(-\frac{st}{2}\right) \left(\frac{s}{2q} \frac{j}{g} \sin qt + \frac{j}{g} \cos qt \right) + \frac{j}{g} \\ \gamma &= -\exp\left(-\frac{st}{2}\right) \frac{k}{q} \frac{j}{g} \sin qt \end{aligned} \quad (5.5)$$

Обычно время t_1 , в течение которого корабль прибавляет или убавляет ход, бывает малым по сравнению с периодом свободных колебаний гироскопа. Поэтому можно принять

$$\sin qt_1 \approx qt_1, \quad \cos qt_1 \approx 1, \quad \exp -\frac{st_1}{2} \approx 1 \quad (5.6)$$

А так как

$$j t_1 = \Delta v \quad (5.7)$$

—приращению скорости в течение маневра, то из (5.5) получим выражения для отклонений гироскопа к моменту окончания маневра

$$\beta = -\frac{s\Delta v}{2g}, \quad \gamma = -\frac{k\Delta v}{g} \quad (5.8)$$

При отсутствии радиальной коррекции ($s=0$) к моменту окончания маневра отклонения гироскопа

$$\beta = 0, \quad \gamma = -\frac{k\Delta v}{g} \quad (5.9)$$

Мы получили на первый взгляд неожиданный результат: сферический маятник под влиянием сил инерции не отклонился ($\beta=0$). В этом нет, однако, ничего странного, если вспомнить, что под влиянием мгновенного импульса гироскоп отклоняется в направлении, перпендикулярном к направлению приложенной силы. Предполагая же маневр кратковременным, мы свели влияние сил инерции к действию некоторого импульса.

Но было бы ошибочно полагать, что рассмотренный кратковременный маневр пройдет бесследно для сферического маятника: приложенный импульс приведет к колебаниям системы, являющимися связанными. Величины (5.9) надо рассматривать как начальные отклонения системы, совершающей свободные колебания по закону, который можно получить из интегралов уравнений (5.2) без правой части:

$$\begin{aligned} \beta &= B_1 \sin q(t-t_1) + B_2 \cos q(t-t_1) \\ \gamma &= \sqrt{\frac{k}{r}} B_2 \sin q(t-t_1) - \sqrt{\frac{k}{r}} B_1 \cos q(t-t_1) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Определяя произвольные постоянные B_1 и B_2 из начальных условий

$$\beta = 0, \quad \gamma = -\frac{k\Delta v}{g} \quad \text{при } t = t_1 \quad (5.11)$$

получим

$$\beta = \sqrt{\frac{r}{k}} \frac{k\Delta v}{g} \sin q(t-t_1), \quad \gamma = -\frac{k\Delta v}{g} \cos q(t-t_1) \quad (5.12)$$

Таким образом максимальное отклонение (β_{\max}) сферического маятника наступит через $\pi/(2q)$ секунд по окончании маневра и будет равно

$$\beta_{\max} = \frac{\sqrt{kr} \Delta v}{g} \quad (5.13)$$

б) *Циркуляция корабля.* Рассмотрим случай циркуляции корабля с постоянной линейной и угловой скоростью $v = \text{const}$, $\omega = \text{const}$. Из (2.12) получим

$$\begin{aligned} \dot{\delta} + s\delta + kx + \omega\gamma &= -k \frac{v\omega}{g}, & \dot{\alpha} - r\delta - \omega\beta &= 0 \\ \dot{\gamma} + s\gamma - k\beta - \omega\delta &= 0, & \dot{\beta} + r\gamma + \omega x &= 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Первый вопрос, который возникает, — это вопрос об устойчивости системы. Характеристическое уравнение системы (5.14)

$$D^4 + 2sD^3 + [2(kr + \omega^2) + s^2]D^2 + 2s(kr + \omega^2)D + (kr - \omega^2)^2 + \omega^2s^2 = 0 \quad (5.15)$$

Критерий устойчивости Гурвитца для уравнения 4-го порядка

$$a_0D^4 + a_1D^3 + a_2D^2 + a_3D + a_4 = 0 \quad (5.16)$$

у которого все коэффициенты положительны, сводится к неравенству

$$a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 > 0 \quad (5.17)$$

Для уравнения (5.15) это неравенство принимает вид

$$kr(4\omega^2 + s^2) > 0 \quad (5.18)$$

выполняется при любых значениях параметров.

Таким образом система на циркуляции устойчива.

Для случая, когда $s = 0$, т. е. отсутствует радиальная коррекция, решение системы уравнений (5.14) при начальных условиях

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (5.19)$$

будет

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{kr}}{\sqrt{kr} + \omega} \frac{v\omega}{g} \sin(\omega + \sqrt{kr})t - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{kr}}{\sqrt{kr} - \omega} \frac{v\omega}{g} \sin(\omega - \sqrt{kr})t \\ \alpha &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{kr}}{\sqrt{kr} + \omega} \frac{v\omega}{g} \cos(\omega + \sqrt{kr})t + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{kr}}{\sqrt{kr} - \omega} \frac{v\omega}{g} \cos(\omega - \sqrt{kr})t - \frac{kr}{kr - \omega^2} \frac{v\omega}{g} \\ \gamma &= \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{kr} + \omega} \frac{v\omega}{g} \cos(\omega + \sqrt{kr})t - \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{kr} - \omega} \frac{v\omega}{g} \cos(\omega - \sqrt{kr})t + \frac{k\omega}{kr - \omega^2} \frac{v\omega}{g} \\ \delta &= -\frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{kr} + \omega} \frac{v\omega}{g} \sin(\omega + \sqrt{kr})t + \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{kr} - \omega} \frac{v\omega}{g} \sin(\omega - \sqrt{kr})t \end{aligned} \quad (5.20)$$

Для быстрых циркуляций корабля, когда

$$\sqrt{kr} \ll \omega \quad (5.21)$$

можно принять

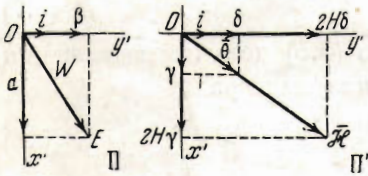
$$\sin(\omega \pm \sqrt{kr})t \approx \sin \omega t, \quad \cos(\omega \pm \sqrt{kr})t \approx \cos \omega t \quad (5.22)$$

Тогда из уравнений (5.20) получим

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{kr}{kr - \omega^2} \frac{v\omega}{g} \sin \omega t, & \delta &= \frac{k\omega}{kr - \omega^2} \frac{v\omega}{g} \sin \omega t \\ \alpha &= -\frac{kr}{kr - \omega^2} \frac{v\omega}{g} (1 - \cos \omega t), & \gamma &= \frac{k\omega}{kr - \omega^2} \frac{v\omega}{g} (1 - \cos \omega t) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Найденные решения (5.23) легко интерпретировать.

Обозначим через w радиус-вектор вершины E сферического маятника в картинной плоскости Π , т. е. в горизонтальной плоскости, касательной к единичной сфере, в верхней ее точке (фиг. 6). Дуги α и β являются дугами больших кругов сферы. По величине они малы, и их можно трактовать как прямолинейные координаты вершины сферического маятника E в плоскости π . Модуль радиуса-вектора w равен



Фиг. 6.

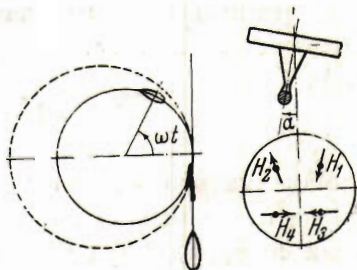
$$|w| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (5.24)$$

Геометрическая сумма векторов собственного вращения всех четырех гироскопов будет вектором \mathbf{H}^* , лежащим в плоскости π' , проходящей через оси собственного вращения гироскопов. Модуль вектора \mathbf{H}^* равен

$$|\mathbf{H}^*| = 2H \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \quad (5.25)$$

Дуги γ и δ , которые также являются малыми, можно трактовать как проекции на оси x' и y' вектора θ , равного

$$\theta = \frac{1}{2H} \mathbf{H}^* \quad (5.26)$$



Фиг. 7.

Из уравнений (5.23) найдем закон изменения модуля векторов w и θ на циркуляции

$$|w| = 2 \left| \frac{kr}{kr - \omega^2} \frac{v\omega}{g} \sin \frac{\omega t}{2} \right|, \quad |\theta| = 2 \left| \frac{k\omega}{kr - \omega^2} \frac{v\omega}{g} \sin \frac{\omega t}{2} \right| \quad (5.27)$$

Наибольшие отклонения будут при $\omega t = 180^\circ$, т. е. при выходе корабля на обратный курс. При выходе корабля после циркуляции на тот же курс т. е. при $\omega t = 360^\circ$, отклонения системы равны нулю.

На фиг. 7 показано взаимное расположение траектории корабля (сплошной линией) и траектории вершины сферического маятника (пунктиром). В правой части фиг. 7 сверху изображено мгновенное положение сферического маятника при $\omega t = 180^\circ$, а снизу — положение гироскопов в этот момент.

Выражения (5.23) получены в предположении (5.21) и поэтому найденные из них соотношения (5.27) можно приближенно представить в виде

$$|w| = 2 \left| \frac{\sqrt{kr}}{\omega} \frac{\sqrt{kr}v}{g} \sin \frac{\omega t}{2} \right|, \quad |\theta| = 2 \left| \frac{kv}{g} \sin \frac{\omega t}{2} \right| \quad (5.28)$$

откуда легко видеть, что чем больше угловая скорость циркуляции, тем меньше отклонение сферического маятника от вертикали.

Для очень быстрой циркуляции

$$|w| \approx 0, \quad |\theta| = 2 \left| \frac{kv}{g} \sin \frac{\omega t}{2} \right| \quad (5.29)$$

Это явление аналогично рассмотренному выше при мгновенном прямолинейном маневре. Однако, как и там, быстрая циркуляция не всегда проходит для сферического маятника бесследно. Если корабль после циркуляции вышел на предыдущий курс, то отклонения системы к концу маневра

$$|w| = |\theta| = 0 \quad (5.30)$$

и последствий от этого маневра не останется.

Если же после очень быстрой циркуляции корабль вышел на обратный курс, то к концу маневра отклонения системы примут значения

$$|w| = 0, \quad |\theta| = 2 \frac{kv}{g} \quad (5.31)$$

которым согласно (5.23) и (5.24) соответствуют следующие значения углов поворота гироскопов и сферического маятника:

$$\alpha = \beta = \delta = 0, \quad \gamma = -2 \frac{kv}{g} \quad (5.32)$$

С этими начальными значениями система начнет совершать свободные колебания по закону, который можно найти из интегралов (3.5), полагая в них $s = 0$:

$$\beta = 2 \frac{\sqrt{kr} v}{g} \sin qt, \quad \gamma = -2 \frac{kv}{g} \cos qt \quad (5.33)$$

Максимальное отклонение сферического маятника наступит через $t = \pi / (2q)$ секунд после маневра, т. е. по истечении четверти периода свободных колебаний системы, и будет равно

$$\beta_{\max} = 2 \frac{\sqrt{kr} v}{g} \quad (5.34)$$

Вернемся теперь к соотношениям (5.20). Случай, когда

$$\omega = \pm \sqrt{kr} \quad (5.35)$$

является особым. При отсутствии радиальной коррекции, т. е. при $s = 0$, имели бы место резонансные явления. Однако при $s \neq 0$, как показано ниже, система устойчива и при этих значениях ω . Действительно, частные решения исходной системы (5.14), вообще равные

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{kr(kr - \omega^2)}{(kr - \omega^2)^2 + s^2\omega^2} \frac{v\omega}{g}, & \beta &= \frac{skr\omega}{(kr - \omega^2)^2 + s^2\omega^2} \frac{r\omega}{g} \\ \gamma &= \frac{k\omega(kr - \omega^2)}{(kr - \omega^2)^2 + s^2\omega^2} \frac{r\omega}{g}, & \delta &= -\frac{sk\omega^2}{(kr - \omega^2)^2 + s^2\omega^2} \frac{v\omega}{g} \end{aligned} \quad (5.36)$$

при $\omega = \pm \sqrt{kr}$ и $s \neq 0$ принимают конечные значения

$$\alpha = \gamma = 0, \quad \beta = \frac{kr}{s} \frac{v}{g}, \quad \delta = -\frac{k}{s} \frac{r\omega}{g} \quad (5.37)$$

6. Перейдем к исследованию четырехгироскопной вертикали с периодом свободных колебаний $T = 84.4$ мин.

В 1923 г. Max Schuler опубликовал [3] теорему о том, что математический маятник, длина которого равна длине радиуса земного шара при любом законе движения корабля (имеется в виду ход корабля), на котором он установлен, будет колебаться вокруг истинной вертикали. М. Schuler распространил эту теорему на гироскопический маятник и гироскопический компас, период свободных колебаний которых равен периоду упомянутого математического маятника, т. е. 84.4 мин. При этом положении равновесия гироскопического маятника с указанным периодом будет уже не истинная вертикаль, а прямая, составляющая с нею угол, пропорциональный абсолютной скорости корабля. Величина этого угла носит название скоростной девиации.

В том же 1923 г. М. Schuler запатентовал [4] «Гироскопическое устройство для увеличения периода свободных колебаний твердого тела, т. е. гировертикаль или гирогоризонт». В патенте это устройство было приведено в двух вариантах. Первый из них представляет четырехгироскопную маятниковую систему, второй — трехгироскопную. Целью применения несколь-

ких гироскопов, как указывалось в этом патенте, являлась компенсация упомянутой выше скоростной девиации.

Исследуем теперь движение рассматриваемой нами гировертикали при условии, что период ее свободных колебаний равен $T = 84.4$ мин.

Рассмотрим случай, когда радиальная коррекция отсутствует. Полагая в уравнениях (2.12) $s = 0$, умножим первое из этих уравнений на $i = \sqrt{-1}$ и сложим его со вторым уравнением. Четвертое уравнение (2.12) также умножим на i и сложим его с третьим уравнением. В результате получим

$$\begin{aligned} (\dot{\alpha} + \beta \dot{i}) + ir(\gamma + \delta i) + i\omega(z + \beta i) &= -U \cos \varphi (\cos \psi + i \sin \psi) - i \frac{v}{R} \\ (\dot{\gamma} + \delta \dot{i}) + ik(z + \beta i) + i\omega(\gamma + \delta i) &= -\frac{k}{g} (\dot{v} + i v \omega) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Обозначим

$$z + \beta i = \omega, \quad \gamma + \delta i = \theta \quad (6.2)$$

Смысл величин ω и θ объяснен выше в п. 5. Как видно из фиг. 6, ω есть радиус-вектор вершины E сферического маятника в картинной плоскости π , а θ представляет собой с точностью до постоянного множителя $1/2H$ главный вектор собственных моментов всех гироскопов.

В новых обозначениях (6.2) уравнения (6.1) принимают вид

$$\dot{\omega} + i\omega\omega + ir\theta = -U \cos \varphi e^{i\psi} - i \frac{v}{R}, \quad \dot{\theta} + i\omega\theta + ik\omega = -\frac{k}{g} (\dot{v} + i v \omega) \quad (6.3)$$

Учитывая, что

$$\frac{d\psi}{dt} = -\omega \quad (6.4)$$

так как ψ — курс корабля считается положительным по стрелке часов (фиг. 3), можно уравнения (6.3) преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \ddot{\omega} + 2i\omega\dot{\omega} + (kr - \omega^2 + i\dot{\omega})\omega &= -i \left(\frac{1}{R} - \frac{kr}{g} \right) (\dot{v} + i v \omega) \\ \ddot{\theta} + 2i\omega\dot{\theta} + (kr - \omega^2 + i\dot{\omega})\theta &= \\ &= -\frac{k}{g} \left[\ddot{v} + 2i\omega\dot{v} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 + i\dot{\omega} \right) v \right] + ikU \cos \varphi e^{i\psi} \end{aligned} \quad (6.5)$$

В случае, когда период свободных колебаний системы равен 84.4 мин., т. е. частота собственных колебаний \sqrt{kr} удовлетворяет равенству

$$kr = \frac{g}{R} \quad (6.6)$$

уравнения (6.5) могут быть представлены так:

$$\begin{aligned} \ddot{\omega} + 2i\omega\dot{\omega} + (kr - \omega^2 + i\dot{\omega})\omega &= 0 \\ \ddot{\theta} + 2i\omega\dot{\theta} + (kr - \omega^2 + i\dot{\omega})\theta &= \\ &= -\frac{1}{rR} [\ddot{v} + 2i\omega\dot{v} + (kr - \omega^2 + i\dot{\omega})v] + ikU \cos \varphi e^{i\psi} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Сделаем еще некоторые преобразования. Введем обозначение

$$v_1 = -iRU \cos \varphi e^{i\psi} \quad (6.8)$$

Продифференцировав v_1 по t , получим ¹

$$\dot{v}_1 = -\omega RU \cos \varphi e^{i\psi} = -i\omega v_1 \quad (6.9)$$

Вторично продифференцировав по t , найдем

$$\ddot{v}_1 = -i\omega \dot{v}_1 - i\omega \dot{v}_1 = -\omega^2 v_1 - i\omega \dot{v}_1 \quad (6.10)$$

Нетрудно теперь проверить справедливость равенства

$$-\frac{1}{rR} [\ddot{v}_1 + 2i\omega \dot{v}_1 + (kr - \omega^2 + i\dot{\omega})v_1] = ikU \cos \varphi e^{i\psi} \quad (6.11)$$

Обозначая через V абсолютную скорость корабля в пространстве

$$V = v + v_1 = v - iRU \cos \varphi e^{i\psi} \quad (6.12)$$

из уравнений (6.7) и (6.12) найдем

$$\begin{aligned} \ddot{\omega} + 2i\omega \dot{\omega} + (kr - \omega^2 + i\dot{\omega})\omega &= 0 \\ \ddot{\theta} + 2i\omega \dot{\theta} + (kr - \omega^2 + i\dot{\omega})\theta &= -\frac{1}{rR} [\dot{V} + 2i\omega \dot{V} + (kr - \omega^2 + i\dot{\omega})V] \end{aligned} \quad (6.13)$$

Из уравнений (6.13) можно сделать выводы.

1) У четырехгироскопной вертикали с периодом свободных колебаний $T = 84,4$ мин. сферический маятник колеблется вокруг истинной вертикали при любом законе движения корабля. Он не имеет ни скоростных, ни баллистических девиаций.

2) С точностью до свободных колебаний главный вектор собственных моментов гироскопов пропорционален абсолютной скорости корабля в пространстве. Отклонения гироскопов от их положения равновесия пропорциональны составляющим абсолютной скорости корабля по его продольной и поперечной осям.

Последнее обстоятельство вытекает из того, что второе уравнение (6.13) имеет частное решение вида

$$\theta = -\frac{1}{rR} (v - iRU \cos \varphi e^{i\psi}) \quad (6.14)$$

или согласно (6.2)

$$\gamma + \delta i = -\frac{1}{rR} (v + RU \cos \varphi \sin \psi - iRU \cos \varphi \cos \psi) \quad (6.15)$$

Отделяя в (6.15) действительную и мнимую части, найдем

$$\gamma = -\frac{1}{rR} (v + RU \cos \varphi \sin \psi), \quad \delta = \frac{1}{r} U \cos \varphi \cos \psi \quad (6.16)$$

¹) Здесь мы пренебрегаем величиной ускорения, равной

$$\frac{d}{dt} (RU \cos \varphi) = -RU \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -v_N U \sin \varphi$$

как малой. Величина v_N есть северная составляющая скорости корабля. При $v_N = 30$ узлов, т. е. 45 м/сек, эта величина составляет $45 \times 7.3 \times 10^{-5} \sin \varphi$ м/сек². При $\sin \varphi = 1$ эта величина равна 10^{-4} g, что соответствует отклонению отвеса на $0.3'$.

Величины (6.16) и представляют собой (в некотором масштабе) проекции абсолютной скорости корабля на оси η и ξ .

7. Рассмотрим вопрос о накоплении ошибок гировертикали при длительном маневрировании корабля. В п. 6 были получены уравнения (6.3) относительного движения системы (относительно координатного трехгранника $\xi\eta\zeta$, связанного с траекторией корабля), в предположении, что радиальная коррекция отсутствует, т. е. $s=0$. При $s \neq 0$ эти уравнения согласно (2.12) следует дополнить членом $s\theta$, и они примут такой вид:

$$\dot{\omega} + i\omega\omega + ir\theta = -U \cos \varphi e^{i\psi} - i \frac{v}{R}, \quad \dot{\theta} + i\omega\theta + s\theta + ik\omega = -\frac{k}{g} (\dot{v} + i\omega v) \quad (7.1)$$

Перейдем теперь к географическим координатам. Для этого надо повернуть координатный трехгранник $\xi\eta\zeta$ вокруг оси ζ на угол ψ так, чтобы ось ξ совпала с направлением на восток, а ось η с направлением на север. Переменные в новых координатах обозначим теми же буквами, но с индексами внизу. Как легко видеть из фиг. 8, будут иметь место соотношения

$$\omega = \alpha + \beta i = (\alpha_1 + \beta_1 i) e^{i\psi} = \omega_1 e^{i\psi}, \quad \theta = \gamma + \delta i = (\gamma_1 + \delta_1 i) e^{i\psi} = \theta_1 e^{i\psi} \quad (7.2)$$

Дифференцируя выражения (7.2) и учитывая при этом (6.4), получим

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}_1 e^{i\psi} - i\omega\omega_1 e^{i\psi}, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_1 e^{i\psi} - i\omega\theta_1 e^{i\psi} \quad (7.3)$$

Найдем теперь выражения в новых координатах для величин v и $\dot{v} - i\omega v$. Как легко видеть из фиг. 8,

$$iv = (v_E + iv_N) e^{i\psi} \quad (7.4)$$

Отсюда найдем

$$i\dot{v} = (i\dot{v}_E + i\dot{v}_N) e^{i\psi} - i\omega(v_E + iv_N) e^{i\psi} \quad (7.5)$$

Из соотношений (7.4) и (7.5) получим

$$\dot{v} + i\omega v = -i(i\dot{v}_E + i\dot{v}_N) e^{i\psi} \quad (7.6)$$

Подставляя найденные выражения в уравнения (7.1), получим

$$\dot{\omega} + ir\theta_1 = -\frac{V_E + iv_N}{R}, \quad \dot{\theta}_1 + s\theta_1 + ik\omega_1 = i \frac{k}{g} (i\dot{v}_E + i\dot{v}_N) \quad (7.7)$$

где
$$V_E = v_E + RU \cos \varphi \quad (7.8)$$

Введем новые переменные. Пусть

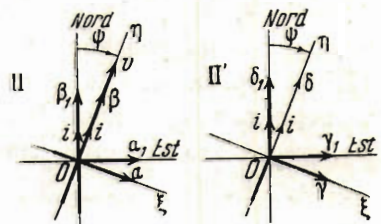
$$\omega^* = -\frac{s}{kr} \frac{V_E + iv_N}{R}, \quad \theta^* = i \frac{V_E + iv_N}{Rr} \quad (7.9)$$

где $V_E + iv_N$ — некоторая функция времени t .

Вычислим значения величин¹

$$\frac{d}{dt} (\omega_1 - \omega^*) = \dot{\omega}_1 + \frac{s}{kr} \frac{i\dot{v}_E + i\dot{v}_N}{R}, \quad \frac{d}{dt} (\theta_1 - \theta^*) = \dot{\theta}_1 - i \frac{i\dot{v}_E + i\dot{v}_N}{Rr} \quad (7.10)$$

¹ Здесь, как и в п. 6, мы пренебрегаем величиной $d(RU \cos \varphi) / dt$ как малой (см. сноску на стр. 414).



Фиг. 8

Подставляя выражения (7.10) в уравнения (7.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\omega_1 - \omega^*) + ir(\theta_1 - \theta^*) &= \frac{s}{kr} \frac{\dot{v}_E + i\dot{v}_N}{R} \\ \frac{d}{dt}(\theta_1 - \theta^*) + s(\theta_1 - \theta^*) + ik(\omega_1 - \omega^*) &= -i \left(\frac{1}{Rr} - \frac{k}{g} \right) (\dot{v}_E + i\dot{v}_N) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Предполагая отклонения системы в начальный момент времени равными нулю, можно величины

$$W = \omega_1 - \omega^*, \quad \Theta = \theta_1 - \theta^* \quad (7.12)$$

считать баллистическими девиациями системы.

Обозначая через ν угловую частоту свободных колебаний математического маятника с периодом $T = 84.4$ мин., будем иметь

$$\nu^2 = \frac{g}{R} \quad (7.13)$$

и из уравнений (7.11) и (7.12) найдем

$$\dot{W} + ir\Theta = \frac{s}{kr} \nu^2 \frac{\dot{v}_E + i\dot{v}_N}{g}, \quad \dot{\Theta} + s\Theta + ikW = \frac{i}{r} (kr - \nu^2) \frac{\dot{v}_E + i\dot{v}_N}{g} \quad (7.14)$$

Из уравнений (7.14) непосредственно вытекает полученный в предыдущем параграфе результат. При отсутствии радиальной коррекции ($s = 0$) и выполнении условия (6.5), т. е. при $\sqrt{kr} = \nu$, правые части уравнений (7.14) обращаются в нуль, из чего можно заключить, что гировертикаль с периодом свободных колебаний $T = 84.4$ мин. баллистических девиаций не имеет. Что касается значений величин ω^* и θ^* , то, как следует из (7.9), при $s = 0$

$$\omega^* = 0, \quad \theta^* = \frac{i}{rR} (V_E + iV_N) \quad (7.15)$$

т. е. сферический маятник не имеет и скоростных девиаций и, следовательно, при любом законе движения корабля колеблется вокруг истинной вертикали; главный вектор собственных моментов гироскопов θ^* пропорционален абсолютной скорости корабля.

Перейдем теперь к исследованию уравнений (7.14), которые представим в виде

$$\dot{W} + ir\Theta = bf(t), \quad \dot{\Theta} + s\Theta + ikW = ia f(t) \quad (7.16)$$

где через a , b и $f(t)$ обозначены

$$a = \frac{1}{r} \frac{kr - \nu^2}{g}, \quad b = \frac{s}{kr} \frac{\nu^2}{g}, \quad f(t) = \dot{v}_E + i\dot{v}_N \quad (7.17)$$

Величины a и b , очевидно, являются постоянными.

Решение уравнений (7.16) при начальных условиях

$$W = \Theta = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (7.18)$$

и произвольной функции $f(t)$ можно найти методом вариации произвольных постоянных. Это решение будет следующим

$$W = \int_0^t \left[b \cos q(t-\tau) + \frac{2ar+bs}{2q} \sin q(t-\tau) \right] \exp \left[-\frac{s}{2}(t-\tau) \right] f(\tau) d\tau$$

$$\Theta = i \int_0^t \left[a \cos q(t-\tau) - \frac{as+2bk}{2q} \sin q(t-\tau) \right] \exp \left[-\frac{s}{2}(t-\tau) \right] f(\tau) d\tau \quad (7.19)$$

Справедливость выражений (7.19) можно проверить подстановкой.

Для изучения баллистических девиаций сферического маятника необходимо исследовать полученное для W выражение (7.19).

Вводя вспомогательный угол ε при помощи соотношений

$$\sin \varepsilon = \frac{1}{A} \frac{2ar+bs}{2q}, \quad \cos \varepsilon = -\frac{b}{A}, \quad A = \frac{\sqrt{b^2kr+ar(ar+bs)}}{q} \quad (7.20)$$

представим выражение (7.19) для $W(t)$ так

$$W(t) = -A \int_0^t \exp \left[-\frac{s}{2}(t-\tau) \right] \cos [q(t-\tau) + \varepsilon] d(v_E + iv_N) \quad (7.21)$$

Интегрируя этот интеграл по частям, найдем

$$W(t) = -A \left\{ (v_E + iv_N)_t \cos \varepsilon - \exp \left(-\frac{s}{2}t \right) (v_E + iv_N)_0 \cos(qt + \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{kr} \int_0^t (v_E + iv_N) \exp \left[-\frac{s}{2}(t-\tau) \right] \sin [q(t-\tau) + \varepsilon + \lambda] d\tau \right\} \quad (7.22)$$

где угол λ определен соотношениями

$$\sin \lambda = \frac{s}{2\sqrt{kr}}, \quad \cos \lambda = \frac{q}{\sqrt{kr}} \quad (7.23)$$

Обозначая через

$$\sigma = t - \tau \quad (7.24)$$

и вводя функцию

$$\varphi(\sigma) = -\exp \left[-\frac{s}{2}\sigma \right] \cos(q\sigma + \varepsilon) \quad (7.25)$$

можно выражение (7.22) представить так:

$$W(t) = -A \left\{ (v_E + iv_N)_t \cos \varepsilon - \exp \left[-\frac{s}{2}t \right] (v_E + iv_N)_0 \cos(qt + \varepsilon) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t (v_E + iv_N) \varphi'(\sigma) d\sigma \right\} \quad (7.26)$$

Изменение функции $W(t)$ (7.26), а следовательно, и ее модуля $|W(t)|$ вполне определяется заданным законом изменения функций v_E и v_N . Можно, однако, следуя Б. В. Булгакову [1], [5] (стр. 79, 140), выбрать такой закон изменения этих функций, чтобы соответствующая им функция $|W(t)| = W_m(t)$ была больше, чем любая другая $|W(t)|$, соответствующая иным законам изменения v_E и v_N . Изменение функций v_E и v_N во времени должно при этом подчиняться следующим условиям:

1) Аргумент комплексной величины $v_E + iv_N$ должен принимать одно из двух значений, отличающихся друг от друга на 180° .

2) Модуль комплексной величины $v_E + iv_N$ должен быть равен

$$|v_E + iv_N| = v_m \quad (7.27)$$

максимальной скорости корабля.

3) Аргумент $v_E + iv_N$ должен изменяться одновременно с изменением знака у функции $\sin(q\sigma + \varepsilon + \lambda)$ так, чтобы все элементы определенного интеграла, входящего в выражение (7.22), были одного знака.

4) Аргументы величин $(v_E + iv_N)_t$ и $(v_E + iv_N)_0$, т. е. скорости корабля в момент окончания маневра и в начале маневра, должны иметь такой знак, чтобы члены, содержащие их, оказались того же знака, что и определенный интеграл, входящий в выражение (7.27).

Эти требования соответствуют движению корабля с максимальной скоростью v_m по некоторому направлению, составляющему постоянный угол с меридианом, причем в моменты времени, соответствующие значению σ ,

$$\sigma_n = \frac{n\pi - \varepsilon - \lambda}{q} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7.28)$$

отличающиеся каждый от последующего на половину периода свободных колебаний системы (когда функция $\sin(q\sigma + \varepsilon + \lambda)$ меняет свой знак), корабль круто поворачивает и ложится на обратный курс.

Нетрудно видеть, что построенная таким образом функция $W_m(t)$ монотонно возрастает с увеличением t , стремясь к пределу $W_m(\infty)$, определяемому равенством

$$W_m(\infty) = Av_m \left[\mp \cos \varepsilon + \int_0^{\sigma_1} \varphi'(\sigma) d\sigma - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varphi'(\sigma) d\sigma + \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} \varphi'(\sigma) d\sigma - \dots \right] \quad (7.29)$$

где знак перед первым членом, стоящим в квадратных скобках, выбирается так, чтобы он был положительным. При этом верхний знак обозначает, что при $\tau = t$, т. е. в конце маневра поворота не происходит; нижний знак обозначает, что поворот необходим.

Выполняя интегрирование в выражении (7.29) и учитывая, что по (7.25)

$$\varphi(0) = -\cos \varepsilon \quad (7.30)$$

получим

$$W_m(\infty) = Av_m \{ \mp \cos \varepsilon + \cos \varepsilon + 2 [\varphi(\sigma_1) - \varphi(\sigma_2) + \varphi(\sigma_3) - \dots] \} \quad (7.31)$$

Согласно (7.20) и (7.17)

$$\cos \varepsilon = -\frac{1}{A} \frac{s}{kr} \frac{v^2}{g} < 0 \quad (7.32)$$

и для того чтобы первый член в выражении (7.29) был положителен, необходимо выбрать верхний знак. При этом в выражении (7.31) сократятся первый и второй члены; подставляя в (7.31) выражения (7.25) и (7.28), получим

$$W_m(\infty) = 2Av_m \left\{ -\exp \frac{-s(\pi - \varepsilon - \lambda)}{2q} \cos(\pi - \lambda) + \right. \\ \left. + \exp \frac{-s(2\pi - \varepsilon - \lambda)}{2q} \cos(2\pi - \lambda) - \exp \frac{-s(3\pi - \varepsilon - \lambda)}{2q} \cos(3\pi - \lambda) + \dots \right\} \quad (7.33)$$

Обозначая через D величину

$$D = \exp \left[-\pi \frac{s}{2q} \right] \quad (7.34)$$

и учитывая, что согласно (7.23) $s/(2q) = tg \lambda$, из (7.33) найдем

$$W_m(\infty) = 2A v_m \exp [-(\pi - \varepsilon - \lambda) tg \lambda] (1 + D + D^2 + \dots) \cos \lambda \quad (7.35)$$

Суммируя ряд в выражении (7.35) и определяя из (7.23), (7.20), (7.17) величину

$$A \cos \lambda = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{(\nu^2 - kr)^2}{kr} + \frac{s^2 \nu^2}{kr}} \quad (7.36)$$

получим из (7.35) окончательное выражение для

$$W_m(\infty) = 2B \frac{v_m}{\sqrt{gR}} \quad (7.37)$$

где

$$B = \frac{1}{1-D} f_1(s, kr) f_2(\varepsilon, \lambda) = \frac{1}{1-D} \sqrt{\frac{\nu^2}{kr} \left(1 - \frac{kr}{\nu^2} \right)^2 + \frac{s^2}{kr}} \exp [-(\pi - \varepsilon - \lambda) tg \lambda] \quad (7.38)$$

Приведем для справок значения величин

$$\sqrt{gR} = 7904.46 \frac{\text{м}}{\text{сек}}, \quad \frac{1}{\sqrt{gR}} = 1.27 \times 10^{-4} \frac{\text{сек}}{\text{м}}$$

Сделаем еще замечание относительно значений дуг λ и ε , входящих в выражение (7.38). Как видно из (7.23), $\sin \lambda$ и $\cos \lambda$ оба положительны и угол λ лежит в первой четверти. Как указывалось выше (7.32), $\cos \varepsilon$ — отрицателен. Знак $\sin \varepsilon$ зависит от параметров прибора. Подставляя в выражение (7.20) значения a и b из (7.17), найдем

$$\sin \varepsilon = \left[2 \left(\frac{kr}{\nu^2} - 1 \right) + \frac{s^2}{kr} \right] : \left[2 \sqrt{\left(1 - \frac{kr}{\nu^2} \right)^2 + \frac{s^2}{\nu^2}} \right] \quad (7.39)$$

Пример. В книге Б. В. Булгакова [1] (стр. 82) вычислена максимальная баллистическая девиация при предельной скорости судна $v_m = 30$ узлов или $v_m = 15$ м/сек для гиromаятника, имеющего параметры $s = 0.866 \nu$, $k = 1.118 \nu$ и условное время затухания $\tau_s = \pi/s = 48$ мин. 44 сек. Частота k свободных колебаний (при отсутствии затухания) у этого гиromаятника выбрана равной k^* , т. е. тому значению k , которое при фиксированной величине s дает наименьшую абсолютную величину для его накопленной баллистической девиации. Последняя оказалась равной 25'.

Определим максимальную баллистическую девиацию для четырехгирскопной вертикали при той же максимальной скорости судна.

Для того чтобы результаты были сравнимы, возьмем прибор, имеющий такое же условное время затухания. (Условным временем затухания называется время, необходимое для того, чтобы на неподвижном основании начальное отклонение прибора уменьшилось в $\exp \pi = 23.14$ число раз).

В нашем случае $\tau_s = 2\pi/s$. Поэтому условное время затухания $\tau_s = 48$ мин. 44 сек. будет получено при $s = 1.73\nu$.

При фиксированном значении s величины ε и λ согласно (7.32), (7.39) и (7.23), а также и коэффициент B (7.38), который можно назвать коэффициентом баллистической девиации, являются функциями от kr . Как видно из приведенной ниже табл. 1 и графика на фиг. 9, функция B имеет минимум при значении kr , равном $2\nu^2$. Частота свободных колебаний (при отсутствии затухания), соответствующая минимуму функции B , таким образом будет равна $(\sqrt{kr})^* = 1.41\nu$. Это дает для периода свободных колебаний прибора (при отсутствии затухания) величину $T^* = 2\pi/\sqrt{kr}^* = 60$ минут. Модуль максимальной баллистической девиации согласно (7.37) в рассматриваемом случае будет равен

$$W_m(\infty) = 4.25 \times 10^{-3} \text{ радпана} = 14.5'$$

По сравнению с гиросмайтником с одним гироскопом максимальная баллистическая девиация меньше почти в 2 раза.

Таблица 1

$\frac{kr}{\nu}$	$\frac{q}{\nu}$ по (3.6)	λ по (7.23)	$\text{tg } \lambda$	$\sin \varepsilon$ по (7.39)	ε	D по (7.34)	$\frac{1}{1-D}$	$f_2(\varepsilon, \lambda)$ по (7.38)	$f_1(s, kr)$ по (7.38)	B по (7.38)	C_1 по (8.14)	C_0 по (8.7)
1.00	0.520	1.02	1.63	0.86	2.09	0.006	1	0.95	1.73	1.64	1.64	1.70
1.15	0.646	0.92	1.31	0.83	2.16	0.016	1.02	0.94	1.62	1.52	1.52	1.48
1.25	0.721	0.87	1.18	0.83	2.16	0.025	1.03	0.88	1.56	1.38	1.37	1.36
1.35	0.786	0.82	1.08	0.83	2.16	0.033	1.04	0.84	1.52	1.33	1.23	1.26
1.45	0.846	0.79	1.01	0.83	2.16	0.040	1.04	0.82	1.49	1.27	1.22	1.17
1.55	0.905	0.75	0.94	0.84	2.14	0.058	1.06	0.78	1.46	1.20	1.14	1.10
1.65	0.960	0.72	0.88	0.84	2.14	0.062	1.06	0.77	1.44	1.17	1.11	1.03
1.75	1.01	0.71	0.85	0.85	2.12	0.069	1.08	0.76	1.43	1.17	1.09	0.97
1.85	1.06	0.68	0.80	0.86	2.09	0.082	1.09	0.74	1.42	1.14	1.05	0.92
2.0	1.13	0.65	0.76	0.88	2.06	0.090	1.1	0.72	1.41	1.12	1.02	0.85
2.2	1.21	0.61	0.70	0.89	2.04	0.110	1.12	0.71	1.42	1.13	1.02	0.77
2.4	1.29	0.59	0.66	0.91	1.99	0.120	1.14	0.69	1.44	1.13	0.99	0.71
2.6	1.37	0.55	0.62	0.92	1.97	0.142	1.17	0.68	1.46	1.16	0.99	0.65
2.8	1.44	0.53	0.59	0.93	1.94	0.157	1.19	0.67	1.50	1.20	1.00	0.61
3.0	1.51	0.51	0.56	0.94	1.91	0.175	1.21	0.66	1.53	1.22	1.00	0.57

8. Баллистические девиации при кратковременном маневрировании корабля. Выше было найдено выражение (7.21) для баллистической девиации сферического маятника при любом движении корабля.

Многие маневры корабля, как увеличение или уменьшение скорости или изменение курса, производятся в течение нескольких минут. Этот промежуток времени может считаться малым по сравнению с периодом T прецизионного прибора, который должен выбираться довольно большим (порядка 60 мин., как показано в предыдущем параграфе).

Определенный интеграл, входящий в выражение (7.21) для $W(t)$, нужно взять лишь по времени маневра.

Показательная и тригонометрическая функции, входящие в выражение (7.21), в течение быстрого маневра изменятся очень мало, так как s и q сравни-

тельно малы (порядка $1/T$). Поэтому можно приближенно считать эти функции не изменяющимися в течение маневра и вместо (7.21) принять

$$W(t) = -A \exp\left(\frac{s}{2} t\right) \cos(qt + \varepsilon) \int_0^t d(v_E + iv_N) \quad (8.1)$$

Для бесконечно быстрого маневра эта формула дает точное выражение для баллистической девиации. Интегрируя (8.1), получим

$$W(t) = A \exp\left(-\frac{s}{2} t\right) \cos(qt + \varepsilon) [(v_E + iv_N)_0 - (v_E + iv_N)_t] \quad (8.2)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, представляет собой изменение скорости за время маневра, которое обозначим

$$\Delta v = (v_E + iv_N)_0 - (v_E + iv_N)_t \quad (8.3)$$

Максимальное значение $|\Delta v|$ равно $2v_m$. Такое изменение скорости корабля соответствует повороту корабля на обратный курс, причем скорости корабля в начале и в конце маневра являются максимальными (v_{\max}). Таким образом

$$W(t) = |\Delta v| A \exp\left(-\frac{s}{2} t\right) \cos(qt + \varepsilon) \quad (8.4)$$

Непосредственно после маневра, т. е. при $t = 0$, баллистическая девиация

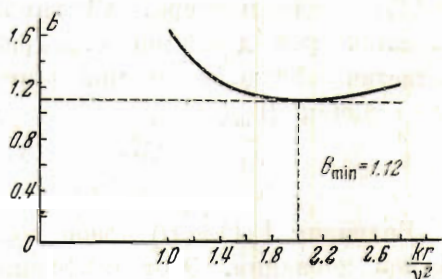
$$W(0) = |\Delta v| A \cos \varepsilon \quad (8.5)$$

Подставляя вместо $A \cos \varepsilon$ его значение согласно (7.20) и (7.17), получим

$$W(0) = C_0 \frac{|\Delta v|}{\sqrt{gR}} \quad (8.6)$$

где

$$C_0 = \frac{sv}{kr} \quad (8.7)$$



Фиг. 9

Момент t , для которого вычисляется баллистическая девиация, можно предполагать взятым как во время маневра, так и после него.

Поэтому надлежит определить максимальное значение функции $W(t)$ и установить, будет ли оно превышать величину $W(0)$. Производная от $W(t)$ согласно (8.4) будет равна

$$\dot{W}(t) = -|\Delta v| \sqrt{kr} \exp\left(-\frac{s}{2} t\right) \sin(qt + \varepsilon + \lambda) \quad (8.8)$$

Она обращается в нуль при значениях t_m , равных

$$t_m = [m\pi - (\lambda + \varepsilon)] \frac{1}{q} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (8.9)$$

Согласно (7.20) и (7.23)

$$\sin(\lambda + \varepsilon) = \frac{1}{Ag} \frac{kr - v^2}{\sqrt{kr}}, \quad \cos(\lambda + \varepsilon) = -\frac{1}{Ag} \frac{kr + v^2}{\sqrt{kr}} \frac{s}{2q} \quad (8.10)$$

При значениях $kr > v^2$ угол $(\lambda + \varepsilon)$ лежит в пределах второй четверти.

Поэтому, наименьшее значение m , при котором $\dot{W}(t)$ обращается в нуль, будет $m = 1$. Этому значению m соответствует согласно (8.9)

$$t_1 = \frac{\pi - (\lambda + \varepsilon)}{q} \quad (8.11)$$

Подставляя значение (8.11) для t_1 в выражение (8.4), найдем

$$W(t_1) = |\Delta v| A \cos \lambda \exp [-(\pi - \lambda - \varepsilon) \operatorname{tg} \lambda] \quad (8.12)$$

После подстановки значения $A \cos \lambda$ из (7.37) получим

$$W(t_1) = C_1 \frac{|\Delta v|}{\sqrt{gR}} \quad (8.13)$$

$$C_1 = f_1(s, kr) f_2(\varepsilon, \lambda) = \sqrt{\frac{v^2}{kr} \left(1 - \frac{kr}{v^2}\right)^2 + \frac{s^2}{kr}} \exp [-(\pi - \varepsilon - \lambda) \operatorname{tg} \lambda] \quad (8.14)$$

Исследуем выражения (8.6) и (8.13) для $W(0)$ и $W(t_1)$ при некотором фиксированном значении s , т. е. при заданном условном времени затухания.

Как видно из табл. 1 и графика на фиг. 10, при условном времени затухания прибора $\tau_s = 48$ мин. 44 сек. для значений $kr > 1,25 v^2$ коэффициент баллистической девиации $C_1 > C_0$, т. е. наибольшее значение баллистической девиации при кратковременном маневре будет иметь место не в конце самого маневра, а через некоторый промежуток времени, определяемый из (8.11), после маневра. Сравнивая выражение (8.13) для этого значения баллистической девиации с выражением (7.38) для $W_m(\infty)$ максимальной баллистической девиации при длительном маневрировании корабля, увидим, что величина $W_m(\infty)$ превышает величину $W(t_1)$ при $|\Delta v| = 2v_m$ в число раз:

$$\frac{W_m(\infty)}{W_m(t_1)} = \frac{1}{1-D} = \frac{1}{1 - \exp[-\pi s/(2q)]} \quad (8.15)$$

Величину $1/(1-D)$ можно назвать коэффициентом накопления баллистической девиации. Этот коэффициент тем больше, чем слабее радиальная коррекция, т. е. чем меньше s . (Для рассмотренного в п. 6 примера 1 коэффициенты накопления баллистической девиации приведены в табл. 1).

9. Рассмотрим баллистические девиации четырехгироскопной вертикали с малым периодом свободных колебаний. В примере, приведенном в предыдущем параграфе, показано, что наименьшее значение баллистической девиации при длительном маневрировании корабля для прибора, у которого условное время затухания $\tau_s = 48$ мин. 44 сек., будет иметь место при периоде его свободных колебаний, равном около 60 мин.

Прибор с таким большим периодом свободных колебаний представляет собой довольно сложную конструкцию. Значительно меньшие трудности представляет постройка прибора с периодом свободных колебаний порядка 10—15 мин., что соответствует значениям \sqrt{kr} от $6v$ до $9v$. Для целей практики такие приборы могут находить большое применение.

Поэтому весьма существенной задачей является оценка максимальной баллистической девиации при длительном маневрировании корабля для четырехгироскопной вертикали с малым периодом свободных колебаний и сравнение ее с такой же ошибкой для гиromaятника с одним гироскопом, имеющего одинаковый период свободных колебаний.

Считая $kr \gg v^2$, можно принять следующие приближенные значения для величин (7.17):

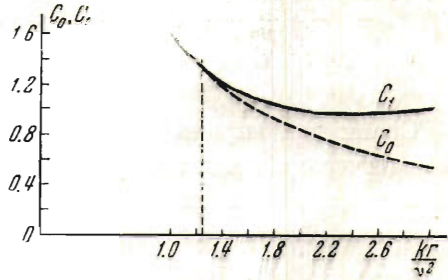
$$a \approx \frac{k}{g}, \quad b \approx 0, \quad A = \frac{1}{g} \frac{kr}{q} \quad (9.1)$$

Из соотношений (7.20) и (9.1) найдем $\sin \varepsilon = 1$, $\cos \varepsilon = 0$, откуда следует, что

$$\varepsilon = \pi / 2 \quad (9.2)$$

Подставляя в (7.35) величины (9.1) и (9.2), получим для максимальной баллистической девиации $W_m(\infty)$ следующее выражение:

$$W_m(\infty) = 2B_1 \frac{v_m}{\sqrt{gR}} \quad (9.3)$$



Фиг. 10

где в введенных выше обозначениях (7.23), (3.6) и (7.35)

$$B_1 = \frac{1}{1-D} \frac{\sqrt{kr}}{v} \exp \left[- \left(\frac{\pi}{2} - \lambda \right) \operatorname{tg} \lambda \right] \quad (9.4)$$

Коэффициент B_1 (9.4), как и в предыдущих случаях, назовем *коэффициентом баллистической девиации*.

Случай, когда $q = 0$, является аперiodической границей для затухающих колебаний гироскопа. Для сколь угодно малых значений q рассуждения, при помощи которых получено выражение (7.35), остаются в силе и, следовательно, остается справедливым и выражение (9.3), которым определено $W_m(\infty)$. При $q = 0$ имеют место следующие соотношения:

$$\sqrt{kr} = \frac{s}{2}, \quad \lambda = \frac{\pi}{2}, \quad D = 0$$

а выражение (9.4) для коэффициента баллистической девиации B_1 становится неопределенным. Раскрывая эту неопределенность, найдем

$$B_1 = \frac{1}{e} \frac{\sqrt{kr}}{v} \quad (9.5)$$

Таким образом при $\sqrt{kr} = s/2$ максимальная баллистическая девиация $W_m(\infty)$ согласно (9.3), будет равна

$$W_m(\infty) = 2 \frac{\sqrt{kr}}{v} \frac{1}{e} \frac{v_m}{\sqrt{gR}} \quad (9.6)$$

Сравнивая выражение (9.6) с выражением (9.3), нетрудно видеть, что функция $W_m(\infty)$ имеет при $\lambda = \pi/2$ наименьшее значение по сравнению со случаями, когда $\lambda < \pi/2$.

В теории одногирского маятника имеется аналогичный результат. Б. В. Булгаковым в его книге^[1] показано (стр. 75), что для одногирского маятника для всех s , превосходящих $2.058v$, аперiodический гироскоп является наивыгоднейшим, так как дает наименьшее значение для максимальной баллистической девиации.

Для такого одногирского маятника максимальная баллистическая девиация будет равна (там же, стр. 83)

$$W_m(\infty) = 2 \frac{v^2 + s_1^2}{vs_1} \frac{v_m}{\sqrt{gR}} \approx 2 \frac{s_1}{v} \frac{v_m}{\sqrt{gR}} \quad (9.7)$$

Сравним результаты для четырехгироскопной вертикали и одногогироскопного маятника, имеющих одинаковое условное время затухания τ_s .

Условное время затухания для одногогироскопного маятника будет равно $\tau'_s = \pi / s_1$, а для четырехгироскопной вертикали $\tau''_s = 2\pi / s = \pi / \sqrt{kr}$. Полагая $\tau'_s = \tau''_s$, найдем значение коэффициента $s_1 = \sqrt{kr}$. Подставляя это значение s_1 в выражение (9.7), найдем для одногогироскопного маятника

$$W_m(\infty) = 2 \frac{\sqrt{kr}}{v} \frac{v_m}{\sqrt{gR}} \quad (9.8)$$

Сравнивая выражение (9.8) с выражением (9.6), видим, что максимальная баллистическая девиация у четырехгироскопной вертикали с малым периодом свободных колебаний в $e = 2.7$ число раз меньше, чем у одногогироскопного маятника с таким же периодом.

Поступила в редакцию
15. VII 1943

Институт механики
Академии Наук СССР

J. N. ROITENBERG. MULTI-GYROSCOPIC VERTICAL

Recent years have seen the ever-greater application of multi-gyroscopic systems in instruments designed to maintain horizontal planes on moving ships. The value of the employment of such systems was pointed out in the work by Krylov entitled «General theory of gyroscopes and some technical applications of them». Krylov points out (page 265) that stabilization of platforms on a ship may be attained by the following means: «the platform is suspended within a knuckle joint being attached to its internal ring. Attached to the platform are two gyroscopic stabilizers, one of which nullifies roll, the other pitch».

The present paper is devoted to an investigation of the above outlined idea.

In paragraph 1, the author gives a brief description of multi-gyroscopic verticals. Paragraph 2 gives differential equations for the motion of the instrument. Paragraph 3 discusses the motion of the instrument on a fixed support. Paragraph 4 and 5 take up the influence of rolling and acceleration of the moving ship. Here it is established that the data yielded by a multi-gyroscopic vertical are much more precise in rolling than the data yielded by a single gyroscope. Paragraph 6 studies the motion of a multi-gyroscopic vertical with a free oscillation period equal to the period pointed out by M. Schuler $T = 84.4$ minutes. Paragraph 7 is devoted to the increase of error in gyro-verticals for extended manoeuvring of the ship. The 9th and last paragraph discusses ballistic deviation of multi-gyroscope verticals with a small free oscillation period.

The author's gratitude is due to B. V. Bulgakov, whose methods were used throughout in the present work and who gave the author much valuable advice.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. М.-Л. 1939. Стр. 221.
2. Крылов А. Н. и Крутков Ю. А. Общая теория гироскопов. Л. 1932. Стр. 132.
3. Schuler M. Physikalische Zeitschrift. 1923. № 16.
4. Schuler M. Германский патент. № 410508. 1923. 30/VIII.
5. Bulgakov B. V. Ingenieur-Archiv. 1940. Dez. S. 461.