

О Б З О Р Ы

О НЕКОТОРЫХ РАБОТАХ ПО ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ <sup>1</sup>

В. В. Соколовский

(Москва)

Важный раздел механики сплошной среды — теория пластичности — занимает в последние годы значительное место в работах советских ученых.

Первым исследованием в этой области <sup>2</sup> явилась в 1935 г. работа С. Л. Соболева, <sup>3</sup> посвященная задаче о полярно-симметричном распространении (с течением времени) пластической зоны в бесконечной плоскости с круговым вырезом.

Исследования последних лет составляют целый комплекс работ группы главным образом молодых ученых, которые, базируясь на классических работах Л. Прандтля, Т. Кармана, Р. Мизеса, Г. Генки, А. Надаи и др., дали дальнейшее развитие теории пластичности.

Большинство иностранных работ в последние годы посвящено проверке самой теории пластичности, тогда как в нашей литературе основное внимание обращено на решение конкретных задач.

Настоящее сообщение носит обзорный характер. Однако оно не претендует на изложение всех работ по теории пластичности и затрагивает лишь некоторые разделы теории пластичности, нашедшие развитие в нашей стране, и притом те, которые наиболее близки научным интересам автора.

1. Уравнения пространственного деформирования. Теория вязко-пластических тел

Уравнения пространственного деформирования за пределом упругости были предметом исследований ряда ученых: Н. М. Беляева, Л. М. Качанова, А. А. Ильюшина, А. Ю. Ишлинского и др. Эти исследования дают дальнейшее развитие теории пластичности Мизеса-Генки, ставшей теперь классической.

Уравнения Генки выражают компоненты деформации через компоненты напряжения; значительный интерес представляет нахождение обратных зависимостей. Это было выполнено Л. М. Качановым как для случая идеальной пластичности, характеризуемой условием Мизеса, так и для более общего случая упрочнения материала при условии Шмидта. Л. М. Качанов дал новое обоснование теории Мизеса-Генки и подверг детальному изучению вариационные уравнения равновесия и движения пластического тела. Им доказан ряд интересных энергетических теорем, относящихся к этой теории.

А. А. Ильюшин дополнил теорию пластичности Мизеса-Генки законом разгрузки, считая связь между интенсивностями касательного напряжения и деформации сдвига линейной. Это существенное дополнение позволяет рассматривать задачи, в которых приходится иметь дело как с активным процессом нагружения, так и с пассивным

<sup>1</sup> Доложено на юбилейном заседании Института механики Академии Наук СССР 21 июня 1945 г. в Москве.

<sup>2</sup> Работы по применению теории пластических деформаций к стержневой строительной механике появились несколько раньше. Этим работ мы касаться не будем.

<sup>3</sup> На стр. 508 приводится список опубликованных исследований, которые затрагиваются в этом сообщении.

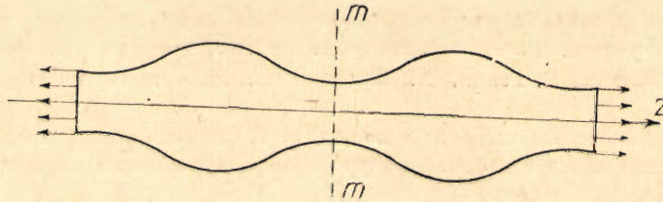


процессом «разгрузки». Полученные результаты находят свое применение, например, в вопросах устойчивости за пределом упругости, о чем будет говориться ниже.

Теория вязко-пластического материала построена у нас А. А. Ильюшиным. Помимо обычной гипотезы Сен-Венана о совпадении максимальной скорости скольжения с направлением наибольшего касательного напряжения эта теория основывается на допущении, что максимальное касательное напряжение при течении тела всегда больше некоторой постоянной и является линейной функцией максимальной скорости скольжения. Например, для случая круглого стержня (фиг. 1)  $\sigma_z = \sigma_s + \mu \varepsilon_z$ .

Наиболее интересными вопросами в теории деформирования вязко-пластических тел являются задачи об устойчивости растяжения или сжатия полосы, стержня и пластинки, поставленные А. А. Ильюшиным и решенные им и другими авторами.

В случае круглого стержня радиуса  $R$  задача была решена А. Ю. Ишлинским. Она сводится к уравнению, которое интегрируется в функциях Бесселя. Оказывается, например, что, если стержень, форма которого имеет малое синусоидальное отклонение  $\delta \sin \alpha z$  от круглого цилиндра, подвергнуть растяжению, то в зависимости от скорости деформации отношение этого отклонения к радиусу невозмущенной цилиндрической поверхности имеет тенденцию либо возрастать (неустойчивая деформация), либо уменьшаться (устойчивая деформация). Аналогичное явление имеет место при деформировании полосы и пластинки. Легко видеть причины этого явления (фиг. 1). Более узкие сечения стержня  $mm$



Фиг. 1

деформируются с большими скоростями, так как истинные напряжения в них больше и, следовательно, эти сечения должны утоньшаться скорее. С другой стороны, кривизна траекторий главных напряжений выравнивает деформации. Совокупность этих факторов определяет ход деформации в целом. Вопрос об устойчивости деформации решается знаком выражения

$$J_1(\gamma h) J_0(\bar{\gamma} h) + J_1(\bar{\gamma} h) J_0(\gamma h)$$

где  $h = Ra$ , а  $\gamma$  — комплексная величина, выражающаяся через скорость деформации и постоянные величины  $\sigma_s$  и  $\mu$ .

Интересно, что можно добиться таких условий, что при сжатии будет происходить увеличение отклонения формы стержня от цилиндра, т. е. будет обнаруживаться нечто, напоминающее шейку при растяжении образца. А. А. Ильюшин обнаружил это явление экспериментально.

## 2. Упруго-пластический изгиб пластинок и оболочек

Интересным разделом теории пластичности, получившим у нас значительное развитие, является теория упруго-пластического изгиба пластинок и оболочек, основанная на гипотезе Кирхгофа — Лява «о прямолинейном элементе», являющаяся обобщением технической теории изгиба балок. В качестве условия пластичности принимается условие Мизеса

$$\sigma_a^2 + \sigma_\beta^2 - \sigma_a \sigma_\beta + 3\tau_{a\beta}^2 = \sigma_s^2$$

или более общее условие Шмидта, учитывающее упрочнение материала:

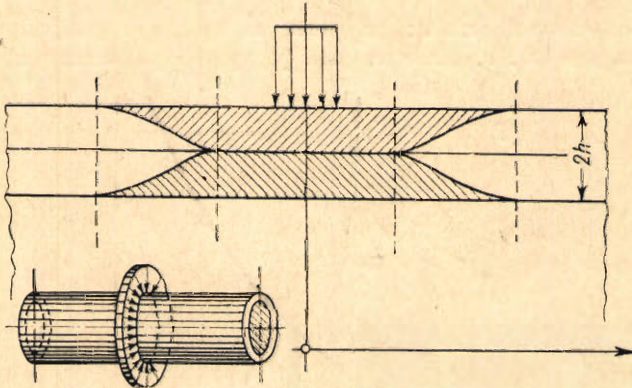
$$\frac{2}{\sqrt{3}} \left| \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_\beta^2 - \sigma_a \sigma_\beta + 3\tau_{a\beta}^2} \right| = F \left( \left| \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_\beta^2 + \varepsilon_a \varepsilon_\beta + \frac{1}{4} \gamma_{a\beta}^2} \right| \right)$$



где  $F$  — линейная или степенная функция. Эти условия упрощены пренебрежением компонентами  $\tau_{\alpha z}$ ,  $\tau_{\beta z}$  и  $\gamma_{\alpha z}$ ,  $\gamma_{\beta z}$  по сравнению с  $\sigma_{\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta}$  и  $\varepsilon_{\alpha}$ ,  $\varepsilon_{\beta}$ . Ось  $z$  направлена по нормали к средней поверхности оболочки,  $\beta = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$  — криволинейные координаты на средней поверхности.

А. А. Идзюшин рассмотрел пластическое состояние круговой цилиндрической оболочки, нагруженной осесимметричным кольцевым давлением, равномерно распределенным на некотором участке вдоль образующей.

На фиг. 2 изображено расположение пластических зон по толщине оболочки в меридиональном ее сечении. В чисто пластическом состоянии (пластическом состоянии по всей

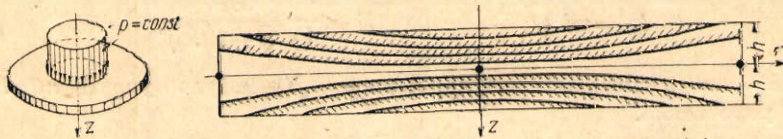


Фиг. 2

толщине оболочки) находится целый участок вдоль образующей. Это является важным отличием рассматриваемой задачи от изгиба балок. Напомним, что при изгибе балки чисто пластическое состояние может возникать только в точках оси балки, но не вдоль целых отрезков.

В. В. Соколовский рассмотрел упруго-пластическое состояние круговой пластинки радиуса  $a$ , находящейся под действием осесимметрично распределенной произвольной нагрузки.

На фиг. 3 изображен характер расширения пластических зон по толщине пластинки в меридиональном ее сечении при увеличении нагрузки, равномерно распределенной по



Фиг. 3

поверхности пластинки  $p = \text{const}$ . При  $p = 6,58 \varepsilon_s h^2 / a^2$  наступает чисто пластическое состояние (пластическое состояние по всей толщине пластинки), причем одновременно с образованием чисто пластического состояния в центре вся пластинка становится пластической. Аналогичное явление имеет место в случае, когда нагрузка расположена по кругу, меньшему площади пластинки. В этом состоит существенное отличие задачи об изгибе круговой пластинки от задачи об изгибе балки. Образование чисто пластического состояния в одной точке балки, как известно, вовсе не влечет появления чисто пластического состояния во всей балке.

На фиг. 4 представлена зависимость между прогибом  $f$  в центре пластинки и величиной нагрузки  $p$  при возрастании последней.

А. А. Идзюшин вывел граничные соотношения между усилиями  $N_{\alpha}$ ,  $N_{\beta}$ ,  $N_{\alpha\beta}$  и моментами

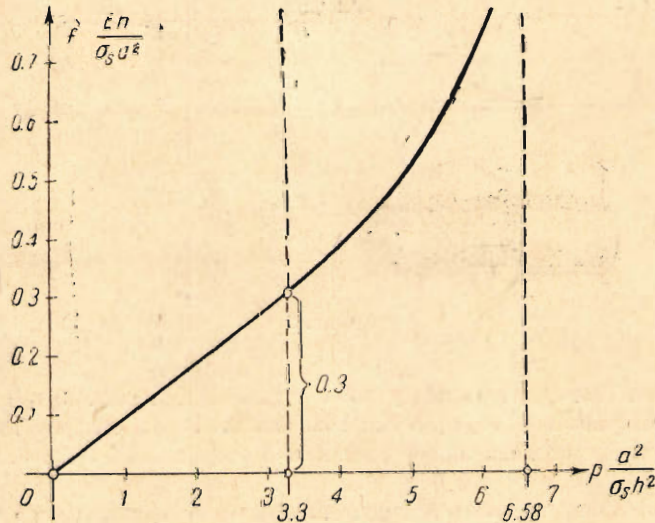


тами  $M_a$ ,  $M_\beta$ ,  $M_{a\beta}$ , выраженное через два параметра, имеющее место при чисто пластическом состоянии оболочки. Это условие, вытекающее из условия пластичности Мизеса, может быть использовано при применении вариационных методов к решению чисто пластических задач.

Для частного случая осесимметричной деформации без осевого растяжения приведены формулы, устанавливающие зависимость между величинами продольного усилия  $N_a$  и изгибающего момента  $M_a$  при чисто пластическом состоянии оболочки ( $\alpha$  — параметр)

$$N_a = \pm \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \ln \frac{\sqrt{1+\alpha}+1}{\sqrt{1+\alpha}-1}, \quad M_a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{1+\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \frac{\sqrt{1+\alpha}+1}{\sqrt{1+\alpha}-1} \right)$$

Вопрос об устойчивости сжатых стержней за пределом упругости материала был изучен Т. Карманом в 1909 г. Классическая формула Кармана для случая пластичности



Фиг. 4

с линейным упрочнением дает значение критической длины стержня  $l_{cr}$  (наибольшая длина, при которой стержень остается устойчивым) за пределом упругости

$$l_{cr} = \pi i \sqrt{\frac{K}{\sigma}}, \quad K = \frac{4EE_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2}$$

Здесь  $K$  — так называемый модуль Кармана,  $E$  — модуль упругости,  $E_1$  — модуль линейного упрочнения.

Для случая идеальной пластичности  $E_1 = 0$  и, следовательно, критическая длина стержня равна нулю.

А. А. Ильющин рассмотрел вопрос об устойчивости пластинок и оболочек за пределом упругости, базируясь на теории пластичности Мизеса-Генки, дополненной законом разгрузки. Для простоты материал принимается несжимаемым как в упругой, так и в пластической зонах (коэффициент Пуассона  $\nu = 1/2$ ).

Явление потери устойчивости состоит в том, что при некоторых значениях внешних сил наряду с исходным напряженным состоянием равновесия возникает возможное другое состояние:

$$\sigma_a + \delta\sigma_a, \quad \sigma_\beta + \delta\sigma_\beta, \quad \tau_{a\beta} + \delta\tau_{a\beta}; \quad \varepsilon_a + \delta\varepsilon_a, \quad \varepsilon_\beta + \delta\varepsilon_\beta, \quad \gamma_{a\beta} + \delta\gamma_{a\beta};$$

причем переход из первого состояния во второе происходит при незначительных смещениях.

Если перед потерей устойчивости пластинка находится в чисто пластическом состоянии, то после потери устойчивости, вообще говоря, по толщине пластинки образуются две зоны: в одной из них будет продолжаться нагружение и она останется пластиче-



ской, а в другой наступит разгрузка и она станет упругой. На границе этих зон интенсивность деформации сдвига постоянна.

Путем использования всех имеющихся уравнений А. А. Ильюшин выражает  $\delta M_x$ ,  $\delta M_y$ ,  $\delta M_{xy}$  через прогибы средней поверхности пластинки и получает основное дифференциальное уравнение устойчивости, являющееся обобщением уравнения Брайена. Он рассмотрел ряд интересных частных случаев устойчивости, как, например, исследовал цилиндрическую форму потери устойчивости прямоугольной пластинки с двумя свободными краями, сжатой вдоль двух других краев равномерно распределенными давлениями.

Интересно отметить, что для материала с идеальной пластичностью после потери устойчивости в пластинке имеет место лишь пластическая зона (упругая зона отсутствует). Оказывается, что критическая длина пластинки отлична от нуля и равна

$$l_{cr} = \frac{\pi h}{3} \sqrt{\frac{E(1-\psi)}{\sigma_s}}$$

где  $2h$  — толщина пластинки,  $\psi$  — переменная величина, возрастающая в процессе текучести от 0 до 1. В начале текучести  $\psi = 0$  и критическая длина  $l_{cr}$  будет в два раза меньше соответствующей критической длины при упругом состоянии.

Применение разработанной теории к оболочкам дало возможность исследовать устойчивость (осесимметричную форму) круговой цилиндрической оболочки, сжатой внешним давлением и осевой силой.

Следует еще упомянуть о простейших упруго-пластических задачах, как то: равновесие полого шара, равновесие полого цилиндра, кручение с растяжением круглого стержня. Эти задачи, имеющие широкое практическое применение, были предметом исследований Г. А. Смирнова-Аляева, Н. М. Безяева и В. В. Соколовского.

Обычно при решении указанных задач используется теория Мизеса-Генки, упрощенная допущением о несжимаемости пластического материала. Это допущение сильно искажает величину смещений, а также не дает возможности полностью удовлетворить условию непрерывности всех компонент напряжения и смещения на общей границе упругой и пластической зон.

Целью последних работ является устранение указанных недостатков. Для этого пришлось отказаться от допущения о несжимаемости и положить в основу исследований точную теорию Мизеса-Генки и учитывать сжимаемость материала как в упругой так и в пластической зонах.

Разработанный метод решения задач не изменяется при замене условия идеальной пластичности Мизеса условием Шмидта, учитывающим упрочнение материала. Решение перечисленных выше задач дается либо в замкнутом виде, либо приводит к одному обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка.

### 3. Плоское пластическое деформированное состояние и плоское предельное равновесие сыпучих тел

В основу теории пластического деформированного состояния могут быть положены теории пластичности Сен-Венана или Мизеса-Генки, а в основу теории предельного равновесия уравнения Ф. Кеттера

Условия пластичности Сен-Венана и Мизеса-Генки

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \quad (1)$$

(в теории Сен-Венана  $k = \sigma_s/2$ , а в теории Мизеса-Генки  $k = \sigma_s/\sqrt{3}$ ) и два уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

описывают пластическое равновесие при плоском деформированном состоянии.

Система уравнений (1), (2) исследовалась рядом ученых: М. Леви, Г. Генки, Л. Прандтлем, Г. Гейрингер, В. Прагером, А. Надаи, С. А. Христиановичем. Она принадлежит к гиперболическому типу и обладает двумя семействами характеристик — линиями скольжения — ортогональных в плоскости  $xy$ . Уравнения (1), (2) могут быть преобразова-



ны к двум линейным уравнениям — каноническим уравнениям (если оба семейства характеристик криволинейны) — либо, как показал С. А. Христианович, допускают интегралы, обладающие произвольной функцией (если одно из семейств характеристик состоит из прямых линий).

Продолжая интересные работы Г. Гейрингер и В. Прагера, С. А. Христианович предложил замечательный метод решения задач пластичности. Этот метод он показал на примере задачи о распределении напряжений в пластических зонах вне и внутри замкнутого контура, вдоль которого заданы напряжения. Поставленная задача сводится к краевой задаче Коши для указанных выше канонических уравнений по данным вдоль разомкнутой кривой в некоторой вспомогательной плоскости — плоскости характеристик.

Для численного решения краевых задач как в задаче Христиановича, так и в последующих задачах теории пластичности и теории сыпучих тел применяется метод Массо, состоящий в замене отыскания решения краевых задач соответствующих уравнений определением значений искомых функций в конечном числе узловых точек сетки характеристик.

Метод Христиановича применим и к другим задачам теории пластичности, где границей рассматриваемых областей служат гладкие кривые без угловых точек, а контурные напряжения непрерывны. Кроме того, доказан ряд важных теорем о свойствах получаемых решений.

Условие предельного равновесия Кеттера

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sin^2 \rho (\sigma_x + \sigma_y + 2k \operatorname{ctg} \rho)^2 \quad (3)$$

( $\rho$  — угол внутреннего трения, а  $k$  — коэффициент сцепления) и дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = X, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = Y \quad (4)$$

составляют основную систему уравнений предельного равновесия грунтов.

Система уравнений (3), (4) была составлена Ф. Кеттером и исследовалась А. Надаи и В. В. Соколовским. Она принадлежит к гиперболическому типу и обладает двумя семействами характеристик — линий скольжения, пересекающихся в плоскости  $xy$  под постоянными углами. Указанные уравнения могут быть отнесены к характеристикам и приведены к так называемому каноническому виду.

Проблемой давления сыпучего тела на подпорную стенку занимался Т. Карман, и ему удалось решить эту задачу в случае вертикальной подпорной стенки, у которой угол трения между стенкой и грунтом равен углу внутреннего трения грунта. В работах В. В. Соколовского построен общий метод решения основных задач о предельном равновесии сыпучего тела. Особенностью этих задач является наличие угловых точек на контуре, а также скачков напряжений в некоторых его точках, что лишает возможности непосредственного применения к ним метода Христиановича. Указанное препятствие можно обойти путем введения некоторых решений с особыми точками, которым в плоскости характеристик отвечают целые отрезки характеристик. Тогда задачи о предельном равновесии сыпучего тела могут быть сведены к различным комбинациям краевых задач (задача Коши, задача Римана и смешанная) для канонической системы уравнений, к которой приводятся уравнения Кеттера. Рассмотрен ряд задач теории сыпучих тел с учетом объемных сил (веса грунта), встречающихся на практике (о подпорной стенке, об устойчивости откосов и оснований фундаментов, о давлении грунта, заключенного между параллельными стенками).

В качестве примера рассмотрим сыпучее тело с горизонтальной границей, которая принята за ось  $x$ , и формулируем обобщенную задачу Прадтля: определить минимальное нормальное давление  $q$  вдоль отрицательной полуоси  $x$ , при котором сыпучее тело под действием напряжений  $\sigma_y = -p(x)$ ,  $\tau_{xy} = t(x)$ , заданных вдоль положительной полуоси  $x$ , сохраняет предельное равновесие (т. е. нет выпирания). На фиг. 5 изображено расположение характеристик (линий скольжения) и эпюры напряжения вдоль отрицательной полуоси  $x$ . Нахождение сетки характеристик и напряженного состояния в областях  $OAB$ ,  $OBC$  и  $OCD$  приводит соответственно к задачам Коши, Римана и смешанной для канонической системы уравнений в некоторой вспомогательной плоскости — плоскости



характеристик. Решение в области *OBC* обладает особой точкой *O*. Заметим, что величина искомой нагрузки  $q_0$  в точке *O* дается замкнутой формулой (при  $k=0$ )

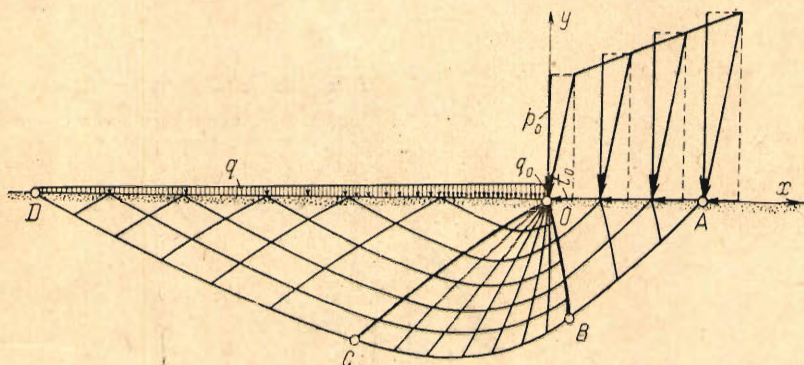
$$q_0 = P_0 \frac{1 - \sin \rho}{\cos^2 \mu_0 [1 + \cos \rho \sqrt{\operatorname{tg}^2 \rho - \operatorname{tg}^2 \mu_0}]} \exp \left\{ - \left[ \pi + \mu_0 + \arcsin \frac{\sin \mu_0}{\sin \rho} \right] \operatorname{tg} \rho \right\}$$

где обозначено

$$\operatorname{tg} \mu_0 = \frac{t_0}{P_0}, \quad P_0 = p(0), \quad t_0 = t(0)$$

В качестве другого примера может быть приведена задача об устойчивости откоса: определить форму поверхности откоса, находящегося в предельном равновесии, при заданном нормальном давлении  $\sigma_y = -p$  вдоль положительной полуоси  $x$ .

На фиг. 6 изображено расположение характеристик (линии скольжения) и показана форма линии<sup>1</sup>, ограничивающей откос. Напряженное состояние в области *OAB* дается в замкнутом виде, а характеристиками (линиями скольжения) являются два семейства



Фиг. 5

параллельных прямых; нахождение сетки характеристик и напряженного состояния в областях *OBC* и  *OCD* приводит соответственно к задачам Римана и смешанной для канонической системы уравнений в плоскости характеристик. Решение в области *OBC* обладает особой точкой *O*. Заметим, что угол наклона к оси  $x$  в точке *O* дается замкнутой формулой. Для случая грунта с идеальным сцеплением ( $\rho=0$ ) рассматриваемая задача решается в замкнутом виде. Форма откоса дается формулой ( $\gamma$  — объемный вес,  $p$  — интенсивность равномерной нагрузки вдоль оси  $x$ )

$$x = \frac{2k}{\gamma} \left\{ \ln \cos \left( \frac{p}{2k} - 1 - \frac{\gamma}{2k} y \right) - \ln \cos \left( \frac{p}{2k} - 1 \right) \right\}$$

Поставлена новая задача о предельном равновесии анизотропной слоистой среды, у которой угол внутреннего трения  $\bar{\rho}$  и коэффициент сцепления  $\bar{k}$  по горизонтальным плоскостям  $y = \text{const}$  меньше, чем угол внутреннего трения  $\rho$  и коэффициент сцепления  $k$  по другим плоскостям

$$\bar{\rho} < \rho, \quad \bar{k} < k$$

Условия предельного равновесия слоистой сыпучей среды могут быть представлены в следующей форме

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sin^2 \rho [\sigma_x + \sigma_y + 2k \operatorname{ctg} \rho]^2, \quad |\tau_{xy}| \leq \sigma_y \operatorname{tg} \bar{\rho} + \bar{k} \quad (5)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \leq \sin^2 \rho [\sigma_x + \sigma_y + 2k \operatorname{ctg} \rho]^2, \quad |\tau_{xy}| = \sigma_y \operatorname{tg} \bar{\rho} + \bar{k} \quad (6)$$

<sup>1</sup> Эта линия может иметь большую кривизну.

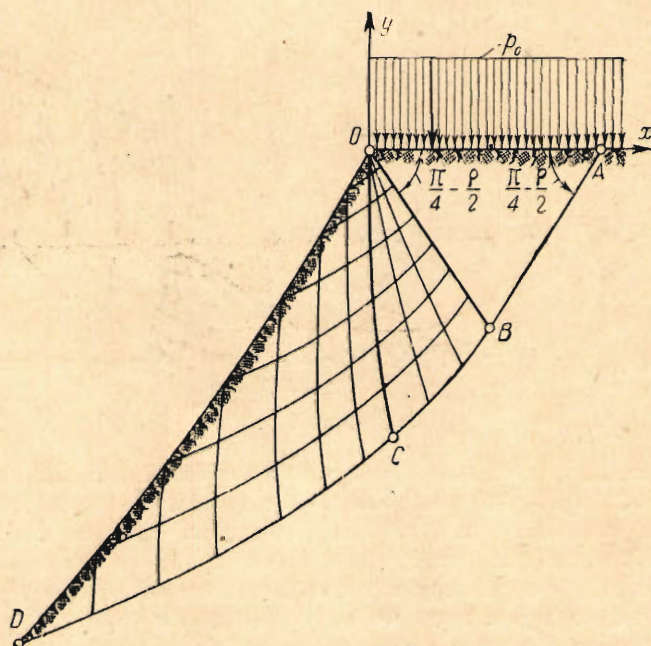


Уравнение (5) совпадает с условием предельного равновесия изотропной среды, а уравнение (6) имеет место для анизотропной среды. Пользуясь этими уравнениями, можно решать различные задачи о предельном равновесии слоистой среды.

При рассмотрении этих задач, например, обобщенной задачи Прандтля, в сыпучем теле приходится различать три зоны, в которых предельное равновесие описывается уравнениями (5) и (6). Границы этих зон являются искомыми и находятся в процессе решения задачи. Ограничимся для краткости приведением замкнутой формулы, дающей величину искомого напряжения  $q_0$  в точке  $O$  (при  $k = \bar{k} = 0$ ,  $t_0 = 0$ ):

$$q_0 = p_0 \frac{(1 - \sin \rho) [\cos \bar{\rho} - \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \bar{\rho}}]}{(1 + \sin \rho) [\cos \bar{\rho} + \sqrt{\sin^2 \rho - \sin^2 \bar{\rho}}]} \exp \left\{ -2 \operatorname{tg} \rho \operatorname{arc} \sin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho} \right\}$$

Из сравнения этой формулы с соответствующей формулой для изотропной среды ( $\bar{\rho} = \rho$ ) ясно, что значение  $q_0$  для слоистой среды больше, чем соответствующее значение для изотропной среды, что очевидно также из механических соображений.



Фиг. 6

Применение методов, развитых в теории сыпучих тел, к пластическому плоскому деформированному состоянию дает возможность рассматривать ряд задач, поставленных Г. Генки и Л. Прандтлем. Приведем в качестве примера простую замкнутую формулу, имеющую место в задаче о вдавливании шероховатого (максимальная сила трения постоянна и равна  $\tau$ ) круглого штампа радиуса  $R$  в пластическое тело (фиг. 7). Величина силы  $P$  связана с углом  $\gamma$  формулами:

при  $2\gamma \leq \operatorname{arc} \sin t$

$$\frac{P}{kR} = 2(\pi + 2) \sin \gamma$$

при  $2\gamma \geq \operatorname{arc} \sin t$

$$\frac{P}{kR} = 2(\pi + 2) \sin \gamma_* + 2(\sin \gamma - \sin \gamma_*) (\pi + 1 + \operatorname{arc} \sin t + \sqrt{1 - t^2}) - 4(\gamma \sin \gamma - \gamma_* \sin \gamma_* + \cos \gamma - \cos \gamma_*) + 2t(\cos \gamma_* - \cos \gamma)$$

где обозначено  $2\gamma_* = \operatorname{arc} \sin t$  и  $t = \tau/k$ .



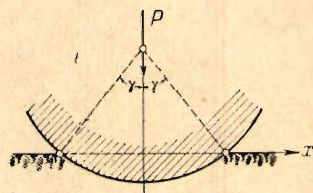
Могут быть решены и другие, более сложные задачи, например, о сжатии пластической полосы конечной длины между двумя шероховатыми параллельными плитами<sup>1</sup>.

Практически важная задача о прокатке металлов была поставлена и решена Т. Карманом и рассматривалась А. Надаи. Исследованием этого же вопроса занимается К. Н. Шевченко, который рассматривает задачу о прокатке как плоскую задачу теории пластичности. Он нашел распределение напряжений по толщине и поле скоростей в ней.

В заключение уместно сказать несколько слов об осесимметричной задаче, бывшей предметом исследований А. Ю. Ишлинского. Как известно, осесимметричная задача становится статически определенной, если рассматривать не обычную пластичность в смысле Сен-Венана или Мизеса, а так называемую «полную» пластичность в смысле Хаара и Кармана, при которой два главных касательных напряжения равны пластической постоянной.

Впервые осесимметричная проблема при полной пластичности рассматривалась Г. Генки. Детальное исследование уравнений выполнено А. Ю. Ишлинским. Последний, пользуясь методами плоской задачи, дал решение задачи о вдавливании жесткого шара в пластическое тело (связанной с пробой Бринеля). Численный результат для отношения  $\sigma_s/H_B$  по вычислениям А. Ю. Ишлинского получается порядка 0.38.

Эксперимент над вдавливанием стальных шариков в цинк и свинец дает для этого отношения значения 0.34—0.36.]



Фиг. 7

#### 4. Плоское пластическое напряженное состояние

В основу теории плоского пластического напряженного состояния может быть положена либо теория пластичности Сен-Венана, либо теория пластичности Мизеса.

Условия пластичности Сен-Венана, как известно, могут быть представлены в виде следующих уравнений:

при  $\sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 \quad (7a)$$

при  $\sigma_x \sigma_y \geq \tau_{xy}^2$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (2\sigma_s - |\sigma_x + \sigma_y|)^2 \quad (7b)$$

Первое из этих уравнений совпадает с условиями пластичности при плоском деформированном состоянии, а второе имеет место лишь при плоском напряженном состоянии.

Условие пластичности Губера-Мизеса заменяет два условия (7) одним уравнением

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 \quad (8)$$

Уравнения (2) вместе с условиями (7) и (8) описывают пластическое равновесие при плоском напряженном состоянии. Это уравнения были исследованы В. В. Соколовским.

Система уравнений (2), (7b) может быть проинтегрирована в замкнутом виде. Интегралы содержат две произвольные функции. Характеристиками является семейство прямых в плоскости  $xu$ .

Система уравнений (2), (8) может принадлежать как к гиперболическому, так и к эллиптическому типам в зависимости от характера напряженного состояния<sup>2</sup>.

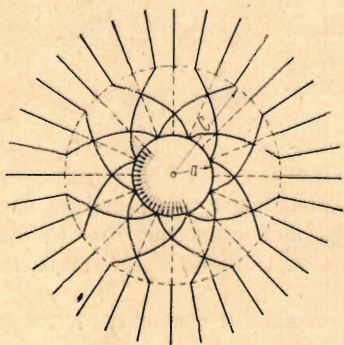
При гиперболическом типе этих уравнений последние обладают двумя семействами характеристик, пересекающимися между собой в плоскости  $xu$  под переменными угла-

<sup>1</sup> Л. Прандтль решил эту же задачу для случая бесконечно длинной полосы.

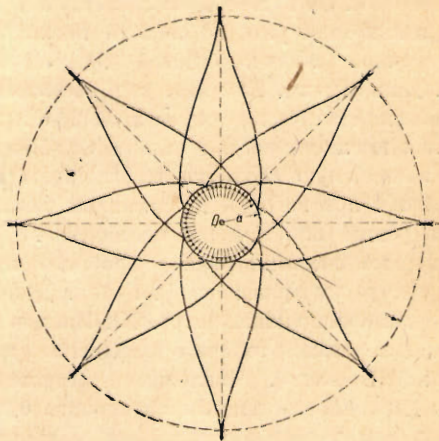
<sup>2</sup> Грубо говоря, уравнения (2), (8) в области их гиперболическости соответствуют уравнениям (2), (7a), а в области их эллиптичности — уравнениям (2), (7b).



ми. Уравнения (2), (8) в области их гиперболичности могут быть приведены к системе двух линейных уравнений — каноническим уравнениям (если оба семейства характеристик криволинейны) либо допускают интегралы, обладающие произвольной функцией (если одно из семейств характеристик состоит из прямых линий).



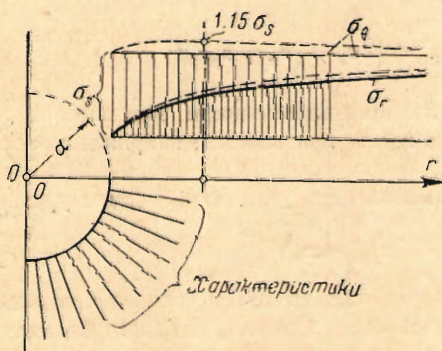
Фиг. 8



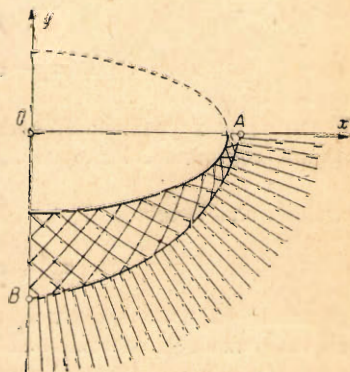
Фиг. 9

В качестве первого примера может быть приведена задача о всестороннем растяжении напряжениями, приложенными на бесконечности пластинки с вырезом, вдоль которого заданы напряжения. Решение этой задачи может быть проведено как по теории пластичности Сен-Венана, так и по теории пластичности Мизеса.

В частном случае кругового выреза радиуса  $a$  и полярно-симметричного распределения напряжений решение задачи получается в замкнутом виде.



Фиг. 10



Фиг. 11

На фиг. 8 для примера изображено расположение характеристик, построенных по теории Сен-Венана при внутреннем давлении  $\sigma_0 < 0$ . Пластические кольцевые области  $a \leq r \leq c$  и  $c \leq r < \infty$  представляют собой зоны, где имеет место соответственно системы уравнений (2), (7a) и (2), (7b).

На фиг. 9 изображено расположение характеристик, построенных по теории Мизеса<sup>1</sup> также при том же граничном давлении  $\sigma_0 < 0$ . Пластические кольцевые области  $a \leq r \leq d$

<sup>1</sup> Решение этой задачи по теории пластичности Мизеса принадлежит А. Ицдеев.



и  $d \leq r < \infty$  представляют собой соответственно гиперболические и эллиптические зоны системы уравнений (2), (8).

Случаю отсутствия внутреннего давления ( $\sigma_r = 0$ ) отвечает фиг. 10. Сплошными линиями нанесены эпюры, распределения напряжений, построенные по теории пластичности Сен-Венана, а пунктиром те же эпюры, построенные по теории пластичности Мизеса.

Для создания рассмотренных напряженных состояний на бесконечности должно действовать гидростатическое напряжение  $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_s$ .

В общем случае произвольного некругового выреза задача может быть также полностью решена.

На фиг. 11 изображено расположение характеристик вне эллиптического отверстия, по контуру которого приложено равномерное нормальное давление ( $\sigma_n < 0$ ,  $\tau_{tn} = 0$ ) при решении задачи по теории пластичности Сен-Венана.

Нетрудно видеть, что вблизи выреза напряженное состояние описывается уравнениями (2), (7a), а вдали от него — уравнениями (2), (7b)

Нахождение сетки характеристик и компонент напряжения вблизи отверстия, где характеристики состоят из двух криволинейных семейств, выполняется методом Христиановича. Нахождение сетки характеристик и компонент напряжения вдали отверстия, где семейство характеристик состоит из прямых линий, может быть достигнуто путем определения произвольной функции, входящей в соответствующие интегралы (решение получается замкнутым). Граница  $AB$  между обеими зонами определяется из условий непрерывности всех компонент напряжения.

Случаю отсутствия внутреннего давления ( $\sigma_n = \tau_{tn} = 0$ ) отвечает фиг. 12. Характеристиками являются нормали к контуру, и решение задачи получается в замкнутом виде. Так, например, компоненты напряжений: вдоль оси  $x$

$$\sigma_x = \sigma_s \left( 1 + \frac{b^2}{a^2 - b^2 - a|x|} \right), \quad \sigma_y = \sigma_s, \quad \tau_{xy} = 0$$

вдоль оси  $y$

$$\sigma_x = \sigma_s, \quad \sigma_y = \sigma_s \left( 1 - \frac{a^2}{a^2 - b^2 + b|y|} \right), \quad \tau_{xy} = 0$$

где  $a$  и  $b$  — полуоси эллиптического контура.

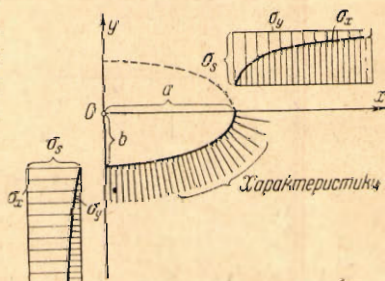
Для создания напряженных состояний на бесконечности должно действовать гидростатическое напряжение  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_s$ ,  $\tau_{xy} = 0$ .

В качестве второго примера рассматривается задача о распределении напряжений в полосе при протаскивании ее через неподвижную жесткую матрицу, плоскости которой образуют угол  $2\gamma$ . Максимальная сила трения между матрицей и пластической полосой постоянна<sup>1</sup> и равна  $\tau$ . При решении задачи предполагается, что при выходе полосы из матрицы (в сечении  $x = 0$ )

$$\sigma_x = p = \text{const}, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y < \sigma_x$$

На фиг. 13 изображено расположение характеристик в пластической полосе, найденное по теории Мизеса. Нахождение сетки характеристик и компонент напряжения в областях  $ABC$ ,  $CDEF$ , ..., где одно из семейств характеристик состоит из прямых линий, может быть достигнуто путем определения произвольных функций, входящих

<sup>1</sup> Случай сухого трения, когда максимальная величина силы трения пропорциональна нормальному давлению, может быть рассмотрен совершенно аналогично.



Фиг. 12

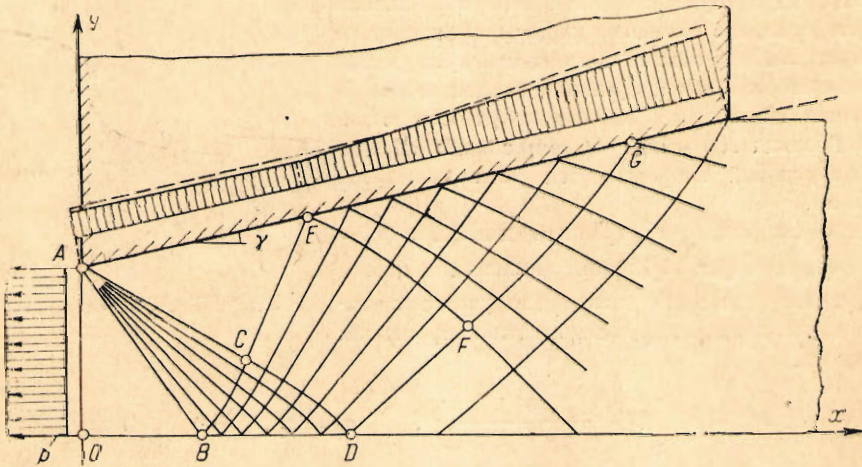


в соответствующие интегралы уравнений пластичности (решения получаются замкнутыми); нахождение сетки характеристик и компонент напряжения в областях  $BCD$ ,  $EFG$ , ..., где характеристики обоих семейств криволинейны, приводит к решению смешанных краевых задач для соответствующих канонических уравнений (вычисления проводятся приближенно методом Массо). Величина  $p$ , определяющая напряжение натяжения полосы, необходимое для ее волочения, находится из условия равновесия

$$pb = -\operatorname{tg} \gamma \int_0^a \sigma_n dx + \tau a$$

где  $a$ —ширина матриц,  $2b$ —толщина полосы после протяжки.

Сплошной линией изображена эпюра давлений вдоль контактной прямой. Пунктиром нанесена та же эпюра, построенная при решении рассматриваемой задачи в условиях плоского деформированного состояния по Мизесу. Поэтому сравнение результатов дает представление о разнице, получаемой при рассмотрении бесконечно широкой и узкой полос. Таким образом устанавливаются границы, в которых расположено решение при конечной длине в направлении оси  $z$ .



Фиг. 13

Близкой по методу решения к изложенным выше проблемам является задача о кручении цилиндрического стержня овального цилиндрического сечения, ограниченного контуром

$$\begin{aligned} x &= +[a + b(\cos 2\alpha + 2)] \sin \alpha \\ y &= -[a + b(\cos 2\alpha - 2)] \cos \alpha \end{aligned} \quad \text{при } \frac{a}{b} > 3$$

где  $\alpha$ —угол наклона кривой к оси  $x$ ; эта кривая близка к эллипсу с полуосями  $a + b$  и  $a - b$ .

Напряженное состояние закрученного стержня описывается уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

уравнением

$$\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} = 2G\theta' \quad (10)$$

в упругой зоне ( $\theta'$ —угол закручивания на единицу длины) и условием пластичности

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 \quad (11)$$

в пластической зоне.

На границе упругой и пластической зон компоненты напряжения и смещения непрерывны.



Точное решение этой задачи получено В. В. Соколовским в замкнутом виде. Ниже для примера приведена формула, дающая величину крутящего момента в зависимости от угла закручивания:

$$|M| = \frac{2\pi}{3} ka^3 \left[ 1 - \frac{1}{8\theta^2} - \frac{9}{2} \beta^2 - \frac{1}{2\theta} \left( \frac{1}{4\theta^2} - 2\beta^2 \right) \sqrt{1 + 16\beta^2\theta^2} \right] \quad (12)$$

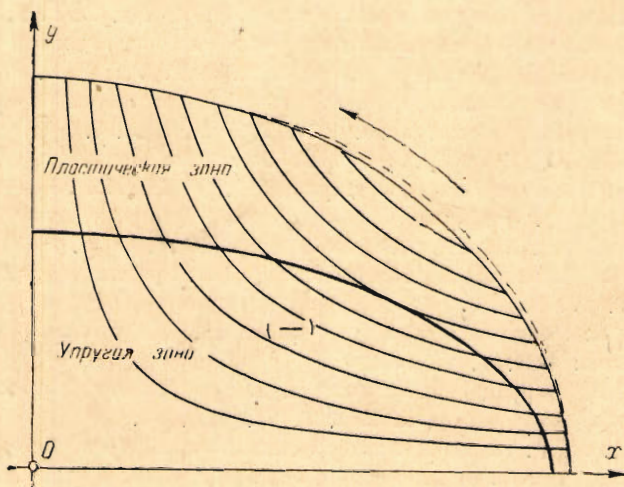
справедливая при

$$\theta = \frac{Ga}{k} |\theta| \geq \frac{1-\beta}{(1+\beta)(1-3\beta)}$$

где  $\beta = b/a$ .

При  $\beta = 0$  формула (12) переходит в известную формулу для кругового цилиндрического стержня.

На фиг. 14 представлена четверть овала. Контур, обведенный жирно, мало отличается от эллипса, нанесенного пунктиром. Изображены также горизонтали поверхности,



Фиг. 14

в которую обращается первоначально плоское поперечное сечение. Вычисления координат могут быть проведены по точным замкнутым формулам, которые получены для осевого смещения.

Методами теории функций комплексного переменного Л. А. Галину удалось рассмотреть задачу об упруго-пластическом кручении призматических стержней полигонального сечения. В качестве примера исследовано кручение стержня квадратного поперечного сечения. Форма пластических зон в поперечном сечении, получающаяся на основании выведенных формул, совпадает с известными экспериментальными результатами А. Надаи.

#### W. W. SOKOLOVSKY.—THE THEORY OF PLASTICITY—OUTLINE OF WORK DONE

The summary was read by the author to the meeting of the Institute of Mechanics on July 25, 1945, held in honour of the 220th anniversary of the Academy of Sciences of the USSR.

In a limited review of this type, the author could not, of course, deal with all the works published in the USSR. He confined himself to a discussion of works in fields which have enjoyed the greatest development in this country in recent years; his choice falling on those works which stand closest to his own scientific interests.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М. Теории пластических деформаций. Известия Академии Наук СССР. ОТН. 1937. № 1.
2. Беляев Н. М. Напряжения и деформации в толстостенных цилиндрах при упруго-пластическом состоянии материала. Изв. Акад. Наук СССР. ОТН. 1938. № 2, 4.
3. Галин Л. А. Упруго-пластическое кручение призматических стержней полигонального сечения. Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII. Вып. 4.
4. Ильюшин А. А. Деформация вязко-пластического тела. Ученые записки МГУ. 1940. Вып. 39.
5. Ильюшин А. А. Некоторые вопросы теории пластических деформаций. Прикладная математика и механика. 1944. Т. VII. Вып. 4.
6. Ильюшин А. А. Устойчивость пластинок и оболочек за пределом упругости. Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII. Вып. 5.
7. Ильюшин А. А. Конечные соотношения между силами и моментами и связь их с деформациями в теории оболочек. Прикладная математика и механика. 1945. Т. IX. Вып. 1.
8. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязко-пластического течения полосы и круглого прута. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII. Вып. 2.
9. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязко-пластического течения полосы круглой плиты. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII. Вып. 6.
10. Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача пластичности и проба Бриелля. Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII. Вып. 3.
11. Ишлинский А. Ю. Уравнения деформирования не вполне упругих и вязко-пластических тел. Известия Академии Наук СССР. ОТН. 1945. № 1—2.
12. Ишлинский А. Ю. Пространственное деформирование не вполне упругих и вязко-пластических тел. Известия Академии Наук СССР. ОТН. 1945. № 3.
13. Качанов Л. М. К механике пластических средин. Прикладная математика и механика. 1940. Т. IV. Вып. 3.
14. Качанов Л. М. Упруго-пластическое состояние твердых тел. Прикладная математика и механика. 1941. Т. V. Вып. 3.
15. Качанов Л. М. Вариационные принципы для упруго-пластических средин. Прикладная математика и механика. 1942. Т. VI. Вып. 2-3.
16. Смирнов-Аляев Г. А. Теория автоскрепления цилиндров. 1940.
17. Sobolev S. The Problem of Propagation of Plastic State. Труды Сейсмологического института Академии Наук СССР. 1935. № 49.
18. Соколовский В. В. Об одной задаче упруго-пластического кручения. Прикладная математика и механика. 1942. Т. VI. Вып. 2-3.
19. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. Академии Наук СССР. 1942.
20. Соколовский В. В. Упруго-пластическое равновесие цилиндрической трубы при наличии упрочнения материала. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII. Вып. 4.
21. Соколовский В. В. Упруго-пластический изгиб круговой и кольцевой пластинок. Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII. Вып. 2.
22. Соколовский В. В. Уравнения пластического равновесия при плоском напряженном состоянии. Прикладная математика и механика. 1945. Т. IX. Вып. 4.
23. Соколовский В. В. Некоторые задачи о пластическом плоском напряженном состоянии. Прикладная математика и механика. 1945. Т. IX. Вып. 1.
24. Христианович С. А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре. Математический сборник. Новая серия. 1938. Т. I /43/. № 4.